A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $x = k$, paralelo ao plano YZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases},$$

- são duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2} \\ x = k \end{cases}$ paralelas ao eixo$-OZ$ se $|k| > a$;

- é a reta $\begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases}$ paralela ao eixo$-OZ$ se $k = a$;

- é a reta $\begin{cases} y = 0 \\ x = -a \end{cases}$ paralela ao eixo$-OZ$ se $k = -a$;

- é o conjunto vazio se $|k| < a$, pois $\dfrac{k^2}{a^2} - 1 < 0$.

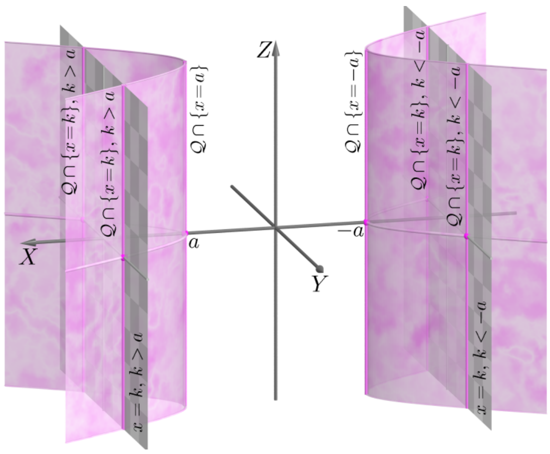

Figura 28: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano YZ

Por outro lado, a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 + k^2} \\ y = k \end{cases}$$

consiste de duas retas paralelas ao eixo$-OZ$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

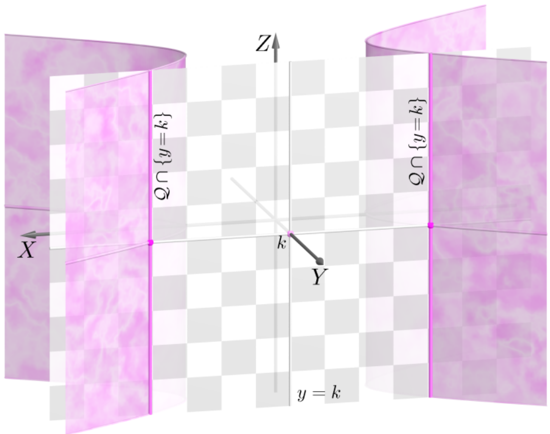

Figura 29: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XZ

Observação 6

Pode-se provar, como no exemplo 6, que todo cilindro hiperbólico é gerado por retas paralelas ao seu eixo.

Observação 7

As seis quádricas apresentadas até agora são chamadas *quádricas cêntricas*, porque todas são simétricas em relação à origem.

Na forma canônica, ainda restam três quádricas que não são simétricas em relação à origem. Essas quádricas são denominadas *quádricas não cêntricas*.

7. Paraboloide Elíptico

Os *paraboloides elípticos* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= ax\,, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} &= by\,, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= cz\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais não nulos.

Vamos analisar o paraboloide elíptico de eixo$-OZ$

$$\mathcal{Q}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz\,, \qquad c>0\,.$$

É fácil verificar que $\mathcal{Q}$ é simétrica em relação aos planos YZ e XZ, mas não é simétrica em relação ao plano XY e à origem.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z=k$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q}\cap\{z=k\}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=ck\\ z=k\end{cases},$$

- é uma elipse de centro $(0,0,k)$ se $k>0$;
- é a origem $(0,0,0)$ se $k=0$;
- é o conjunto vazio se $k<0$.

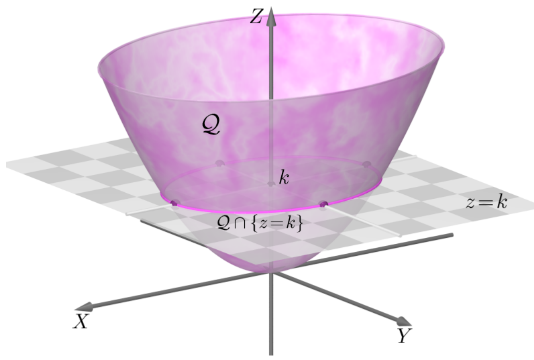

Figura 30: Interseção $\mathcal{Q}\cap\{z=k\}$

As seções planas contidas nos planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=cz-\dfrac{k^2}{b^2}\\ y=k\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases}x^2=a^2c\left(z-\dfrac{k^2}{cb^2}\right)\\ y=k\end{cases},$$

são parábolas de vértices $V_k=\left(0,k,\dfrac{k^2}{b^2c}\right)$ e retas focais paralelas ao eixo$-OZ$, com concavidade voltada para cima, pois $a^2c>0$ (figura 31).

E as seções planas

$$\mathcal{Q}\cap\{x=k\}:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=cz-\dfrac{x^2}{a^2}\\ x=k\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \mathcal{Q}\cap\{y=k\}:\begin{cases}y^2=b^2c\left(z-\dfrac{k^2}{ca^2}\right)\\ x=k\end{cases}$$

também são parábolas de vértices $V_k = \left(k, 0, \dfrac{k^2}{a^2c}\right)$ e retas focais paralelas ao eixo$-OZ$, com concavidade voltada para cima (figura 32).

