

Capítulo 7

Coordenadas e distância no espaço

1. Coordenadas no Espaço

Seja $\mathcal{E}$ o espaço da Geometria Euclidiana tridimensional.

Um **sistema de eixos ortogonais** $OXYZ$ em $\mathcal{E}$ consiste de três eixos ortogonais entre si, OX , OY e OZ , com a mesma origem O (figura 1).

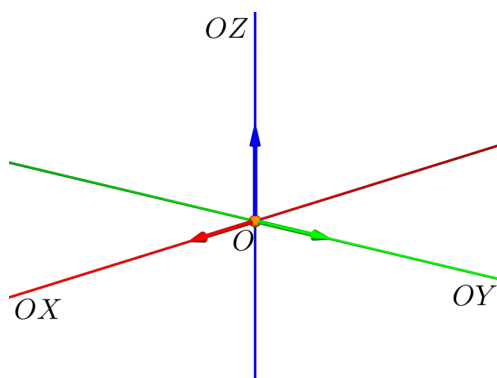


Figura 1: Sistema de eixos ortogonais no espaço.

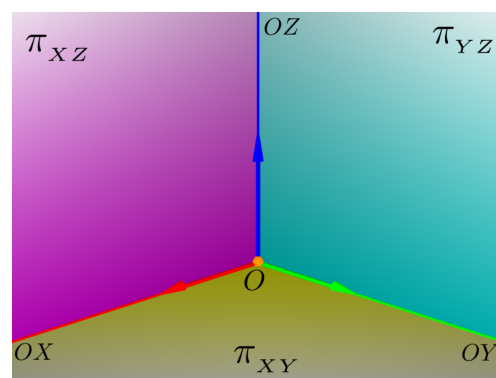


Figura 2: Planos cartesianos no espaço.

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, os **planos cartesianos** são (figura 2):

- π_{XY} , o plano que contém os eixos OX e OY ,

- π_{XZ} , o plano que contém os eixos OX e OZ ,
- π_{YZ} , o plano que contém os eixos OY e OZ .

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$ permite estabelecer uma correspondência entre pontos $P \in \mathcal{E}$ e ternos ordenados de números reais (x, y, z) , de modo que a cada ponto corresponde exatamente um terno ordenado de números reais, e a cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente um ponto de $\mathcal{E}$.

Assim, se P está em correspondência com o terno (x, y, z) , dizemos que x , y e z são as **coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$** . Estas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

- **coordenada x** : coordenada no eixo OX associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{YZ} .
- **coordenada y** : coordenada no eixo OY associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XZ} .
- **coordenada z** : coordenada no eixo OZ associada ao ponto de interseção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XY} .

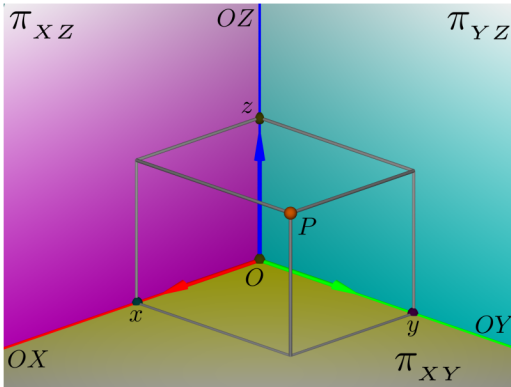


Figura 3: Coordenadas do ponto P no espaço.

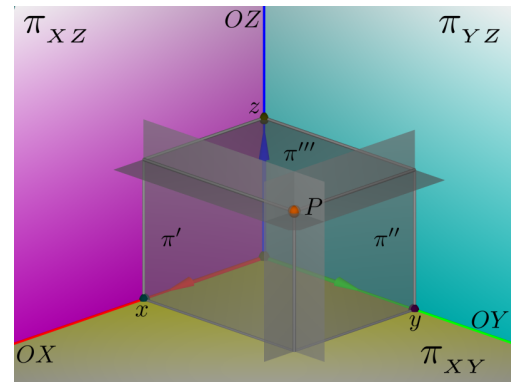


Figura 4: Determinando as coordenadas do ponto P .

Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço $\mathcal{E}$, todo ponto $P \in \mathcal{E}$ é identificado pelas suas coordenadas (x, y, z) em relação a este sistema de eixos e escrevemos:

$$P = (x, y, z)$$

Com esta identificação, observamos que:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0, 0, 0)$.
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$\begin{aligned}\text{eixo-}OX &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo-}OY &= \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ \text{eixo-}OZ &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\begin{aligned}\pi_{XY} &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, & \text{ou seja, } \pi_{XY} : z = 0 \\ \pi_{XZ} &= \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}, & \text{ou seja, } \pi_{XZ} : y = 0 \\ \pi_{YZ} &= \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}, & \text{ou seja, } \pi_{YZ} : x = 0\end{aligned}$$

Um **sistema de coordenadas cartesianas** no espaço $\mathcal{E}$ permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos. Por exemplo, vejamos como caracterizar outros planos com equações que envolvem as coordenadas dos pontos neles contidos.

Definição 1

- Um plano π é chamado **horizontal** quando coincide ou é paralelo ao plano π_{XY} .

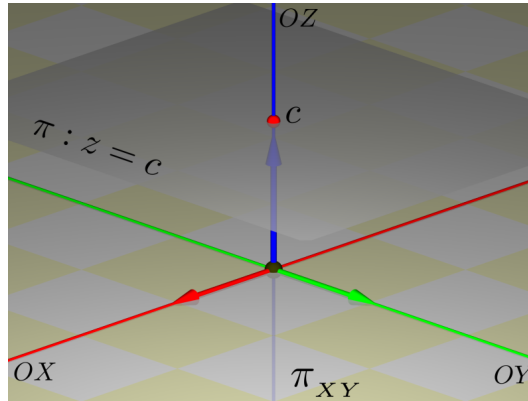


Figura 5: Plano π horizontal, paralelo ao plano π_{XY} .

Se $c \in \mathbb{R}$ é a terceira coordenada do único ponto onde π intersecta o eixo- OZ , então qualquer ponto $P \in \pi$ terá a sua terceira coordenada igual a c , ou seja,

$$\pi = \{P \in \mathcal{E} \mid P = (x, y, c)\}$$

Assim, descrevemos o plano π pela equação:

$$\pi : z = c$$

- Analogamente, os planos paralelos aos planos π_{XZ} e π_{YZ} são dados, respectivamente, por equações da forma $y = b$ e $x = a$, com $b \neq 0$ e $a \neq 0$.

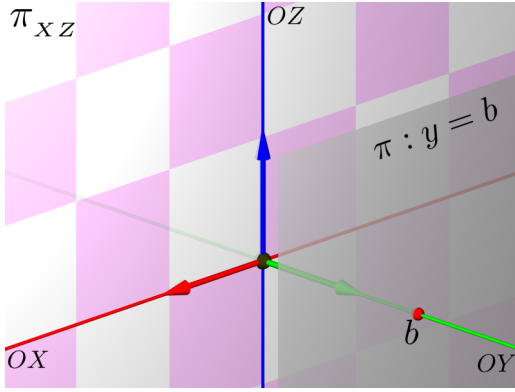


Figura 6: O plano $\pi : y = b$, $b \neq 0$, é paralelo ao plano π_{XZ} .

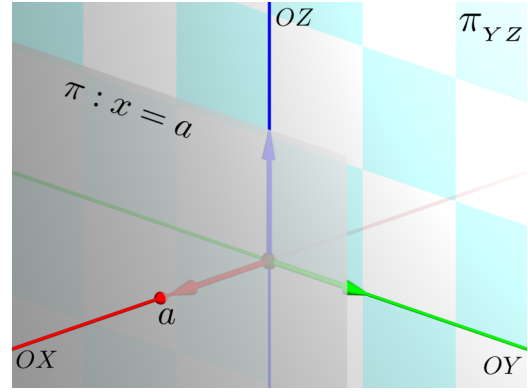


Figura 7: O plano $\pi : x = a$, $a \neq 0$, é paralelo ao plano π_{YZ} .

Observação 1

Uma reta r no espaço, que é paralela a um dos eixos coordenados, intersecta o plano cartesiano complementar em apenas um ponto. As coordenadas deste ponto determinam as coordenadas de todos os pontos da reta r .

Por exemplo, sejam r_1 uma reta paralela ao eixo OZ e $r_1 \cap \pi_{XY} = \{Q_1\}$. Se $Q_1 = (a, b, 0)$, então qualquer outro ponto

$Q = (x, y, z) \in r_1$ satisfaz: $x = a$, $y = b$ e $z \in \mathbb{R}$ (veja a figura 8).

Portanto, $\{r_1 = (a, b, z); z \in \mathbb{R}\}$ e as equações da reta são $r_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$

De modo análogo:

- Se $r_2 \parallel$ eixo OY e $r_2 \cap \pi_{XZ} = \{Q_2 = (a, 0, c)\}$, então $r_2 = \{(a, y, c); y \in \mathbb{R}\}$

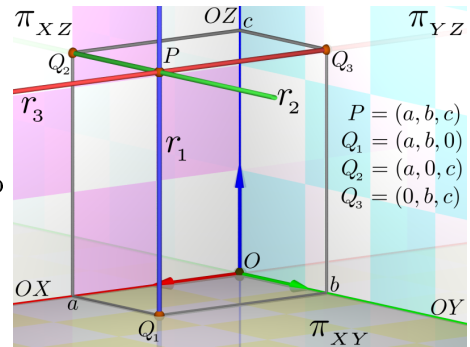


Figura 8: Retas r_1 , r_2 e r_3 paralelas aos eixos coordenados.

e as equações da reta são: $r_2 : \begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$.

• Se $r_3 \parallel$ eixo OX e $r_3 \cap \pi_{YZ} = \{Q_3 = (0, b, c)\}$, então $r_3 = \{(x, b, c) ; x \in \mathbb{R}\}$,

e as equações da reta são $r_3 : \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$.

A definição de plano vertical é a seguinte:

Definição 2

Um plano π é chamado **vertical** quando contém ou é paralelo ao eixo- OZ .

Isto é, π é um plano vertical se, e somente se,

$$\text{eixo-}OZ \subset \pi \quad \text{ou} \quad \text{eixo-}OZ \cap \pi = \emptyset.$$

Por exemplo, os planos $\pi : x = a$, $a \in \mathbb{R}$, assim como os planos $\pi : y = b$, $b \in \mathbb{R}$, são planos verticais.

Um plano vertical π intersecta o plano π_{XY} ao longo de uma reta r . A reta r , vista exclusivamente no plano $\pi_{XY} : z = 0$, possui uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$, onde $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Mas, no espaço, a reta $r = \pi \cap \pi_{XY}$ é dada por duas equações:

$$r : \begin{cases} \alpha x + \beta y = d \\ z = 0. \end{cases}$$

Ou seja, um ponto pertence à reta r se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem, simultaneamente, às duas equações acima.