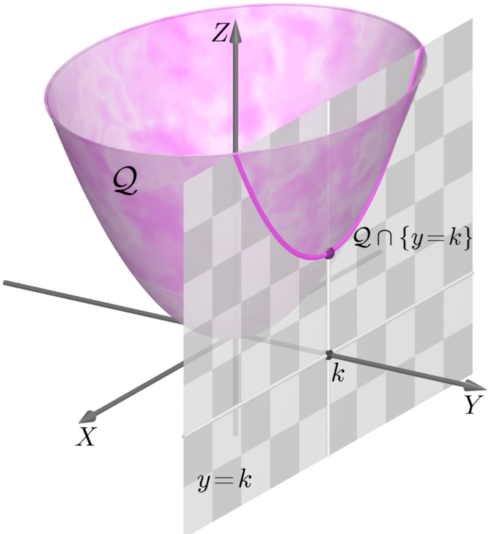

Figura 31: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos paralelos ao plano XZ

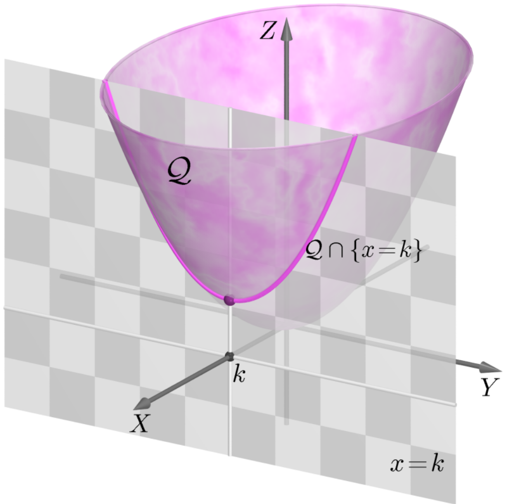

Figura 32: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos paralelos ao plano YZ

Exemplo 7

Mostre que nenhuma reta está contida num paraboloide elíptico.

Solução.

De fato, se $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Q} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$ e

$$r : \begin{cases} x(t) = \alpha t + x_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \\ z(t) = \gamma t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0), temos que um ponto $(\alpha t + x_0, \beta t + y_0, \gamma t + z_0) \in \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} = c(\gamma t + z_0)$$
$$\iff \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) t^2 + \left(\frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - c\gamma\right) t = 0,$$

pois $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = cz_0$.

Então $r \subset \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{2\alpha x_0}{a^2} + \frac{2\beta y_0}{b^2} - c\gamma = 0\,,$$

ou seja, se, e só se, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, uma contradição.

Logo, uma reta intersecta o paraboloide elíptico em no máximo dois pontos.

□

8. Paraboloide Hiperbólico

Os *paraboloides hiperbólicos* na forma canônica de eixo$-OZ$, eixo$-OY$ e eixo$-OX$ são as quádricas dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= cz\,, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= by\,, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= ax\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais não nulos.

Vamos estudar o paraboloide hiperbólico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\,, \quad c < 0\,.$$

Esta quádrica é simétrica em relação ao plano YZ e ao plano XZ, mas não é simétrica em relação ao plano XY e à origem.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}\,,$$

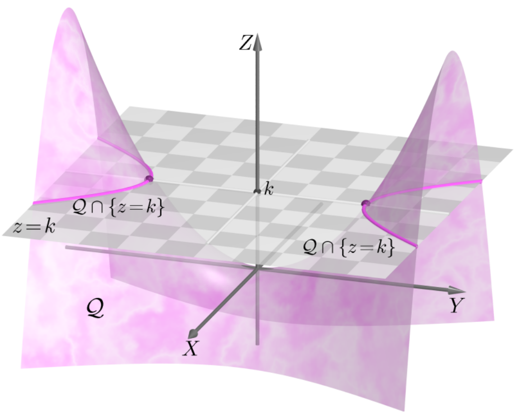

Figura 33: Interseção do paraboloide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k > 0$

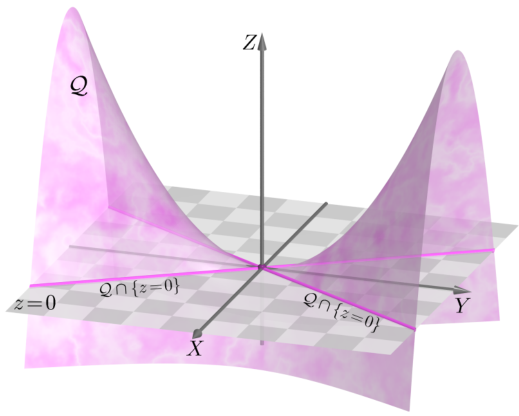

Figura 34: Interseção do paraboloide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = 0$

• é uma hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$, centro no ponto $(0,0,k)$ e assíntotas $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{b}\,y \\ z = k \end{cases}$ se $k > 0$, pois, neste caso, $ck < 0$ (figura 33);

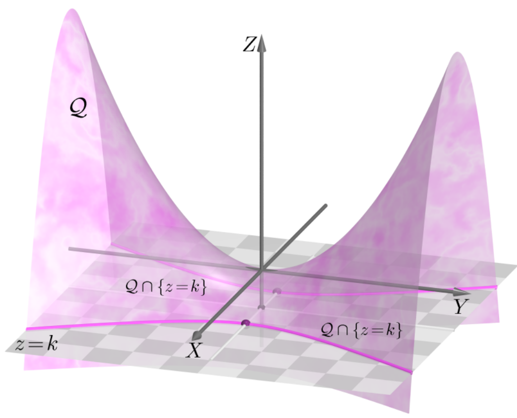

Figura 35: Interseção do paraboloide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k < 0$

• são duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\,x \\ z = 0 \end{cases}$ se $k = 0$ (figura 34);

• é uma hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OX$, centro $C = (0,0,k)$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\,x \\ z = k \end{cases}$ se $k < 0$, pois, neste caso, $ck > 0$ (figura 35).

As seções planas contidas em planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\}: \begin{cases} x^2 = a^2\left(cz + \dfrac{k^2}{b^2}\right) = a^2c\left(z + \dfrac{k^2}{b^2c}\right) \\ y = k \end{cases},$$

são parábolas de retas focais paralelas ao eixo$-OZ$ e vértice no ponto

$\left(0, k, -\dfrac{k^2}{cb^2}\right)$, com concavidade voltada para baixo para todo $k \in \mathbb{R}$, uma vez que $a^2c < 0$.

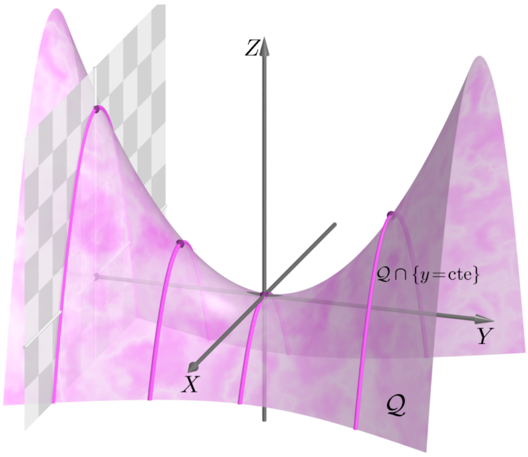

Figura 36: Interseção do paraboloide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com os planos y =cte

De modo análogo, para todo $k \in \mathbb{R}$, as seções planas,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} y^2 = b^2\left(\dfrac{k^2}{a^2} - cz\right) = -b^2c\left(z - \dfrac{k^2}{a^2c}\right) \\ x = k \end{cases},$$

são parábolas de retas focais paralelas ao eixo$-OZ$ e vértice

$$V = \left(k\,,\,0\,,\,\frac{k^2}{a^2c}\right),$$

com concavidade voltada para cima, pois, neste caso, $-b^2c > 0$.

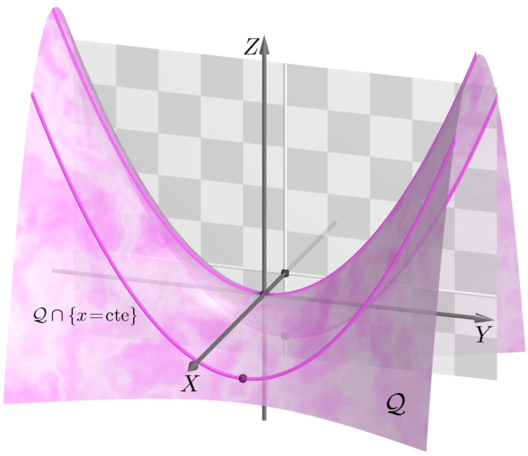

Figura 37: Interseção do paraboloide hiperbólico $\mathcal{Q}$ com o plano $x = k$

Exemplo 8

Determine as retas contidas no paraboloide hiperbólico

$$\mathcal{S} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$$

que passam pelo ponto $A = (4, 3, 3) \in \mathcal{S}$.

Solução.
Seja $r = \{\,(at + 4,\, bt + 3,\, ct + 3\,)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ que passa pelo ponto A.
Então $r \subset \mathcal{S}$ se, e só se,

$$\begin{aligned}
&\frac{(at+4)^2}{4} - \frac{(bt+3)^2}{9} = ct + 3 \\
\iff\ & \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}\right) t^2 + \left(\frac{8a}{4} - \frac{6b}{9} - c\right) t + \frac{16}{4} - \frac{9}{9} - 3 = 0 \\
\iff\ & \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}\right) t^2 + \left(2a - \frac{2b}{3} - c\right) t = 0 \\
\iff\ & t\left[\left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}\right) t + \left(2a - \frac{2b}{3} - c\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Assim,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{b^2}{9} \\[2mm] 2a - \dfrac{2b}{3} - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \pm\dfrac{3}{2}a \\[2mm] c = 2a - \dfrac{2}{3}b = 2a - \dfrac{2}{3}\left(\pm\dfrac{3}{2}\right) a \end{cases} \\
\iff\ & \overrightarrow{v} = \left(a, \frac{3}{2}a, a\right) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = \left(a, -\frac{3}{2}a, 3a\right) \\
\iff\ & \overrightarrow{v} \parallel (1, \frac{3}{2}, 1) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} \parallel (1, -\frac{3}{2}, 3).
\end{aligned}$$

Logo, $r = \{\,(t+4, \frac{3}{2}t+3, t+3)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{\,(t+4, -\frac{3}{2}t+3, 3t+3)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ são as retas contidas em $\mathcal{S}$ que passam por A. □

Observação 8

É possível mostrar que, para todo ponto P pertencente a um paraboloide hiperbólico $\mathcal{S}$, há exatamente duas retas contidas em $\mathcal{S}$ que passam por P.

9. Cilindro Parabólico

Os *cilindros parabólicos* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas seguintes equações de segundo grau:

$$\begin{array}{rclcrcl} \dfrac{y^2}{b^2} &=& cz & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} &=& by\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} &=& cz & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2} &=& ax\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2} &=& by & \text{ou} & \dfrac{y^2}{b^2} &=& ax\,, \end{array}$$

onde a, b, c são números reais não nulos.

Estudaremos o cilindro parabólico de eixo$-OY$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} = cz\,, \qquad c > 0.$$

É fácil mostrar que, $\mathcal{Q}$ é simétrico em relação ao plano YZ e ao plano XZ, mas não é simétrico em relação ao plano XY e à origem.

Como estamos supondo $c > 0$, a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $y = k$, paralelo ao plano XZ, é a parábola:

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} x^2 = ca^2 z \\ y = k \end{cases}$$

de vértice $V_k = (0, k, 0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OZ$ com concavidade voltada para cima.