Por outro lado, como a direção do eixo- OZ é paralela ao plano π , π é formado pela união de todas as retas paralelas ao eixo- OZ que passam por um ponto de r .

Portanto, pela Observação 1,

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y = d \text{ e } z \in \mathbb{R}\}.$$

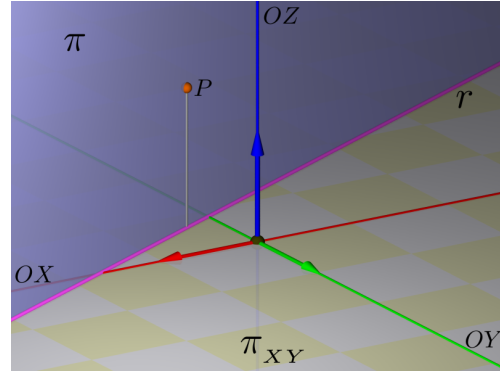


Figura 9: Plano π paralelo ao eixo- OZ e $r = \pi \cap \pi_{XY}$.

Dizemos então que a equação do plano π é dada por:

$$\pi : \alpha x + \beta y = d$$

Observação 2

Não confunda! No espaço, uma equação da forma $\alpha x + \beta y = d$ representa um plano vertical, ao passo que, no plano de coordenadas XY , esta equação representa uma reta.

Procedendo de forma análoga com os outros dois eixos, temos que:

$$\begin{aligned} \text{eixo} - OX \parallel \pi \text{ ou } \text{eixo} - OX \subset \pi &\iff \pi : \beta y + \gamma z = d, \text{ onde } \beta^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \text{eixo} - OY \parallel \pi \text{ ou } \text{eixo} - OY \subset \pi &\iff \pi : \alpha x + \gamma z = d, \text{ onde } \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \\ \text{eixo} - OZ \parallel \pi \text{ ou } \text{eixo} - OZ \subset \pi &\iff \pi : \alpha x + \beta y = d, \text{ onde } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \end{aligned}$$

2. Distância entre dois pontos do espaço

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos no espaço $\mathcal{E}$.

Começamos observando que se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então eles têm duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que P e Q não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da **distância** de P a Q são considerados os pontos auxiliares (figura 10):

$$R = (a, b, c'), \quad S = (a, b, 0), \quad T = (a', b', 0) \quad \text{e} \quad U = (a', b, 0).$$

Pela observação feita anteriormente,

$$d(S, U) = |a' - a| \quad \text{e} \quad d(U, T) = |b' - b|.$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle SUT$, obtemos:

$$d(S, T)^2 = d(S, U)^2 + d(U, T)^2 = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

Os segmentos ST e RQ são lados opostos de um retângulo. Logo,

$$d(R, Q)^2 = d(S, T)^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

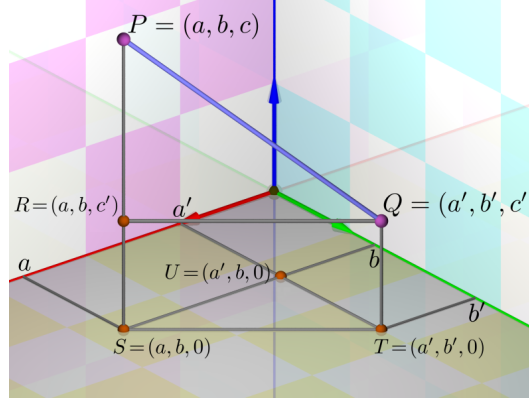


Figura 10: Os triângulos $\triangle PRQ$ e $\triangle SUT$ são retângulos e o quadrilátero $RSTQ$ é um retângulo.

Além disso, $d(P, R) = |c' - c|$, pois os pontos P e R estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo OZ .

Finalmente, como o triângulo $\triangle PRQ$ é retângulo,

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, Q)^2 = |c' - c|^2 + (a' - a)^2 + (b' - b)^2,$$

ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}$$

Definição 3

A esfera $\mathcal{S}$ de centro C e raio r é o conjunto que consiste dos pontos $P \in \mathcal{E}$ cuja distância ao centro C é igual a r :

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{E} \mid d(P, C) = r\}.$$

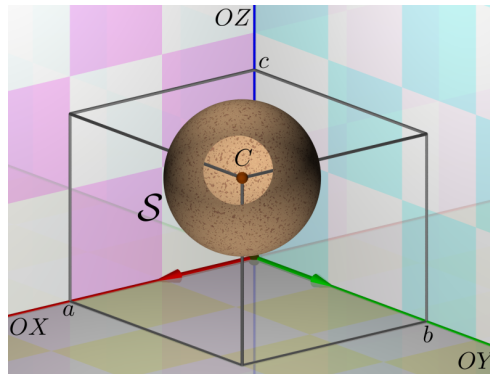


Figura 11: Esfera $\mathcal{S}$ de centro $C = (a, b, c)$ e raio r .

Sejam $C = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ as expressões do centro C e de um ponto genérico P de $\mathcal{S}$ em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$.

$$\text{Então, } P \in \mathcal{S} \iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a equação da esfera $\mathcal{S}$ no sistema de eixos $OXYZ$:

$$\mathcal{S} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Exemplo 1

Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau

$$z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1,$$

representa uma esfera $\mathcal{S}$. Determine o centro e o raio de $\mathcal{S}$.

Solução.

Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned} & z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6z = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 1 \\ \iff & (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 1 + 1 + 4 + 9 \\ \iff & (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 15. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{S}$ é a esfera de centro $C = (1, -2, 3)$ e raio $r = \sqrt{15}$. $\square$

Exemplo 2

Ponto médio de um segmento no espaço. Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$.

Solução.

Na figura 12 mostramos um segmento AB genérico e o seu ponto médio $M = (m_a, m_b, m_c)$. Por hipótese, $d(A, M) = d(M, B)$, ou seja, $|AM| = |MB|$. Pelo critério *ALA* de congruência de triângulos, temos $\triangle ACM \simeq \triangle MDB$. Em particular, $|CM| = |DB|$. Logo, $|FG| = |CM| = |DB| = |GH|$.

Com esta escolha, as coordenadas dos pontos A e B são da forma: $A = (r, 0, 0)$ e $B = (-r, 0, 0)$, para algum número real $r > 0$.

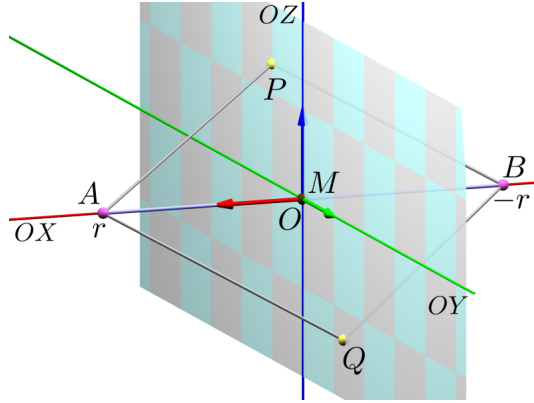


Figura 13: Pontos equidistantes de dois pontos dados.

Assim:

$$\begin{aligned}
 & P = (x, y, z) \in \mathcal{M} \\
 \iff & d(A, P) = d(B, P) \iff d(A, P)^2 = d(B, P)^2 \\
 \iff & (x - r)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (x - (-r))^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 \\
 \iff & x^2 - 2xr + r^2 = x^2 + 2xr + r^2 \iff -2xr = 2xr \iff 4xr = 0 \\
 \iff & x = 0 \text{ (pois } r \neq 0) \iff P = (0, y, z) \in \pi_{YZ}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{M} = \pi_{YZ}$. Portanto, geometricamente, o conjunto $\mathcal{M}$ é o plano perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio deste segmento.

□

Capítulo 8

Vetores

1. Vetores no espaço

Vamos agora abordar a noção de vetores no espaço. A definição é a mesma dada no plano, assim como as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

Para definir a relação de equipolência no espaço, começamos observando que duas retas são paralelas quando estão contidas no mesmo plano e não se intersectam.

De fato, há situações em que duas retas no espaço não se intersectam, mas não são paralelas. Pense, por exemplo, em duas ruas, sendo uma delas um viaduto que passa por cima da outra transversalmente!

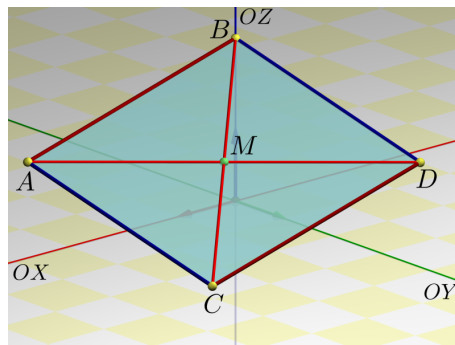


Figura 1: Paralelogramo $ABDC$ no espaço, $AB \equiv CD$.

Definição 1

Os segmentos orientados AB e CD no espaço são **equipolentes**, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes condições:

- AB e CD têm igual comprimento: $|AB| = d(A, B) = d(C, D) = |CD|$.
- AB e CD estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta.
- AB e CD têm o mesmo sentido.

Se AB e CD satisfazem às duas primeiras propriedades, a terceira significa, no caso em que A, B, C e D não são colineares, que $ABDC$ é um paralelogramo no plano que contém os pontos A, B, C e D .

Da mesma forma feita no plano, podemos mostrar que:

$$AB \equiv CD \iff \text{o ponto médio de } AD \text{ coincide com o ponto médio de } BC$$

A relação de equipolência entre segmentos é uma **relação de equivalência**, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:

- 1. Reflexividade:** Todo segmento é equipolente a si próprio: $AB \equiv AB$.
- 2. Simetria:** Se $AB \equiv CD$, então $CD \equiv AB$.
- 3. Transitividade:** Se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF$, então $AB \equiv EF$.

Estas propriedades podem ser verificadas usando a Proposição 1 abaixo.

Por causa disso, podemos dividir o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados do espaço em subconjuntos especiais chamados **classes de equivalência pela relação de equipolência**, ou simplesmente, **classes de equipolência**. Cada classe de equipolência é denominada um **vetor** do espaço.

Usamos a mesma notação adotada para vetores no plano para designar o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento AB :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \mid AB \equiv CD\}$$

Note que,

$$AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

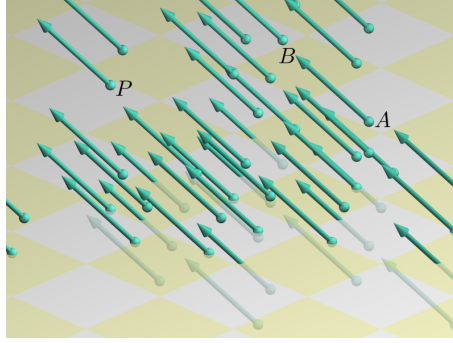


Figura 2: Ponto P é origem de um representante de $\vec{v}$.