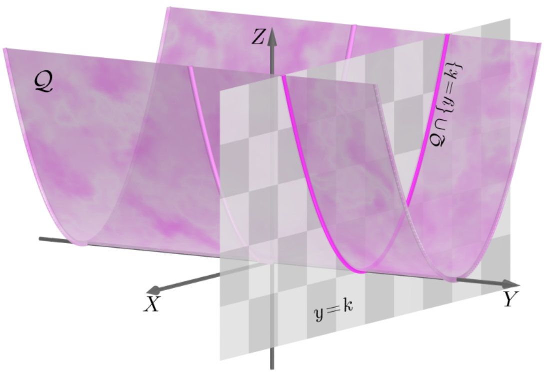

Figura 38: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $y = k$ paralelos ao plano XZ

A seção plana contida em um plano paralelo ao plano XY:

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} x^2 = ca^2 k \\ z = k \end{cases},$$

representa:

• duas retas $\begin{cases} x = \pm\sqrt{ca^2k} \\ z = k \end{cases}$ paralelas ao eixo$-OY$ se $k > 0$;

• a reta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, ou seja, o eixo$-OY$ se $k = 0$;

• o conjunto vazio se $k < 0$.

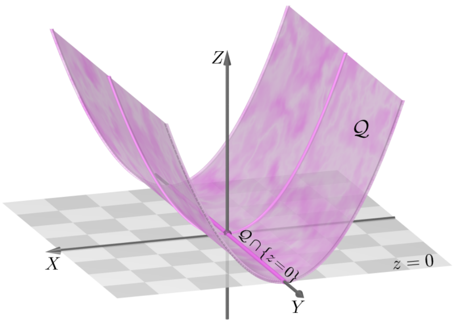

Figura 39: Interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano XY.

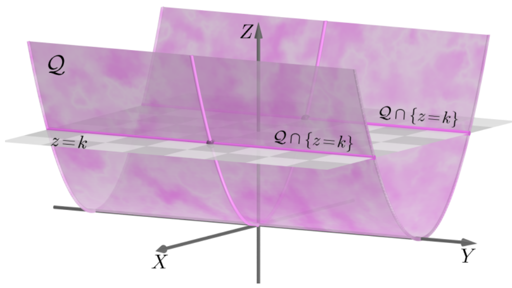

Figura 40: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $z = k$, paralelos ao plano XY, com $k > 0$.

Finalmente, as seções planas

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} z = \dfrac{k^2}{a^2c} \\ x = k \end{cases}$$

são retas paralelas ao eixo$-OY$.

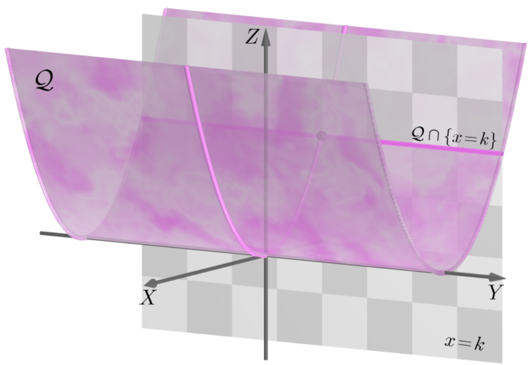

Figura 41: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $x = k$, paralelos ao plano YZ.

Observação 9

Como no exemplo 6, podemos provar que um cilindro parabólico é gerado por retas paralelas ao seu eixo.

Definição 1

Dizemos que uma superfície $\mathcal{S}$ é regrada se, para todo ponto P pertencente a $\mathcal{S}$, existe uma reta que passa por P inteiramente contida em $\mathcal{S}$.

Pelas observações e exemplos anteriores, segue que:

- as quádricas regradas são: o hiperboloide de uma folha, o cone elíptico, o cilindro elíptico, o cilindro hiperbólico, o paraboloide hiperbólico e o cilindro parabólico;
- as quádricas não regradas são: o elipsoide, o hiperboloide de duas folhas e o paraboloide elíptico.

Observação 10

Em um curso de Álgebra Linear, e possível provar que, após uma rotação e/ou uma translação dos eixos coordenados, podemos transformar qualquer equação de segundo grau em $\mathbb{R}^3$ em uma equação de um dos tipos abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R & \text{(Quádrica Cêntrica)} \\ Ax^2 + By^2 = Sz & \text{(Quádrica não Cêntrica)} \end{array}}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $R \geq 0$ e $S \geq 0$.

Analisando o sinal dos coeficientes A, B, C e R na equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R\,,$$

obtemos que:

(I) se $R > 0$ e os coeficientes A, B, C são:

- todos positivos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um elipsoide;
- todos negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;
- dois positivos e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um hiperboloide de uma folha;
- um positivo e dois negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um hiperboloide de duas folhas;
- um zero e dois positivos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cilindro elíptico;

- um zero e dois negativos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;
- um zero, um positivo e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cilindro hiperbólico;
- dois zero e um positivo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é a união de dois planos paralelos;
- dois zero e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é o conjunto vazio;

(II) se $R = 0$ e os coeficientes A, B, C são:

- todos de mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um ponto;
- dois de mesmo sinal e o outro de sinal contrário $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um cone elíptico;
- um zero e os outros dois de mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é uma reta;
- um zero, um positivo e um negativo $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é união de dois planos concorrentes;
- dois zeros e um diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ é um plano;

Analisando agora os sinais dos coeficientes A, B e S na equação:

$$Ax^2 + By^2 = Sz\,,$$

obtemos que:

(I) se $S > 0$ e os coeficientes A e B:

- tiverem o mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será um paraboloide elíptico;
- tiverem sinais opostos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será um paraboloide hiperbólico;
- um for zero e o outro diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será um cilindro parabólico.

(II) se $S = 0$ e os coeficientes A e B:

- tiverem o mesmo sinal $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será uma reta;
- tiverem sinais opostos $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será a união de dois planos concorrentes;
- um for zero e o outro diferente de zero $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$ será um plano.

Dizemos que o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes são *quádricas degene-*

radas.

10. Exemplos

Exemplo 9

Considere as quádricas $\mathcal{Q}$ e os planos π dados abaixo. Determine a seção plana $\mathcal{Q} \cap \pi$. Caso seja uma cônica, determine seus principais elementos.

(a) $\mathcal{Q} : \dfrac{x^2}{4} - y^2 + \dfrac{z^2}{16} = 1 \quad e \quad \pi : y = \sqrt{3}.$

Solução.
A quádrica $\mathcal{Q}$ é um hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$ e a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1 + 3 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{64} = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

é uma elipse de centro $C = (0, \sqrt{3}, 0)$, contida no plano $y = \sqrt{3}$, reta focal $\ell = \{ (0, \sqrt{3}, t) \,;\, t \in \mathbb{R} \}$ paralela ao eixo$-OZ$, reta não focal $\ell' = \{ (t, \sqrt{3}, 0) \,;\, t \in \mathbb{R} \}$ paralela ao eixo$-OX$, vértices $A_1 = (0, \sqrt{3}, -8)$ e $A_2 = (0, \sqrt{3}, 8)$ sobre a reta focal, vértices $B_1 = (-4, \sqrt{3}, 0)$ e $B_2 = (4, \sqrt{3}, 0)$ sobre a reta não focal e focos $F_1 = (0, \sqrt{3}, -2\sqrt{12})$ e $F_2 = (0, \sqrt{3}, 2\sqrt{12})$, pois $c = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 2\sqrt{12}$. □

(b) $\mathcal{Q} : -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4z \quad e \quad \pi : y = 2.$

Solução.
A quádrica $\mathcal{Q}$ é um paraboloide hiperbólico de eixo$-OZ$ e a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{16} + 4 = 4z \\ y = 2 \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} x^2 = -16 \times 4(z - 1) \\ y = 2 \end{cases}$$

é uma parábola de vértice $V = (0, 2, 1)$, contida no plano $y = 2$, reta focal $\ell = \{ (0, 2, t) \,;\, t \in \mathbb{R} \}$ paralela ao eixo$-OZ$, $4p = 16 \times 4 \iff p = 16$, foco $F = (0, 2, 1 - 16) = (0, 2, -15)$ e diretriz $\mathcal{L} = \{ (t, 2, 1 + 16) \,;\, t \in \mathbb{R} \}$ paralela ao eixo$-OX$. $\square$

(c) $\mathcal{Q} : x^2 - \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1 \quad e \quad \pi : y = 2.$

Solução.

A quádrica $\mathcal{Q}$ é um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OX$ e a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} x^2 - z^2 = 1 + \dfrac{4}{4} \\ y = 2 \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} x^2 - z^2 = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

é uma hipérbole equilátera contida no plano $y = 2$, de centro $C = (0, 2, 0)$, reta focal $\ell = \{\,(t, 2, 0)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$ paralela ao eixo$-OX$, reta não focal $\ell' = \{\,(0, 2, t)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$ paralela ao eixo$-OZ$, vértices $A_1 = (-\sqrt{2}, 2, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{2}, 2, 0)$, vértices imaginários $B_1 = (0, 2, -\sqrt{2})$ e $B_2 = (0, 2, \sqrt{2})$, focos $F_1 = (-2, -1, 0)$ e $F_2 = (2, 1, 0)$ e assíntotas $r^+ = \{\,(t, 2, t)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$ e $r^- = \{\,(t, 2, -t)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$, pois $r^+ : \begin{cases} z = x \\ y = 2 \end{cases}$ e $r^- : \begin{cases} z = -x \\ y = 2 \end{cases}$. $\square$

(d) $\mathcal{Q} : \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \quad e \quad \pi : z = 4.$

Solução.

A quádrica $\mathcal{Q}$ é um cilindro hiperbólico de eixo$-OY$ e a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} = 1 + \dfrac{16}{16} \\ z = 4 \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} x^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases} \iff \mathcal{Q} \cap \pi : \begin{cases} x = \pm 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

é o par de retas paralelas ao eixo$-OY$: $r^+ = \{\,(2, t, 4)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$ e $r^- = \{(-2, t, 4)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}$. $\square$

Exemplo 10

Determine e classifique as quádricas cêntricas na forma canônica que contêm o ponto $P_0 = (1, 1, -1)$ e que possuem a seção plana $\gamma : \begin{cases} 4y^2 + 2z^2 = 3 \\ x = 2 \end{cases}$.

Existe, com as propriedades acima, uma quádrica não cêntrica na forma canônica?

Solução.
Seja
$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$
uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $P_0 \in \mathcal{Q}$ e $\gamma \subset \mathcal{Q}$.
Então, como
$$\gamma : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = R - 4A \\ x = 2 \end{cases},$$
existe $\lambda \neq 0$ tal que $B = 4\lambda$, $C = 2\lambda$ e $R - 4A = 3\lambda$.
Ou seja,
$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : Ax^2 + 4\lambda y^2 + 2\lambda z^2 = R \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{Q} : \frac{A}{\lambda}x^2 + 4y^2 + 2z^2 = \frac{R}{\lambda} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{Q} : A'x^2 + 4y^2 + 2z^2 = R', \end{aligned}$$
onde
$$R' - 4A' = 3\,. \tag{4}$$
Além disso, como $P_0 = (1, 1, -1) \in \mathcal{Q}$, temos que
$$A' + 4 + 2 = R' \Longleftrightarrow R' = A' + 6\,.$$
Logo, por (4),
$$A' + 6 - 4A' = 3 \Longrightarrow A' = 1 \quad \text{e} \quad R' = 7.$$
Assim, a quádrica
$$\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 7$$
é um elipsoide na forma canônica com $a = \sqrt{7}$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $c = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Suponhamos que existe uma quádrica não cêntrica $\widetilde{\mathcal{Q}}$ na forma canônica tal que $P_0 \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ e $\gamma \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$.
Então, $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é da seguinte forma:
$$\widetilde{\mathcal{Q}} : By^2 + Cz^2 = Ax\,,$$
pois a seção plana $\widetilde{\mathcal{Q}} \cap \{x = 2\}$ deve ser uma elipse.
Como
$$\gamma : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = 2A \\ x = 2\,, \end{cases}$$
existe $\lambda \neq 0$ tal que $B = 4\lambda$, $C = 2\lambda$ e $2A = 3\lambda$.