Como no plano, o vetor representado por um segmento cuja origem é igual à extremidade é chamado **vetor nulo** ou **vetor zero**:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$$

Além disso, todo ponto P do espaço é origem de um segmento orientado representante de um vetor dado $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ qualquer (figura 2).

Ou seja, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \mathcal{E}$, existe um único ponto $Q \in \mathcal{E}$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Para verificar esta propriedade, quando A , B e P não são colineares, basta considerar o plano que contém os pontos A , B e P . Neste plano, o problema de determinar o ponto Q já foi resolvido quando estudamos vetores no plano.

Notação: Dado um ponto P no espaço e um vetor $\vec{v}$, designamos o único ponto do espaço tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ como:

$$Q = P + \vec{v}$$

Proposição 1

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais e sejam $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$, $C = (x, y, z)$ e $D = (x', y', z')$ pontos do espaço.

Então os segmentos AB e CD são equipolentes se, e somente se,

$$a' - a = x' - x, \quad b' - b = y' - y \quad \text{e} \quad c' - c = z' - z.$$

Prova.

Temos que $AB \equiv CD$ se, e somente se, o ponto médio AD coincide com o ponto médio BC , ou seja, se, e só se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+x'}{2}, \frac{b+y'}{2}, \frac{c+z'}{2} \right) = \left(\frac{a'+x}{2}, \frac{b'+y}{2}, \frac{c'+z}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{a+x'}{2} = \frac{a'+x}{2}, \quad \frac{b+y'}{2} = \frac{b'+y}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c+z'}{2} = \frac{c'+z}{2} \\ \Leftrightarrow & a+x' = a'+x, \quad b+y' = b'+y \quad \text{e} \quad c+z' = c'+z \\ \Leftrightarrow & a'-a = x'-x, \quad b'-b = y'-y \quad \text{e} \quad c'-c = z'-z. \end{aligned}$$

generalizando, assim, o resultado já conhecido no plano. ■

Definição 2

Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$ pontos no espaço. Os números reais $a' - a, b' - b$ e $c' - c$ são **as coordenadas** do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos $OXYZ$. Em coordenadas, o vetor é representado por:

$$\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c).$$

Observação 1

• Pela proposição anterior, as coordenadas de um vetor podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado representante do vetor.

• Em particular, dado um vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, o ponto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaz

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}.$$

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é o **representante na origem** do vetor $\vec{v}$.

Exemplo 1

Considere os pontos $A = (1, 4, 0)$, $B = (-1, 1, -1)$ e $C = (3, 5, -10)$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, do ponto D e do ponto P tais que $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$.

Solução.

Temos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - 1, 1 - 4, -1 - 0) = (-2, -3, -1)$.

Seja $D = (x, y, z)$ o ponto procurado.

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB \equiv CD$, temos, pela proposição anterior, que:

$$-1 - 1 = x - 3, \quad 1 - 4 = y - 5 \quad -1 - 0 = z - (-10).$$

Ou seja, $x = 1$, $y = 2$ e $z = -11$. Assim, $D = (1, 2, -11)$.

E pela observação acima, $P = (-2, -3, -1)$ é o ponto tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. $\square$

2. Operações com vetores no espaço

Vamos definir agora as operações de adição de vetores no espaço e multiplicação de um vetor espacial por um número real. O processo é análogo ao efetuado para definir estas operações para vetores no plano e as propriedades são basicamente as mesmas, por isso muitos detalhes serão omitidos.

Definição 3

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço $\mathcal{E}$. Seja $A \in \mathcal{E}$ um ponto qualquer e sejam AB e BC segmentos orientados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente.

O **vetor soma** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que designamos por $\vec{u} + \vec{v}$, é, por definição, o vetor representado pelo segmento orientado AC .

Note que a definição da soma de dois vetores recai na situação já estudada no plano, pois os pontos A , B e C estão contidos num mesmo plano π .

De forma análoga ao que foi feito para vetores no plano, podemos verificar que a definição do vetor soma não depende da escolha do ponto $A \in \mathcal{E}$. Isto é, o vetor soma está bem definido.

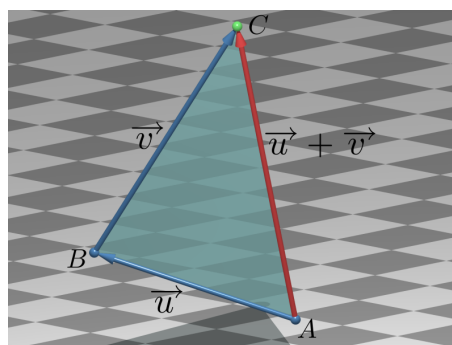


Figura 3: Soma de vetores no espaço.

Na prática, a adição de vetores se efetua em relação às coordenadas dos vetores parcelas num sistema de eixos ortogonais escolhido.

Assim, fixemos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, e, com respeito a este sistema, sejam $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (a', b', c')$.

Então o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ é dado em termos de coordenadas como:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

A demonstração deste fato se faz de modo análogo ao feito para vetores no plano.

Exemplo 2

Sejam $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (4, 3, 2)$ pontos do espaço.

Determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Solução.

Temos,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2), \\ \overrightarrow{AC} &= (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2).\end{aligned}$$

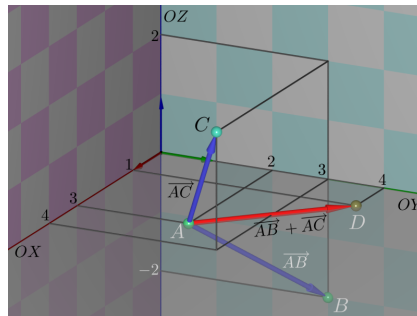


Figura 4: Exemplo 2.

Logo,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) \\ &= (-2, 2, 0).\end{aligned}$$

Além disso, se $D = (d_1, d_2, d_3)$ é a extremidade do representante AD do vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A , então: $d_1 - 3 = -2$, $d_2 - 2 = 2$ e $d_3 - 0 = 0$. Portanto, $D = (1, 4, 0)$. $\square$

Propriedades da adição de vetores no espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades da operação de adição de vetores no plano, que são herdadas das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço.

1. Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

2. Existência de elemento neutro: O vetor **zero**, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$, representado por qualquer segmento nulo, é o único vetor tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ qualquer que seja o vetor $\vec{u}$. Em termos de coordenadas, temos $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

3. Existência de inverso aditivo: Dado um vetor $\vec{u}$, **existe um único** vetor, que é designado $-\vec{u}$ e chamado **inverso aditivo** (ou simétrico) de $\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Note que se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

4. Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

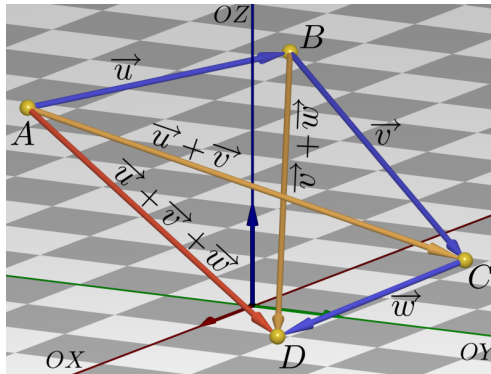


Figura 5: Associatividade da adição de vetores.

Definição 4

A **subtração** do vetor $\vec{v}$ pelo vetor $\vec{u}$ é a soma de $\vec{v}$ com o inverso aditivo $-\vec{u}$ do vetor $\vec{u}$. O vetor $\vec{v} + (-\vec{u})$ se escreve, abreviadamente, como $\vec{v} - \vec{u}$.

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então:

$$\vec{v} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Observação 2

Já sabemos que se A, B, C são pontos não colineares do plano, então o ponto D faz do quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo se, e somente se, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Observação 3

Se A, B, C e D são pontos não coplanares no espaço, então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE}, \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AF}, \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG}, \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AH},\end{aligned}$$

se, e somente se, A, B, C, D, E, F, G e H são os vértices de um paralelepípedo no espaço (veja a figura 3).

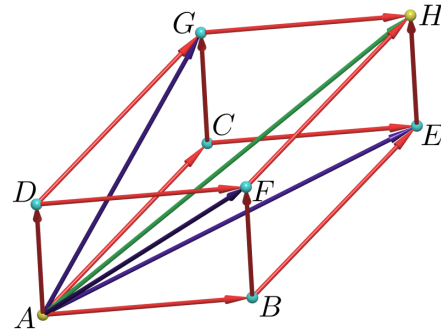


Figura 6: Paralelepípedo.

- A operação de **multiplicação** de um número real por um vetor no espaço é definida da mesma forma que no plano.

Definição 5

Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** é o vetor $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, tal que:

- A, B e B' são colineares,
- $|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|$,
- os segmentos AB e AB' têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Observação 4

Note que se $\lambda = 0$, então $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$, isto é, $B' = A$ e,

portanto, $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. Analogamente, $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Na prática, a multiplicação de um escalar por um vetor se efetua em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais da mesma forma feita no plano. Ou seja, se $\vec{u} = (a, b, c)$ é um vetor do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

Exemplo 3

Sejam $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 3, 3)$. Determinemos as extremidades D , D' e D'' dos representantes $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD'}$ e $\overrightarrow{CD''}$ dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1, 0)$.

Solução.

Em termos de coordenadas, $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 3 - 2, 3 - 1) = (1, 1, 2)$. Logo,

$$-\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot 1, -2 \cdot 2) = (-2, -2, -4),$$

$$2\overrightarrow{AB} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 2, 4).$$

Como $C = (1, 1, 0)$, as coordenadas dos pontos $D = (d_1, d_2, d_3)$, $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ e $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$, satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 2 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD'} = -\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -4 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 4 \end{cases}.$$

Portanto,

$$D = (2, 2, 2), D' = (-1, -1, -4) \text{ e } D'' = (3, 3, 4).$$

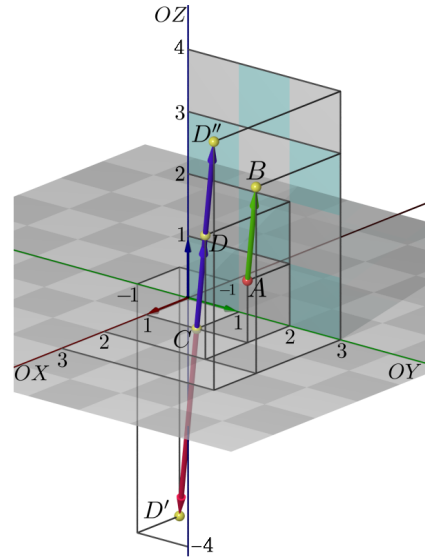


Figura 7: Exemplo 3.

são os pontos procurados. $\square$

Propriedades da multiplicação de um escalar por um vetor

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores do espaço e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. A multiplicação de um escalar por um vetor satisfaz às seguintes propriedades.