Ou seja,

$$\widetilde{\mathcal{Q}} : 4\lambda y^2 + 2\lambda z^2 = \frac{3\lambda}{2}\,x \quad\Longleftrightarrow\quad \widetilde{\mathcal{Q}} : 4y^2 + 2z^2 = \frac{3}{2}\,x\,.$$

Mas, como o ponto $P_0 = (1, 1, -1)$ não pertence a $\widetilde{\mathcal{Q}}$, pois $4 + 2 \neq \frac{3}{2}$, não existe uma quádrica não cêntrica na forma canônica com as propriedades acima. □

Exemplo 11

Determine e classifique as quádricas $\mathcal{Q}$ na forma canônica que possuem como seções planas as curvas:

$$\gamma : \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} 4z^2 - 3y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Solução.

Como a seção plana $\alpha = \mathcal{Q} \cap \{z = 1\}$ é uma elipse e a seção plana $\beta = \mathcal{Q} \cap \{x = 1\}$ é uma hipérbole, a quádrica $\mathcal{Q}$ tem que ser cêntrica.

Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}$ e $\beta \subset \mathcal{Q}$.

Então, como

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = R - C \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} By^2 + Cz^2 = R - A \\ x = 1 \end{cases},$$

existem $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ tais que

$$A = 2\lambda,\ B = 3\lambda,\ R - C = 5\lambda,\ B = -3\mu,\ C = 4\mu \quad \text{e} \quad R - A = \mu.$$

Logo, sendo $3\lambda = -3\mu$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mu = -1$ e $\lambda = 1$.

Assim, $A = 2$, $B = 3$, $C = -4$, $R = C + 5\lambda = -4 + 5 = 1 = 2 - 1 = A + \mu$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$$

é um hiperboloide de uma folha de eixo$-OZ$. □

Exemplo 12

Classifique, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação de segundo grau:

$$(\lambda^3 - \lambda)x^2 + \lambda^2 y^2 + (\lambda + 1)z^2 = \lambda^2 + 1\,. \tag{5}$$

Solução.
Abaixo, analisamos a variação do sinal dos coeficientes da equação (5):

	$-\infty < \lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < \infty$
$\lambda^3 - \lambda$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
λ^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\lambda^2 + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Então, a equação representa:

- um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-\infty, -1)$;
- dois planos paralelos, $y = \pm\sqrt{2}$, se $\lambda = -1$;
- um elipsoide se $\lambda \in (-1, 0)$;
- dois planos paralelos, $z = \pm 1$, se $\lambda = 0$;
- um hiperboloide de uma folha de eixo$-OX$ se $\lambda \in (0, 1)$;
- o cilindro elíptico $y^2 + 2z^2 = 2$ de eixo$-OX$ se $\lambda = 1$;
- um elipsoide se $\lambda \in (1, +\infty)$. $\square$

Exemplo 13

Determine e classifique as quádricas na forma canônica que possuem como seções planas as curvas:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 = 2\left(y + \dfrac{1}{4}\right) \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \beta : \begin{cases} x^2 = 2(y+1) \\ z = 2 \end{cases}.$$

Solução.
Como as seções planas são parábolas de retas focais paralelas ao eixo$-OY$, a quádrica tem que ser não cêntrica de eixo$-OY$:

$$Ax^2 + Cz^2 = Sy\,.$$

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 = Sy - C \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} Ax^2 = Sy - 4C \\ z = 2 \end{cases},$$

existem $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$ tais que

$$A = \lambda,\ S = 2\lambda,\ -C = \frac{\lambda}{2},\ A = \mu,\ S = 2\mu \quad \text{e} \quad -4C = 2\mu.$$

Assim, $\lambda = \mu \neq 0$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda = \mu = 1$.
Logo, como

$$A = \lambda = \mu = 1\,, \quad C = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{2\mu}{4} \quad \text{e} \quad S = 2\lambda = 2\mu = 2\,,$$

a quádrica é o paraboloide hiperbólico de eixo$-OY$:

$$x^2 - \frac{z^2}{2} = 2y\,.$$

□

Exemplo 14

(a) *Determine e classifique as quádricas na forma canônica que possuem a curva γ como seção plana e passam pelo ponto $P_0 = (1, 3, 1)$, onde*

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

(b) *Ache as curvas de interseção das quádricas obtidas acima e faça um esboço das superfícies, indicando as curvas de interseção.*

Solução.
(a) Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}$ e $P_0 \in \mathcal{Q}$.
Então, como

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + Cz^2 = R - B \\ y = 1 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = \lambda$, $C = 5\lambda$ e $R - B = 2\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : \lambda x^2 + By^2 + 5\lambda z^2 = B + 2\lambda.$$

Além disso, como $P_0 = (1, 3, 1) \in \mathcal{Q}$, obtemos:

$$\lambda + 9B + 5\lambda = B + 2\lambda \Longleftrightarrow 8B = -4\lambda \Longleftrightarrow B = -\frac{\lambda}{2}\,.$$

Logo,

$$\mathcal{Q} : \lambda x^2 - \frac{\lambda}{2}y^2 + 5\lambda z^2 = -\frac{\lambda}{2} + 2\lambda = \frac{3\lambda}{2} \iff \mathcal{Q} : x^2 - \frac{y^2}{2} + 5z^2 = \frac{3}{2}$$

é um hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$, com $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

Agora, seja

$$\mathcal{Q}' : Ax^2 + Cz^2 = Sy$$

uma quádrica não cêntrica de eixo$-OY$ (por quê?) tal que $\gamma \subset \mathcal{Q}'$ e $P_0 \in \mathcal{Q}'$. Então, sendo

$$\gamma : \begin{cases} Ax^2 + Cz^2 = S \\ y = 1 \end{cases},$$

existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = \lambda$, $C = 5\lambda$, $S = 2\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q}' : \lambda x^2 + 5\lambda z^2 = 2\lambda y \iff \mathcal{Q}' : x^2 + 5z^2 = 2y\,,$$

é um paraboloide elíptico de eixo$-OY$.