1. **Associatividade:** $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$;

2. **Distributividade:**
$$\begin{cases} \lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \end{cases} ;$$

3. **Elemento neutro multiplicativo:** O número $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Observação 5

Estas propriedades são verificadas escrevendo os vetores em um sistema de eixos ortogonais.

Observação 6

Se $\vec{u}$ é um vetor do espaço, então o seu inverso aditivo $-\vec{u}$ é obtido multiplicando $\vec{u}$ por -1 . De fato, $\vec{u} + (-1)\vec{u} = (1 + (-1))\vec{u} = 0\vec{u} = \vec{0}$.

3. Colinearidade e coplanaridade de pontos no espaço

Sabemos que três pontos A , B e C no espaço são colineares se eles pertencem a uma mesma reta.

Vamos analisar a colinearidade de pontos no espaço usando vetores. Para isso, precisamos da seguinte definição.

Definição 6

O vetor $\vec{v}$ é **múltiplo** do vetor $\vec{u}$ quando existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Observação 7

a. Todo vetor é múltiplo de si próprio (neste caso, $\lambda = 1$).

b. O vetor zero $\vec{0}$ é múltiplo de qualquer vetor.

De fato, dado um vetor arbitrário $\vec{u}$, temos $\vec{0} = 0 \vec{u}$.

Em contrapartida, nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor zero.

c. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, então $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} = \frac{1}{\lambda} \vec{v}$.

Assim, se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\vec{v}$ é múltiplo de $\vec{u}$ se, e somente se, $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$.

Proposição 2

Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores do espaço, então um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 z_2 - x_2 z_1 = y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0.$$

Prova.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

($\implies$) Se $\vec{v}$ é múltiplo de $\vec{u}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Logo,

$$\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda \vec{u},$$

ou seja,

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1. \quad (1)$$

Multiplicando a primeira das identidades (1) por y_1 e a segunda por x_1 , obtemos:

$$y_1 x_2 = \lambda x_1 y_1 = x_1 y_2 \implies x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Multiplicando a primeira das identidades (1) por z_1 e a terceira por x_1 , obtemos:

$$x_2 z_1 = \lambda x_1 z_1 = x_1 z_2 \implies x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0.$$

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (1) por z_1 e a terceira por y_1 , obtemos:

$$y_2 z_1 = \lambda y_1 z_1 = y_1 z_2 \implies y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_1z_2 - x_2z_1 = y_1z_2 - y_2z_1 = 0.$$

Se $\vec{u} = \vec{0} = (0, 0, 0)$ então $\vec{u} = 0 \vec{v}$, isto é, $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$.

Podemos então supor que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0) = \vec{0}$.

Assim, necessariamente, alguma das coordenadas de $\vec{u}$ deve ser diferente de zero.

Se $x_1 \neq 0$, tome $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$. Afirmamos que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

De fato, como $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, segue que $y_2 = \frac{x_2}{x_1}y_1$. Também, sendo

$x_1z_2 - x_2z_1 = 0$, temos $z_2 = \frac{x_2}{x_1}z_1$. Logo,

$$\lambda \vec{u} = \frac{x_2}{x_1} (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x_2}{x_1} x_1, \frac{x_2}{x_1} y_1, \frac{x_2}{x_1} z_1 \right) = (x_2, y_2, z_2) = \vec{v}.$$

Os casos $y_1 \neq 0$ e $z_1 \neq 0$ são tratados da mesma maneira. ■

Observação 8

(a) Para mostrar que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são múltiplos, basta verificar que um dos números

$$x_1y_2 - x_2y_1, \quad x_1z_2 - x_2z_1 \quad \text{ou} \quad y_1z_2 - y_2z_1,$$

é diferente de zero.

(b) Os números $x_1y_2 - x_2y_1$, $x_1z_2 - x_2z_1$ e $y_1z_2 - y_2z_1$ são os determinantes 2×2 que podem ser formados com as colunas da matriz 2×3

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

em cujas linhas aparecem as coordenadas dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Definição 7

Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos são **colineares** quando um deles é múltiplo do outro.

Observação 9

Esta definição está bem justificada, pois se $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, então os pontos

A , B e C estão sobre uma mesma reta. E, reciprocamente, se A , B e C são pontos distintos de uma reta, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Para isso, basta tomar $\lambda = \pm \frac{d(A, C)}{d(A, B)}$, onde escolhemos o sinal positivo caso B e C estejam do mesmo lado em relação ao ponto A na reta que os contém, e o sinal negativo caso B e C estejam em lados opostos. Portanto, temos:

Os pontos A , B e C são colineares $\iff$ os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos.

Exemplo 4

Determine se os pontos $A = (-1, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-2, -1, -1)$ são colineares ou não.

Solução.

Como

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2) = (-1, -2, -1),$$

$$\text{e} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2)(-2) - (0)(-1) = -4 \neq 0,$$

os pontos dados não são colineares. $\square$

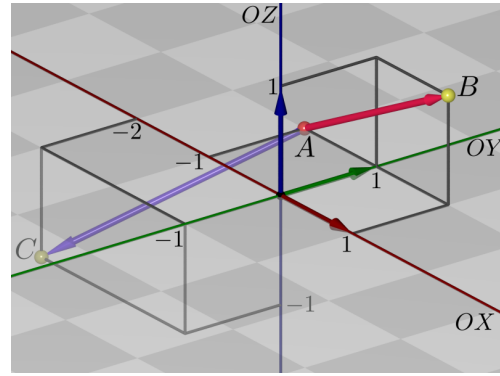


Figura 8: Exemplo 4.

Exemplo 5

Determine se os pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-2, 1, -2)$ são colineares ou não.

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2, y_3) = (-2, 0, -2)$.

A matriz 2×3 que tem por linhas as coordenadas destes vetores é

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e os determinantes 2×2 formados com as colunas desta matriz são:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1(0) - (-2)(0) = 0, \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 1(-2) - 1(-2) = 0, \\ \det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0(-2) - 1(0) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos, ou seja, os pontos A , B e C são colineares. $\square$

Sabemos que três pontos A , B e C não colineares determinam um único plano π no espaço. O teorema abaixo nos permite saber quando um quarto ponto D pertence ou não a este plano.

Definição 8

Um vetor $\vec{v}$ que é soma de múltiplos dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ é chamado uma **combinação linear** de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, ou melhor, $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, se existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

Teorema 1

Sejam A , B e C pontos não colineares no espaço e seja π o plano que eles determinam. A fim de que o ponto D pertença ao plano π é necessário e suficiente que o vetor $\overrightarrow{AD}$ seja **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$D \in \pi \iff \text{existem } x, y \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Prova.

($\implies$) Suponhamos primeiro que $D \in \pi$.

Seja r_1 a reta paralela a $\overrightarrow{AC}$ que passa por D e seja r_2 a reta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que passa por D .

Então r_1 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e B num ponto D_1 .

Analogamente, r_2 está contida no plano π e intersecta a reta que contém os pontos A e C num ponto D_2 .

Como os pontos A , B e D_1 são colineares, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD_1} = x\overrightarrow{AB}$. Também, como A , C e D_2 são colineares, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AD_2} = y\overrightarrow{AC}.$$

Sendo AD_1DD_2 um paralelogramo, temos:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD_2} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

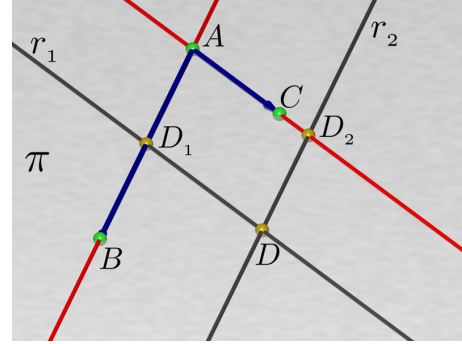


Figura 9: A , B , C e D coplanares.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\overrightarrow{AD}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço tal que a origem O é o ponto A e os eixos OX e OY estejam sobre o plano π . Assim, neste sistema de eixos, $\pi = \pi_{XY}$.

Sendo as terceiras coordenadas de A , B e C iguais a zero e $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, concluímos que a terceira coordenada do ponto D é também igual a zero (figura 3.). Logo, $D \in \pi_{XY} = \pi$.

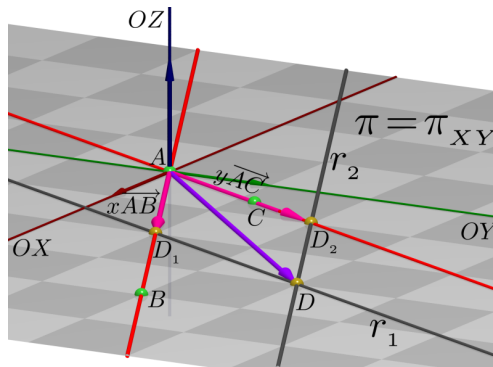


Figura 10: Sistema $OXYZ$ e $D \in \pi_{XY}$.

■

Exemplo 6

Considere os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 6)$, $D = (1, 1, 2)$ e $E = (4, 5, 2)$.

Mostre que:

- (a) A , B e C não são colineares e, portanto, determinam um plano π .
- (b) D não pertence ao plano π .
- (c) E pertence ao plano π .

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 3)$, $\overrightarrow{AD} = (0, -1, -1)$ e $\overrightarrow{AE} = (3, 3, -1)$.

(a) Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, pois $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, concluímos que A , B e C não são colineares, determinando, assim, um plano π .

(b) Segundo o teorema 1, $D \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Isto é,

$$(0, -1, -1) = x(1, 1, 1) + y(2, 2, 3) = (x + 2y, x + 2y, x + 3y).$$

Portanto, os números x e y devem satisfazer as equações:

$$x + 2y = 0, \quad x + 2y = -1, \quad x + 3y = -1,$$

o qual é impossível, pois as duas primeiras implicam que $0 = -1$.

Concluimos, então, a não existência dos números x e y e, portanto, a impossibilidade da relação $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Logo, $D \notin \pi$.

(c) De novo, pelo teorema 1, $E \in \pi$ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Isto é,

$$(3, 3, -1) = x(1, 1, 1) + y(2, 2, 3) = (x + 2y, x + 2y, x + 3y).$$

Logo, x e y devem satisfazer, simultaneamente, as equações:

$$x + 2y = 3, \quad x + 2y = 3, \quad x + 3y = -1.$$

Ou seja, x e y são a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 11$ e $y = -4$. Portanto, $\overrightarrow{AE} = 11\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, e os pontos A , B , C e E são coplanares. $\square$

Provaremos, agora, que quatro pontos não coplanares A , B , C e D determinam o espaço todo, ou melhor, que todo vetor do espaço se expressa de maneira única como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Definição 9

Dizemos que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ são **linearmente independentes (LI)** quando os pontos A , B , C e D não são coplanares, isto é, não pertencem a um mesmo plano.

Se os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ não são linearmente independentes, dizemos que eles são **linearmente dependentes (LD)**. Neste caso, os pontos A , B , C e D são coplanares.