Além disso, como $P_0 = (1, 3, 1) \in \mathcal{Q}'$, pois $1 + 5 \times 1 = 6 = 2 \times 3$, $\mathcal{Q}'$ é uma quádrica tal que $\gamma \subset Q'$ e $P_0 \in \mathcal{Q}'$.

(b) Um ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ se, e só se,

$$\begin{cases} x^2 + 5z^2 = \frac{3}{2} + \frac{y^2}{2} \\ x^2 + 5z^2 = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2y \\ \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2} = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2y \\ y^2 - 4y + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Como as raízes da equação $y^2 - 4y + 3 = 0$ são $y = 1$ e $y = 3$, obtemos que

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \gamma \cup \beta\,,$$

onde γ e β são as elipses:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} x^2 + 5z^2 = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Veja, na figura abaixo, o esboço de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$, com as curvas γ e β.

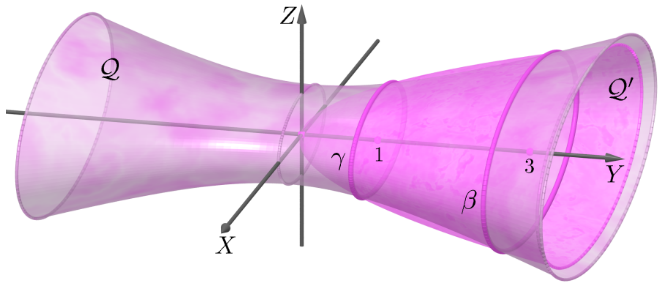

Figura 42: Superfícies $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$

□

Exemplo 15

Classifique, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a quádrica dada pela equação de segundo grau:

$$\mathcal{Q} : (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + (\lambda^2 - 1)y^2 + (\lambda + 2)z^2 = \lambda\,.$$

Solução.

Começamos efetuando o estudo do sinal dos coeficientes:

	$\lambda<-2$	$\lambda=-2$	$-2<\lambda<-1$	$\lambda=-1$	$-1<\lambda<0$	$\lambda=0$	$0<\lambda<1$	$\lambda=1$	$\lambda>1$
$\lambda^3+\lambda^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$
λ^2-1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\lambda+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
λ	$-$	$-$	$-$	$-$	-	0	$+$	$+$	$+$

Portanto, a equação representa:

- um hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-\infty, -2)$;
- o cilindro hiperbólico $-4x^2 + 3y^2 = -2$ de eixo$-OZ$ se $\lambda = -2$;
- um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OX$ se $\lambda \in (-2, -1)$;
- o conjunto vazio $(z^2 = -1)$ se $\lambda = -1$;
- um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OY$ se $\lambda \in (-1, 0)$;
- dois planos paralelos, $y = \pm\sqrt{2}\,z$, se $\lambda = 0$;
- um hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$ se $\lambda \in (0, 1)$;
- o cilindro elíptico $2x^2 + 3z^2 = 1$ de eixo$-OY$ se $\lambda = 1$;
- um elipsoide se $\lambda \in (1, +\infty)$. □

Exemplo 16

Determine as quádricas $\mathcal{Q}$ na forma canônica, de forma que todas as seções planas $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, sejam hipérboles equiláteras com reta focal paralela ao eixo$-OY$ e que possuam o círculo

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

como seção plana.

Solução.

Como todas as seções planas, contidas em planos paralelos ao plano YZ, são hipérboles com retas focais paralelas a um mesmo eixo (no caso, o eixo$-OY$), a quádrica só pode ser um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OY$ ou um cilindro hiperbólico de eixo$-OX$.
Por outro lado, como o círculo

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

é também uma seção plana da superfície, ela só pode ser um hiperboloide de duas folhas de eixo$-OY$:

$$\mathcal{Q} : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Sendo

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{2}{b^2} - 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases},$$

obtemos que $a^2 = c^2$ e $a^2\left(\dfrac{2}{b^2} - 1\right) = 1$.

Além disso, como as seções planas,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

são hipérboles equiláteras, vemos que $b^2 = c^2$.
Logo, $a^2 = b^2 = c^2$ e

$$a^2\left(\frac{2}{a^2} - 1\right) = 1 \iff 2 - a^2 = 1 \iff a^2 = 1\,.$$

Ou seja,

$$\mathcal{Q} : y^2 - x^2 - z^2 = 1\,.$$

□

Exemplo 17

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole, no plano $z = 1$, de centro no ponto $C = (0,0,1)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, sendo $F = \left(0, \sqrt{5}, 1\right)$ um dos seus focos e a reta $r : 2y - x = 0$ uma das suas assíntotas.

(a) *Determine as quádricas $\mathcal{Q}$ na forma canônica tais que $\mathcal{H} \subset \mathcal{Q}$ e $(0,0,0) \in \mathcal{Q}$.*

(b) *Ache as curvas de interseção das quádricas obtidas acima.*

(c) *Faça um esboço das quádricas indicando as curvas de interseção.*

Solução.