Teorema 2

Sejam $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ três vetores linearmente independentes no espaço. Então, para cada vetor $\vec{w}$ do espaço, existem escalares únicos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$$

Prova.

Sejam A , B , C , D e P pontos do espaço tais que $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$. Como os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são LI, os pontos A , B , C e D não são coplanares.

Designamos π_1 o plano que contém os pontos A , B e C , π_2 o plano determinado pelos pontos A , B e D e π_3 o plano determinado pelos pontos A , C e D (figura 3.).

Sejam agora π'_1 , π'_2 e π'_3 os planos que passam pelo ponto P e são paralelos aos planos π_1 , π_2 e π_3 , respectivamente.

Como a reta que contém os pontos A e D não está contida no plano π_1 , esta reta intersecta o plano π'_1 num único ponto D' . Então,

$$\overrightarrow{AD'} = z \overrightarrow{AD},$$

para algum número $z \in \mathbb{R}$, o qual é determinado de forma única pelo ponto D' e, portanto, pelo ponto P .

Analogamente, a reta que passa por

A e C não está contida no plano π_2 ,

logo intersecta o plano π'_2 , paralelo a π_2 , num único ponto C' , de onde concluimos que $\overrightarrow{AC'} = y \overrightarrow{AC}$, para algum escalar $y \in \mathbb{R}$ determinado de maneira única pelo ponto P .

Finalmente, a reta que passa pelos pontos A e B não está contida no plano π_3 , intersectando, portanto, o plano π'_3 num único ponto B' . Assim, existe um

escalar x , determinado de maneira única pelo ponto P , tal que $\overrightarrow{AB'} = x \overrightarrow{AB}$. Por causa do paralelismo estabelecido entre os planos, os segmentos AB' , AC' e AD' são as arestas de um paralelepípedo no qual os pontos A e P são as extremidades de uma das diagonais. Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC} + z \overrightarrow{AD} = x \overrightarrow{v_1} + y \overrightarrow{v_2} + z \overrightarrow{v_3},$$

como queríamos. ■

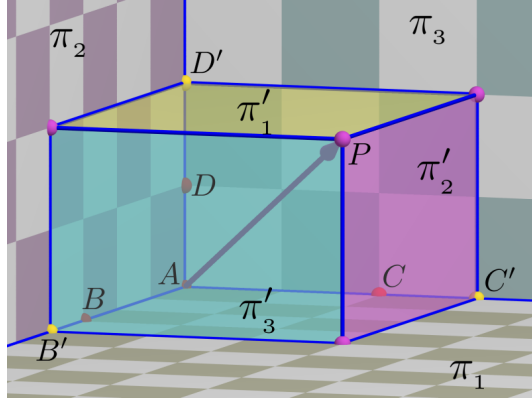


Figura 11: Determinando os pontos B' , C' e D' .

O teorema 2 diz que qualquer vetor do espaço se exprime de maneira única como combinação linear de três vetores LI dados. Dizemos então que o espaço **tem dimensão três**.

Exemplo 7

Considere os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 0, 1)$ e $D = (1, 0, -1)$.

- (a) Verifique que O , A , B e C são pontos coplanares.
- (b) Verifique que O , A , B e D são pontos não coplanares.

(c) Escreva o vetor $\vec{w} = (2, 6, 5)$ como combinação linear dos vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OD}$.

Solução.

(a) Observe, primeiro, que os pontos O , A e B não são colineares.

De fato, os vetores $\vec{OA} = (1, 1, 1)$ e $\vec{OB} = (3, 1, 2)$ não são múltiplos um do outro, pois a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ possui uma submatriz 2×2 , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, com determinante diferente de zero.

Para verificar que o ponto C pertence ao plano π determinado pelos pontos O , A e B , devemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB},$$

ou seja:

$$(2, 0, 1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(3, 1, 2) = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Logo, α e β devem ser solução das equações:

$$\alpha + 3\beta = 2 \quad (2)$$

$$\alpha + \beta = 0 \quad (3)$$

$$\alpha + 2\beta = 1 \quad (4)$$

Da equação (3), obtemos que $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (2), obtemos $-\beta + 3\beta = 2$, ou seja, $\beta = 1$; portanto, $\alpha = -1$. A equação (4) também é satisfeita por $\alpha = -1$ e $\beta = 1$.

Assim, $\vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ e, pelo teorema 1, C pertence ao plano π .

(b) Sabemos que o ponto $D = (1, 0, -1)$ pertence ao plano π que contém O , A e B se, e somente se, existem escalares α e β tais que:

$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}.$$

Isto é, em termos de coordenadas,

$$\alpha + 3\beta = 1 \quad (5)$$

$$\alpha + \beta = 0 \quad (6)$$

$$\alpha + 2\beta = -1 \quad (7)$$

Da equação (6), obtemos $\alpha = -\beta$. Substituindo na equação (5), obtemos $\beta = \frac{1}{2}$.

Porém, substituindo $\alpha = -\beta$ na equação (7), obtemos $\beta = -1$.

Logo, como β não pode assumir dois valores ao mesmo tempo, concluímos que não existem escalares α e β que resolvam as três equações simultaneamente. Portanto, $D \notin \pi$.

(c) Sabemos, do item (b), que os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são LI. Logo, pelo teorema 2, todo vetor do espaço se escreve, de forma única, como combinação linear destes vetores.

Logo, para $\overrightarrow{w} = (2, 6, 5)$, existem números reais únicos, x , y e z , tais que:

$$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OD}.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}(2, 6, 5) &= x(1, 1, 1) + y(3, 1, 2) + z(1, 0, -1) \\ &= (x + 3y + z, x + y, x + 2y - z).\end{aligned}$$

Desta identidade, obtemos que:

$$x + 3y + z = 2 \quad (8)$$

$$x + y = 6 \quad (9)$$

$$x + 2y - z = 5 \quad (10)$$

Pela equação (9), $x = 6 - y$. Substituindo nas equações (8) e (10), temos:

$$\begin{cases} 6 - y + 3y + z = 2 \\ 6 - y + 2y - z = 5, \end{cases}$$

ou seja, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2y + z = -4 \\ y - z = -1. \end{cases}$$

Somando estas duas equações, obtemos $3y = -5$, isto é, $y = -\frac{5}{3}$.

Logo,

$$z = y + 1 = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad x = 6 - y = 6 + \frac{5}{3} = \frac{23}{3}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w} = \frac{23}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

é a expressão de $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$. $\square$

Capítulo 9

Produto Interno e Vetorial

1. Produto interno de dois vetores no espaço

As noções de norma e produto interno de vetores no espaço são completamente análogas às correspondentes noções já estudadas para vetores no plano. No entanto, por motivos de completeza, vamos rever estes conceitos considerando vetores no espaço, omitindo, porém, a maioria dos detalhes.

Definição 1

A **norma** ou **comprimento** de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número real não negativo

$$\|\vec{v}\| = d(A, B)$$

Como foi visto no plano, este número não depende do segmento AB escolhido para representar o vetor $\vec{v}$.

Em particular, tomando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e representando o vetor $\vec{v}$ pelo segmento OP , as coordenadas de $\vec{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto P em relação ao sistema $OXYZ$. Assim, se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma)$, então $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ e

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Definição 2

- Um vetor $\vec{v}$ de norma igual a 1 é chamado **unitário**.
- O **ângulo** $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ não nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC . Então, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$. Quando os vetores são colineares, isto é, A , B e C são colineares, então $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ se B e C estão do mesmo lado em relação a A na reta que os contém, e $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ se B e C estão em lados opostos em relação a A .

Lembremos agora a definição de produto interno entre dois vetores:

Definição 3

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores no espaço. O **produto interno** entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ definido da seguinte maneira:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Desta definição, é fácil verificar que

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$$

para qualquer vetor $\vec{u}$ no espaço. Este número é sempre não negativo e é igual a zero se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.

Por um cálculo análogo ao efetuado para o produto interno no plano, obtemos a seguinte proposição que caracteriza o produto interno em termos das coordenadas dos vetores.

Proposição 1

Sejam $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ vetores no espaço expressos em termos de suas coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,

$$\langle \vec{u}', \vec{v}' \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

Usando esta caracterização do produto interno, fica fácil provar as seguintes propriedades:

Proposição 2

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- (1) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- (2) $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
- (3) $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
- (4) $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
- (5) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

A noção de perpendicularidade entre dois vetores no espaço é a mesma que no plano.

Definição 4

O vetor $\vec{u}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}$, e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, quando o ângulo entre eles é reto ou quando um dos vetores é igual a zero.

Da definição do produto interno, obtemos a seguinte caracterização de perpendicularidade:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Exemplo 1

Determine os valores de x e y de modo que o vetor $\vec{u} = (x, y, 1)$ tenha norma igual a $\sqrt{3}$ e seja perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1, 3, 4)$.

Solução.

Temos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e só se,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (x, y, 1), (1, 3, 4) \rangle = x + 3y + 4 = 0 \iff x = -3y - 4. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + 1 = 3 \iff x^2 + y^2 = 2. \quad (2)$$

Por (1), $x = -3y - 4$. Substituindo na equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned} (-3y - 4)^2 + y^2 = 2 &\iff 10y^2 + 24y + 14 = 0 \\ &\iff y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 560}}{20} \\ &\iff y = -\frac{28}{20} = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = \frac{-24 + 4}{20} = -1. \end{aligned}$$

O problema possui então duas soluções:

- $y_1 = -\frac{7}{5} \implies x_1 = \frac{21}{5} - 4 = \frac{1}{5} \implies \vec{u}_1 = (\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, 1);$
- $y_2 = -1 \implies x_2 = 3 - 4 = -1 \implies \vec{u}_2 = (-1, -1, 1).$

□

2. Produto vetorial de dois vetores no espaço

O produto interno de dois vetores, como vimos, é um número real e tem sentido tanto no plano quanto no espaço.

Já o produto vetorial de dois vetores, que definiremos abaixo, só faz sentido no espaço e dá como resultado um outro vetor.

O produto vetorial, como o produto interno, também pode ser definido geometricamente, estabelecendo sua **norma**, sua **direção** e seu **sentido**, mas será definido algebricamente para facilitar a dedução de suas principais propriedades.

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, dados por suas coordenadas.

Definição 5

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Um dispositivo prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o “determinante simbólico” da matriz 3×3 cujos elementos da primeira linha são os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor $\vec{u}$ e os elementos da terceira são as coordenadas do vetor $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

onde $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido dos semieixos positivos OX, OY e OZ , respectivamente.

Proposição 3

(Propriedades do Produto Vetorial.) *Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(1) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, isto é, $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)x_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1)y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z_1 \\ &= x_1 y_1 z_2 - x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos mostrar que $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$.

(2) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e só se, um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo do outro.

Em particular, $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ e $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ para todo vetor $\vec{u}$.

De fato, pela proposição 2 do capítulo 8, sabemos que um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo do outro se, e só se,

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, se, e só se,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0).$$

$$(3) \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta, \text{ onde } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= y_1^2 z_2^2 - 2y_1 y_2 z_1 z_2 + y_2^2 z_1^2 + x_1^2 z_2^2 - 2x_1 x_2 z_1 z_2 + x_2^2 z_1^2 + x_1^2 y_2^2 \\ &\quad - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= x_1^2 (y_2^2 + z_2^2) + y_1^2 (x_2^2 + z_2^2) + z_1^2 (x_2^2 + z_2^2) - 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ &\quad - 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) \\ &= x_1^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + y_1^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + z_1^2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ &\quad - x_1^2 x_2^2 - y_1^2 y_2^2 - z_1^2 z_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \\ &\quad + 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + z_1^2 z_2^2) \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - ((x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + \\ &\quad 2z_1 z_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + z_1^2 z_2^2) \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2. \end{aligned}$$

Mas, como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, segue que:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$.

(4) Se $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, então $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ são LI.

Sejam O, A, B e C pontos tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{OC}$. Como $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, temos, pela propriedade (2), que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são múltiplos, ou seja, os pontos O, A e B não são colineares.

Seja π o único plano que passa pelos pontos O, A e B . Suponhamos, por absurdo, que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ não são LI.

Então o ponto C pertence ao plano π . Pelo teorema 1 do capítulo 8,

existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Logo, pela proposição 2,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u} \times \vec{v}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle + \mu \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma contradição, pois, por hipótese, $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ ($\iff \|\vec{u} \times \vec{v}\| \neq 0$).

$$(5) \quad \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= -(y_2 z_1 - y_1 z_2, -(x_2 z_1 - x_1 y_2), x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &= -(\vec{v} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

$$(6) \quad (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v}).$$

De fato, como $\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, temos:

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} &= ((\lambda y_1) z_2 - y_2 (\lambda z_1), -((\lambda x_1) z_2 - x_2 (\lambda z_1)), (\lambda x_1) y_2 - x_2 (\lambda y_1)) \\ &= \lambda (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \lambda (\vec{u} \times \vec{v}). \end{aligned}$$

A outra identidade, $\vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \times \vec{v})$, prova-se de maneira análoga.

$$(7) \quad (\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v} \text{ e } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

Com efeito, sendo $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\vec{u} + \vec{w} = (x_1 + x_3, y_1 + y_3, z_1 + z_3)$, temos:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} &= ((y_1 + y_3) z_2 - y_2 (z_1 + z_3), -((x_1 + x_3) z_2 - x_2 (z_1 + z_3)), \\ &\quad (x_1 + x_3) y_2 - x_2 (y_1 + y_3)) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1 + y_3 z_2 - y_2 z_3, -(x_1 y_2 - x_2 z_1 + x_3 z_2 - x_2 z_3), \\ &\quad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 y_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &\quad + (y_3 z_2 - y_2 z_3, -(x_3 z_2 - x_2 z_3), x_3 y_2 - x_2 y_3) \\ &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}. \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos verificar que $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

(8) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

é a matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, na ordem em que são listados.

De fato, temos que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\ &= x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_3(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Por outro lado, o determinante da matriz (3), quando desenvolvido pela regra de Sarrus, nós dá

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1 \\ &= x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_3(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

(9) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores LD.

Suponhamos que $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Então ocorre uma das seguintes alternativas:

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$,
- $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$.

Sejam A, B e C pontos do plano tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

Se a primeira alternativa ocorre, então, pela propriedade (2), os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos, ou seja, os pontos O, A e B são colineares. Logo, os pontos O, A, B e C são coplanares ($\iff \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD).

Suponhamos agora que $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$.

Como $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, os pontos O, A e B não são colineares. Seja π o único plano que contém estes pontos.

Pela propriedade (4), os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ são LI.

Logo, pelo teorema 2 do capítulo 8, existem $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \delta(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \delta(\vec{u} \times \vec{v}) \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle + \mu \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle + \delta \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle \\ &= \delta \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

pois, pela propriedade (1), $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$.

Como $\delta \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = 0$ e $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \neq 0$, segue que $\delta = 0$, ou seja,

$$\vec{w} = \vec{OC} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}.$$

Portanto, pelo teorema 1 do capítulo 8, o ponto C pertence ao plano π , ou seja, os pontos O, A, B e C são coplanares ($\iff \vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}$ e $\vec{w} = \vec{OC}$ são vetores LD).

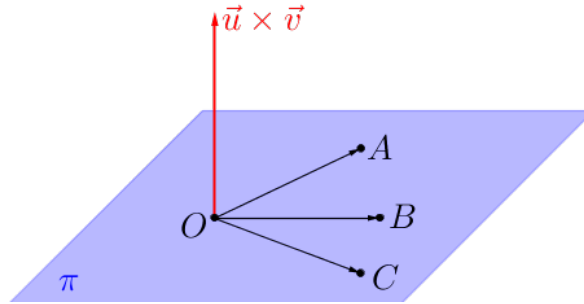


Figura 1: Propriedade (9).

Reciprocamente, suponhamos que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos, então $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, pois, pela propriedade (2), $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são múltiplos, pela observação 9 do capítulo 8, os pontos O, A e B não são colineares.

Seja π o plano que passa por O, A e B . Como $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ não são LI, o ponto C pertence ao plano π .

Pelo teorema 1 do capítulo 8, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Portanto, pela proposição 2,

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle + \mu \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0.$$

(10) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$ se, e somente se, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores LI.

Segue diretamente da propriedade (9).

2.1 Interpretação geométrica da norma do produto vetorial

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ vetores não colineares. Seja C tal que o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo, que designamos $\mathcal{P}$.

A altura de $\mathcal{P}$, considerando o segmento OA como base, é

$$h = |\overrightarrow{OB}| \sin \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

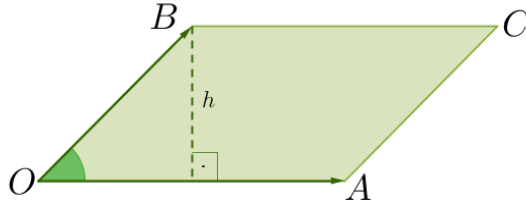


Figura 2: Paralelogramo $OACB$ de altura h .

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{P}) &= \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\| \sin \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \end{aligned}$$

Isto é, a norma do produto vetorial de $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ por $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ é a

área do paralelogramo que tem por lados adjacentes os segmentos OA e OB .

Note que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, ou $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então o paralelogramo $\mathcal{P}$ fica reduzido a um segmento ou a um ponto (paralelogramo degenerado) e tem, portanto, área zero. Como, nestes casos, pela propriedade (2), $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$, a interpretação geométrica continua válida.

Observação 1

Pela propriedade (2), $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e só se, um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é múltiplo do outro.

Caso contrário, pela propriedade (1), $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor não nulo perpendicular ao plano gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Isto nos dá a **direção** do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$. E, pela propriedade (3), $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor de **comprimento** igual a $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$, ou seja, igual a área do paralelogramo construído sobre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como existem apenas dois vetores de mesma direção e mesma norma, ele e seu inverso aditivo, o vetor fica determinando se escolhermos o seu sentido.

O sentido escolhido, na definição, para o produto vetorial é tal que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}) = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 > 0.$$

Mas este sentido depende do sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ escolhido. Portanto, o produto vetorial, como definido acima, fica determinado geometricamente a menos de seu sentido.

É possível dar uma definição geométrica para o produto vetorial, isto é, podemos escolher geometricamente o sentido do produto vetorial. Vejamos:

Definição 6

Seja $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ um terno ordenado de vetores LI. Dizemos que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é um terno positivamente orientado se ele satisfaz a regra da mão direita, ou seja, ao esticarmos os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção e sentido do vetor $\vec{u}_1$ e depois fecharmos a mão na direção e sentido do vetor $\vec{u}_2$, o polegar esticado apontará na direção e sentido do vetor $\vec{u}_3$.

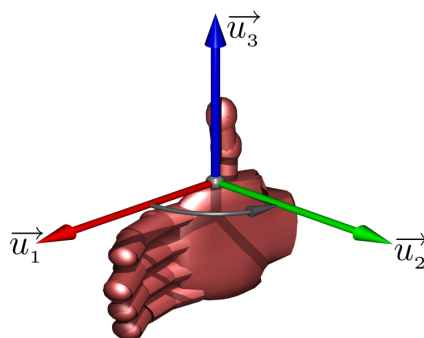


Figura 3: Regra da mão direita.

Dada esta definição, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ ficaria determinado geometricamente se estabelecêssemos, em sua definição, que o terno ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positivo.

Teríamos então de provar que esta definição geométrica coincide com a definição dada em coordenadas, desde que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ fosse também um terno positivo. Mas isso não será feito, por ser muito trabalhoso e pelo fato de o sentido do produto vetorial não importar nas aplicações que faremos no texto.

Exemplo 2

Determinar o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

Solução.

Temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3.$$

Logo, $\vec{u} \times \vec{v} = (5, 5, -5)$. $\square$

Exemplo 3

Sejam $P_0 = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, 1)$ e $Q = (2, -1, 0)$. Calcule a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ que tem como arestas adjacentes os segmentos P_0P e P_0Q .

Solução.

Sendo $\overrightarrow{P_0P} = (0, 4, -1)$ e $\overrightarrow{P_0Q} = (1, 0, -2)$, temos:

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} = (-8, -1, -4).$$

Portanto, Área ($\mathcal{P}$) = $\|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}\| = \|(-8, -1, -4)\| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9$.

□

Exemplo 4

Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais os vetores $\overrightarrow{u} = (2, 0, t)$ e $\overrightarrow{v} = (t, 0, 2)$ sejam colineares.

Solução.

Sabemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são colineares se, e somente se, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ t & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{e_3} \\ &= 0 \overrightarrow{e_1} - (4 - t^2) \overrightarrow{e_2} + 0 \overrightarrow{e_3} \\ &= (t^2 - 4) \overrightarrow{e_2}. \end{aligned}$$

Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (0, t^2 - 4, 0) = (0, 0, 0) = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $t^2 - 4 = 0$, ou seja, se, e somente se, $t = 2$ ou $t = -2$. □

Observação 2

Já provamos que o produto vetorial não é comutativo(propriedade (6)). É importante também observar que **o produto vetorial não é associativo**, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5

Sejam $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (1, 0, 0)$. Mostre que

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

Solução.

Como,

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\
 &= 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (4, 1, -2), \\
 \Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\
 &= -2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (0, -2, -1)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\
 &= 2\vec{e}_2 = (0, 2, 0), \\
 \Rightarrow \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\
 &= -6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 = (-6, 0, 2),
 \end{aligned}$$

obtemos que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$. $\square$

Definição 7

O **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do espaço é o número real

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Observação 3

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nada mais é, pela propriedade (8), que o determinante da matriz 3×3 que tem como linhas as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, na ordem em que são listados. Isto é,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

2.2 Interpretação geométrica do produto misto

Sejam O , A , B e C pontos não coplanares e consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem como arestas adjacentes os segmentos OA , OB e OC .