(a) Temos $c = d(C,F) = \sqrt{5}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $r : x = 2y$ é uma assíntota de $\mathcal{H}$, que possui reta focal paralela ao eixo$-OY$.
Como $5 = c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 4a^2$, vemos que $a = 1$ e $b = 2$.
Assim, a hipérbole é dada por:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Seja

$$\mathcal{Q} : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

uma quádrica cêntrica na forma canônica tal que $\mathcal{H} \subset Q$ e $(0,0,0) \in \mathcal{Q}$.
Então, $R = 0$ e

$$\mathcal{H} = \mathcal{Q} \cap \{z = 1\} : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = -C \\ z = 1 \end{cases}.$$

Portanto, existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = -\dfrac{\lambda}{4}$, $B = \lambda$ e $C = -\lambda$, ou seja,

$$\mathcal{Q} : -\frac{\lambda}{4}x^2 + \lambda y^2 - \lambda z^2 = 0\,.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\lambda = 1$, obtemos:

$$\mathcal{Q} : -\frac{1}{4}x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{Q} : \frac{1}{4}x^2 + z^2 = y^2\,,$$

que é um cone elíptico de eixo$-OY$.
Seja agora

$$\mathcal{Q}' : Ax^2 + By^2 = Sz$$

uma quádrica não cêntrica na forma canônica de eixo$-OZ$.
Logo, $(0,0,0) \in \mathcal{Q}'$ e

$$\mathcal{H} : \mathcal{Q}' \cap \{z = 1\} : \begin{cases} Ax^2 + By^2 = S \\ z = 1 \end{cases}.$$

Existe, assim, $\lambda \neq 0$ tal que $A = -\frac{\lambda}{4}$, $B = \lambda$ e $S = \lambda$.

Supondo $\lambda = 1$, obtemos que

$$\mathcal{Q}' : -\frac{x^2}{4} + y^2 = z$$

é um paraboloide elíptico de eixo$-OZ$.

(b) Um ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ se, e só se,

$$\begin{cases} -\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ -\frac{x^2}{4} + y^2 = z \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z^2 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ou seja, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \gamma \cup \beta$, onde

$$\gamma = \mathcal{H} : \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta : \begin{cases} x = \pm 2y \\ z = 0 \end{cases}.$$

(c) O esboço de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ são mostrados na figura 43.

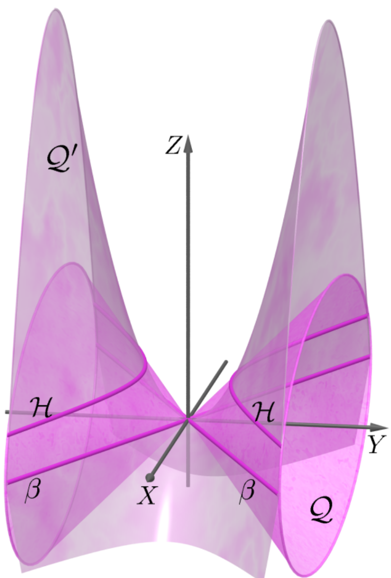

Figura 43: Interseção $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}' = \mathcal{H} \cup \beta$

□

Observação 11

Uma quádrica, dada por uma equação do segundo grau *sem termo misto*,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

pode, por meio de uma translação dos eixos coordenados, ser reduzida à sua forma canônica quando:

- pelo menos dois dos coeficientes A, B e C são não nulos;
- $A \neq 0$, $B = C = 0$, $H = 0$ ou $I = 0$;
- $B \neq 0$, $A = C = 0$, $G = 0$ ou $I = 0$;
- $C \neq 0$, $A = B = 0$, $G = 0$ ou $H = 0$.

Mas, quando:

- $A \neq 0$, $B = C = 0$, $H \neq 0$ e $I \neq 0$;
- $B \neq 0$, $A = C = 0$, $G \neq 0$ e $I \neq 0$;
- $C \neq 0$, $A = B = 0$, $G \neq 0$ e $H \neq 0$,

precisamos fazer primeiro uma rotação e depois uma translação dos eixos coordenados para reduzir a quádrica à sua forma canônica. Nestes casos, a quádrica é sempre um cilindro parabólico.

Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 18

Classifique as quádricas transladadas abaixo:

(a) $S : 4x^2 + y^2 + 3z^2 - 8x + 2y + 6z = -7\,;$

(b) $S : x^2 - y^2 - z^2 + 8x - 2y + 6z = -5\,.$

Solução.

(a) Completando os quadrados, obtemos que:

$$\begin{aligned} & S : 4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + 3(z^2 + 2z) = -7 \\ \Longleftrightarrow\quad & S : 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + 3(z+1)^2 = -7 + 4 + 1 + 3 = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & S : \frac{(x-1)^2}{1/4} + (y+1)^2 + \frac{(z+1)^2}{1/3} = 1\,. \end{aligned}$$

Sejam $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ o sistema de eixos ortogonais no qual $\overline{O} = C = (1, -1, -1)$ e os semieixos positivos $\overline{O}\,\overline{X}$, $\overline{O}\,\overline{Y}$ e $\overline{O}\,\overline{Z}$ têm, respectivamente, a mesma direção e o mesmo sentido dos semieixos positivos OX, OY e OZ.
Então, como

$$(x, y, z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (1, -1, -1)\,,$$

temos que

$$\frac{\overline{x}^2}{1/4} + \overline{y}^2 + \frac{\overline{z}^2}{1/3} = 1$$

é a equação da quádrica nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Logo, a quádrica é um elipsoide de centro $C = (1, -1, -1)$ com $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ e $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(b) Completando os quadrados, temos que:

$$\begin{aligned} & S : (x^2 + 8x) - (y^2 + 2y) - (z^2 - 6z) = -5 \\ \iff \quad & S : (x + 4)^2 - (y + 1)^2 - (z - 3)^2 = -5 + 16 - 1 - 9 = 1\,. \end{aligned}$$

Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ uma translação do sistema de eixos $OXYZ$ no qual $\overline{O} = C = (-4, -1, 3)$.
Como

$$(x, y, z) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) + (-4, -1, 3)\,,$$

obtemos que

$$S : \overline{x}^2 - \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = 1$$

é a equação da quádrica nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.
Logo, S é um hiperboloide de duas folhas de eixo

$$r = \{\, (-4, -1, 3) + t(1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

paralelo ao eixo$-OX$ com $a = b = c = 1$. $\square$