Considerando o paralelogramo $\mathcal{T}$ de lados adjacentes OA e OB como base de $\mathcal{P}$, temos:

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{Área}(\mathcal{T}) \cdot \text{altura}(\mathcal{P}).$$

Sendo $\text{Área}(\mathcal{T}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ e $\text{altura}(\mathcal{P}) = \|\vec{w}\| |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|$, temos:

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|.$$

Ou seja, **o volume de $\mathcal{P}$ é o módulo do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:**

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle|$$

ou, em termos dos vértices O , A , B e C :

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle|$$

Por outro lado, **se os pontos O ,**

A , B e C são coplanares, isto é, se os vetores

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB} \text{ e } \vec{w} = \overrightarrow{OC}$$

não são LI, o paralelepípedo fica reduzido a um paralelogramo, a um segmento ou a um ponto, tendo, portanto, **volume zero**. Este fato concorda com a propriedade (9) do produto vetorial:

$$\text{Se } \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ não são LI, então } \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0.$$

As propriedades abaixo do produto misto, ou do determinante, são consequências imediatas das propriedades do produto interno e do produto vetorial.

Proposição 4

(Propriedades do Produto Misto.) Sejam $\vec{u}$, $\vec{u}_0$, $\vec{v}$, $\vec{v}_0$, $\vec{w}$ e $\vec{w}_0$ vetores no espaço e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

- (1) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são LI (ou seja, são LD).
- (2) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$ se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são LI.

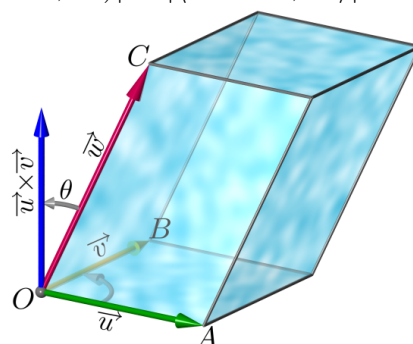


Figura 4: Interpretação geométrica do produto misto.

(3) O sinal do produto misto muda quando permutamos dois fatores. Isto é,

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] . \\ &= -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \end{aligned}$$

(4) $[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

(5) $[\vec{u} + \vec{u}_0, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_0, \vec{v}, \vec{w}]$.

$$[\vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_0, \vec{w}] .$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{w}_0] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_0] .$$

Exemplo 6

Verifique se os pontos $A = (2, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$ são coplanares.

Solução.

Consideremos os vetores

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, 1).$$

Sabemos que os pontos A , B , C e D são coplanares se, e somente se,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0.$$

Calculando, temos:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 1, 1).$$

Logo,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (0, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle = 2 \neq 0.$$

Portanto, os pontos A , B , C e D não são coplanares. $\square$

Exemplo 7

Mostre que $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$ são vetores LI, e calcule o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Solução.

Sabemos que o terno de vetores é LI se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Sendo,

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 + 4 + 1 = 3 \neq 0, \end{aligned}$$

os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI.

Além disso, o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$, cujas arestas são $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é:

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |3| = 3.$$

□

Exemplo 8

Determine, caso existam, os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais os vetores $\vec{u} = (t, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, t, 2)$ e $\vec{w} = (3, t, 1)$ são coplanares.

Solução.

Sabemos que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. Então:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} \\ &= 3(-2 - t) - t(2t - 1) + 1(t^2 + 1) \\ &= -t^2 - 2t - 5. \end{aligned}$$

Logo, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se, e somente se, $t^2 + 2t + 5 = 0$.

Como o discriminante desta última equação é $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, a equação não tem raízes reais, isto é, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI para todos os valores reais de t . □

Exemplo 9

Considere os pontos $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 2, 0)$, $Q = (3, 1, 1)$ e $R = (1, -1, 1)$ e os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OR}$.

(a) Determine a altura relativa à base de lados OP e OQ do paralelepípedo $\mathcal{P}$ que tem por vértices O , P , Q e R .

(b) Calcule a área do triângulo $\mathcal{T}$ de vértices P , Q e R .

(c) Calcule o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$.

(d) Calcule a área externa do tetraedro σ cujos vértices são O , P , Q e R .

Solução.

(a) A altura h do paralelepípedo $\mathcal{P}$, tomando como base o paralelogramo de lados adjacentes OP e OQ , é:

$$h = \|\vec{w}\| |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = \|\vec{w}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

onde

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (2, -1, -5),$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30},$$

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (2, -1, -5), (1, -1, 1) \rangle = 2 + 1 - 5 = -2.$$

$$\text{Assim, } h = \frac{|-2|}{\sqrt{30}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{15}.$$

(b) O triângulo $\mathcal{T}$ tem por arestas adjacentes os segmentos PQ e PR . Logo, a sua área é

$$\text{Área}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|.$$

Como $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{PR} = (0, -3, 1)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (2, -2, 6) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{T}) &= \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{44}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

(c) Pelo item (a),

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |-2| = 2.$$

(d) A área externa do tetraedro σ de vértices O , P , Q e R é a soma das

áreas dos triângulos $\triangle OPQ$, $\triangle OPR$, $\triangle OQR$ e $\triangle PQR = \mathcal{T}$, a última das quais calculamos no item (b).

Calculemos as áreas dos outros três triângulos:

$$\text{Área}(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} \sqrt{30};$$

$$\text{Área}(\triangle OPR) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{w}\|;$$

$$\text{Área}(\triangle OQR) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\| = \frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\|.$$

Como

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{u} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (2, -1, -3), \\ \bullet \quad \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (2, -2, -4), \end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle OPR) &= \frac{\|\vec{u} \times \vec{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2}; \\ \text{Área}(\triangle OQR) &= \frac{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a área do tetraedro σ é:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\sigma) &= \text{Área}(\triangle OPQ) + \text{Área}(\triangle OPR) + \text{Área}(\triangle OQR) + \text{Área}(\triangle PQR) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{30} + \frac{1}{2} \sqrt{14} + \frac{1}{2} \sqrt{24} + \frac{1}{2} \sqrt{44} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{30} + \sqrt{14} + \sqrt{24} + \sqrt{44}). \end{aligned}$$

□

Capítulo 10

Equação da reta e do plano no espaço

1. Equações paramétricas da reta no espaço

Sejam A e B dois pontos distintos no espaço e seja r a reta que os contém. Então,

$$P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB}$$

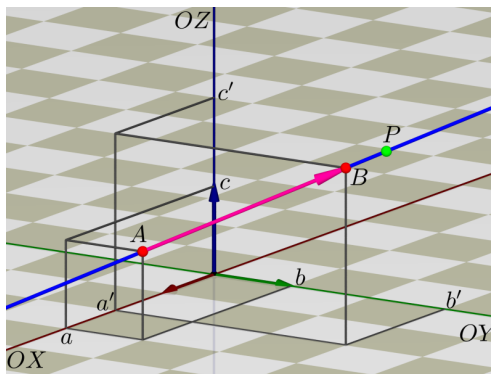


Figura 1: Reta r passando por A e B .

O ponto P pode ser visto como sendo a translação do ponto A pelo vetor $\overrightarrow{AP}$, isto é, $P = A + \overrightarrow{AP}$. Portanto,

$$P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = A + t \overrightarrow{AB}.$$

Assim, a reta r é caracterizada pela equação

$$r : P = A + t \overrightarrow{AB}; \quad t \in \mathbb{R}$$

chamada **equação paramétrica** da reta r com **parâmetro** t .

Equação paramétrica da reta em coordenadas

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e considere os pontos A e B em coordenadas: $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$.

Escrevendo o ponto P em coordenadas, temos que:

$$\begin{aligned} P &= (x, y, z) \in r \\ \iff (x, y, z) &= (a, b, c) + t(a' - a, b' - b, c' - c), \quad t \in \mathbb{R} \\ \iff (x, y, z) &= (a + t(a' - a), b + t(b' - b), c + t(c' - c)), \quad t \in \mathbb{R} \\ \iff x &= a + t(a' - a), \quad y = b + t(b' - b), \quad z = c + t(c' - c), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Isto é, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, suas coordenadas x , y e z satisfazem as **equações paramétricas** da reta r que passa por $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$:

$$r : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \\ z = c + t(c' - c) \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Determine as equações paramétricas da reta r que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

Solução.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 1 - 0) = (-1, 1, 1)$.

Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t(-1) \\ y = 0 + t(1) \\ z = 0 + t(1) \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{ou seja} \quad , \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas da reta r . $\square$

Definição 1

Dizemos que um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos A e B de r , o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\vec{v}$.

Assim, um ponto P pertence à reta r que passa por A e é paralela ao vetor $\vec{v}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, ou seja,

$$r : P = A + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Em termos de coordenadas, se $A = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

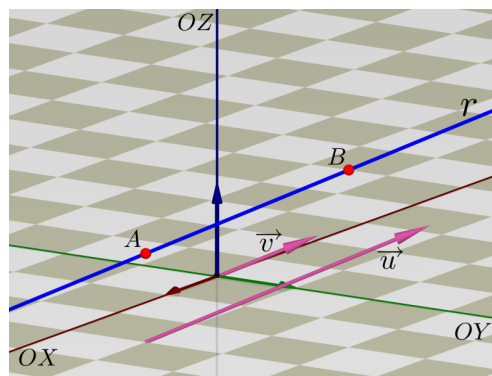


Figura 2: Vetor $\vec{v}$ paralelo à reta r .

Exemplo 2

Determine se os pontos $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (0, -1, 0)$ pertencem à reta r que passa pelo ponto $A = (1, 1, -1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 2, -1)$.

Solução.

As equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $P = (1, 1, 1) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 1, 1) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz às identidades

$$1 = 1 + t, \quad 1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 1 = -1 - t,$$

simultaneamente. Das duas primeiras obtemos $t = 0$, mas este valor é incompatível com a terceira identidade, pois implicaria na identidade $1 = -1$.

Portanto, $P \notin r$.

Analogamente, $Q = (0, -1, 0) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0, -1, 0) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz, simultaneamente, às identidades

$$0 = 1 + t, \quad -1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 0 = -1 - t,$$

Da primeira identidade, obtemos $t = -1$, valor que satisfaz as outras duas identidades.

Portanto, $Q \in r$. $\square$

2. Equação simétrica da reta no espaço

Consideremos as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quando as três coordenadas do vetor direção $\vec{v}$ são diferentes de zero, podemos colocar em evidência o parâmetro t em cada uma das equações:

$$t = \frac{x - a}{\alpha}, \quad t = \frac{y - b}{\beta} \quad \text{e} \quad t = \frac{z - c}{\gamma}.$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem:

$$r : \frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}$$

Esta expressão é chamada **equação simétrica** da reta r .

Quando a reta r é dada por dois de seus pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$, paralelo a r , terá suas três coordenadas não nulas se, e somente se, os pontos A e B não

pertencerem a um plano paralelo a um dos planos coordenados (isto é, $a' \neq a$, $b' \neq b$ e $c' \neq c$).

Neste caso, podemos expressar a reta r por meio de sua equação simétrica:

$$r : \frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b} = \frac{z - c}{c' - c}$$

Atenção!

Se a reta r é paralela a algum dos planos coordenados, então ela não pode ser representada por uma equação simétrica.

Exemplo 3

Determine, caso seja possível, a forma simétrica da equação da reta r que passa pelos pontos dados.

(a) $A = (1, 2, 3)$ e $B = (2, 3, 4)$.

(b) $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 2, 3)$.

Solução.

(a) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ tem todas suas coordenadas diferentes de zero, a reta r pode ser expressa pela equação simétrica:

$$r : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{1},$$

ou seja,

$$r : x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

(b) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2)$ é paralelo ao plano π_{YZ} , pois tem a primeira coordenada igual a zero, a reta r não pode ser representada por uma equação simétrica.

As equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Neste exemplo, observe que o vetor $\vec{v} = (0, 1, 1) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ é também paralelo

à reta r . Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

são também equações paramétricas para a mesma reta r . $\square$

Exemplo 4

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ e seja $\mathcal{S}$ a superfície definida pela equação $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2$. Determine os pontos de r pertencentes a $\mathcal{S}$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$, a equação paramétrica da reta r é:

$$r : P = A + t\overrightarrow{AB} ; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Agora, $P \in r \cap \mathcal{S}$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem as equações paramétricas de r e a equação de $\mathcal{S}$ simultaneamente.

Como $P \in r \iff P = (1 - t, 0, t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} P &= (1 - t, 0, t) \in \mathcal{S} \\ \iff t &= (1 - t)^2 \\ \iff t &= 1 - 2t + t^2 \\ \iff t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ \iff t &= \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{9 - 4}) = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Temos, portanto, duas soluções:

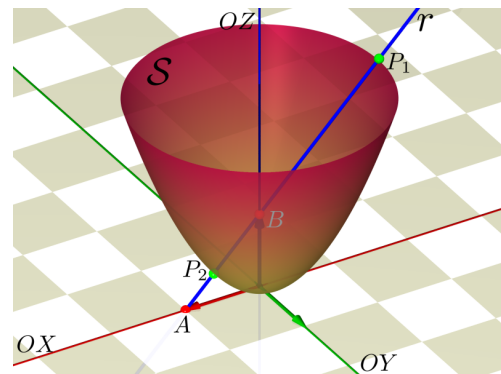


Figura 3: Interseção $r \cap \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}$.

$$\begin{aligned}
P \in r \cap \mathcal{S} &\iff \begin{cases} P = \left(1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} P = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, a reta r intersecta a superfície $\mathcal{S}$ em dois pontos. $\square$

3. Equações paramétricas do plano no espaço

Sejam A , B e C três pontos não colineares no espaço e seja π o plano que os contém. Então, pelo teorema 1,

$$P \in \pi \iff \text{existem } s, t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}.$$

Isto é, $P \in \pi$ se, e somente se, satisfaz à seguinte **equação paramétrica** do plano π :

$$P = A + s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Observação 1

A equação paramétrica de uma reta é determinada a partir da variação de um parâmetro ($t \in \mathbb{R}$), enquanto a equação paramétrica de um plano é caracterizada pela variação de dois parâmetros ($s, t \in \mathbb{R}$). Por isso dizemos que a reta é **unidimensional** e o plano é **bidimensional**.

Equação paramétrica do plano em coordenadas

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço no qual os pontos A , B e C têm coordenadas: $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$ e $C = (a'', b'', c'')$.

Substituindo as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ e $A = (a, b, c)$ e dos vetores $\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $\overrightarrow{AC} = (a'' - a, b'' - b, c'' - c)$ na equação paramétrica do plano π , obtemos que:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + s(a' - a, b' - b, c' - c) + t(a'' - a, b'' - b, c'' - c) ; s, t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, as **equações paramétricas** do plano π são:

$$\pi : \begin{cases} x = a + s(a' - a) + t(a'' - a) \\ y = b + s(b' - b) + t(b'' - b) \\ z = c + s(c' - c) + t(c'' - c) \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 5

Determine as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 0s + (-1)t \\ y = 0 + 1s + 0t \\ z = 0 + 0s + 1t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R} \quad , \text{ou seja,} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}.$$

são as equações paramétricas do plano π . $\square$

Definição 2

Dizemos que o vetor $\vec{v} \neq 0$ é **paralelo** ao plano π quando, para qualquer ponto $P \in \pi$, a reta r que passa por P e é paralela ao vetor $\vec{v}$ está contida no plano π .

Em particular, se $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $P \in \pi$ então $Q \in \pi$.

Sabemos que a equação paramétrica do plano π que passa pelos pontos não colineares A , B e C é dada por:

$$\pi : P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} ; s, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P_0 = A + s_0\overrightarrow{AB} + t_0\overrightarrow{AC}$ um ponto pertencente a π . Como todos

os pontos da forma

$$P = P_0 + s \overrightarrow{AB} = A + (s + s_0) \overrightarrow{AB} + t_0 \overrightarrow{AC}, \quad s \in \mathbb{R},$$

pertencem ao plano π , a reta que passa por P_0 e é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$ está contida em π . Sendo $P_0 \in \pi$ arbitrário, obtemos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao plano π .

De forma análoga, verificamos que o vetor $\overrightarrow{AC}$ é paralelo ao plano π .

Além disso, como A , B e C são pontos não colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, isto é, não são colineares.

Com isso, vemos que um plano π é determinado se conhecermos um ponto pertencente a π e duas direções não colineares paralelas a π .

Assim, a **equação paramétrica** do plano π que passa por A e é paralelo aos vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é

$$\pi : P = A + s \vec{u} + t \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Escrevendo em coordenadas, $A = (a, b, c)$, $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $P = (x, y, z)$, obtemos as seguintes equações paramétricas de π :

$$\pi : \begin{cases} x = a + \alpha s + \alpha' t \\ y = b + \beta s + \beta' t \\ z = c + \gamma s + \gamma' t \end{cases}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Exemplo 6

Determine as equações paramétricas do plano π que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 0, 1)$ e é paralelo à reta r que passa por $D = (2, 0, 1)$ e $E = (0, 0, 2)$.

Solução.

Para determinar as equações paramétricas do plano π é necessário conhecer um ponto A pertencente a π e:

- dois outros pontos de π não colineares com A , **ou**
- dois vetores não colineares paralelos a π .

Em nosso caso, o vetor $\overrightarrow{DE} = (-2, 0, 1)$ paralelo à reta r e, portanto, paralelo

a π , não é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$ paralelo a π .

Então π é o plano que passa por $A = (1, 1, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$ e $\overrightarrow{CD} = (-2, 0, 1)$ tendo, portanto, as equações paramétricas:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + (0)s + (-2)t \\ y = 1 + (-1)s + (0)t \\ z = 1 + (0)s + (1)t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - s \\ z = 1 + t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}.$$

□

Exemplo 7

Determine, caso exista, o ponto onde o plano π , que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 1)$ e $C = (3, 2, 1)$, intersecta o eixo- OX .

Solução.

Determinemos, primeiro, as equações paramétricas do plano π .

Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ não são colineares e são paralelos a π . Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 2s - 2t \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}.$$

O ponto da interseção de π com o eixo- OX deve ser um ponto com a segunda e terceira coordenadas iguais a zero. Isto é,

$$P = (x, y, z) \in \pi \cap \text{eixo} - OX \iff \begin{cases} y = 2 + s = 0 \\ z = 3 - 2s - 2t = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação do sistema, vemos que $s = -2$ e, substituindo este valor na segunda equação, obtemos $t = \frac{3 - 2(-2)}{2} = \frac{7}{2}$.

Portanto, $P_0 = \left(1 + (-2) + 2 \times \frac{7}{2}, 0, 0\right) = (6, 0, 0)$ é o ponto de interseção de π com o eixo- OX . □

4. Equação cartesiana do plano

Agora vamos aplicar a noção de produto interno para determinar a equação cartesiana de um plano no espaço.

Definição 3

Dizemos que um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é **perpendicular** ou **normal** a um plano π , e escrevemos $\vec{u} \perp \pi$, quando $\vec{u}$ é perpendicular a qualquer vetor paralelo ao plano π . Isto é, $\vec{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ para quaisquer $A, B \in \pi$.

Se π é o plano que passa pelo ponto A e é normal ao vetor $\vec{u}$, então:

$$P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \iff \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0$$

Escrevendo a última condição em termos das coordenadas dos elementos envolvidos:

$$A = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{v} = (a, b, c) \quad \text{e} \quad P = (x, y, z),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \pi &\iff \langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à **equação cartesiana** de π :

$$\pi : ax + by + cz = d$$

onde $\vec{u} = (a, b, c) \perp \pi$ e d é calculado sabendo que π passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$:

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$.

Solução.

Como $\vec{u} = (1, 2, -3) \perp \pi$, temos $\pi : 1x + 2y + (-3)z = d$, onde

$$d = 1(1) + 2(1) + (-3)(2) = -3.$$

Portanto,

$$\pi : x + 2y - 3z = -3$$

é a equação cartesiana do plano π . $\square$

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas do plano $\pi : x + 3y - z = 2$.

Solução.

Para determinar as equações paramétricas do plano π , devemos encontrar três pontos de π que não sejam colineares.

Tomando $y = z = 0$ na equação cartesiana de π , obtemos $x = 2$. Portanto, o ponto $A = (2, 0, 0)$ pertence ao plano π .

Tomando agora $x = y = 0$ na equação de π , obtemos $z = -2$. Portanto, o ponto $B = (0, 0, -2)$ pertence ao plano π .

Finalmente, tomando $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $z = 1$. Portanto, $C = (0, 1, 1) \in \pi$. Devemos verificar agora que A , B e C não são colineares.

Para isso, consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$.

Como $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, concluímos que A , B e C não são colineares.

Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores não colineares paralelos a π .

Assim, como o plano π passa por $A = (2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$,

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - 2s - 2t \\ y = t \\ z = -2s + t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do plano π . $\square$

Observação 2

Seja $ax + by + cz = d$ a equação cartesiana do plano π que passa por três pontos A , B e C não colineares.

Como o vetor $\vec{w} = (a, b, c)$ deve ser perpendicular ao plano π , ou seja, aos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, basta tomar $\vec{w} = (a, b, c) = \vec{u} \times \vec{v}$.

O número real d é calculado sabendo que os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ pertencem ao plano π . Isto é:

$$d = ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_2 + by_2 + cz_2 = ax_3 + by_3 + cz_3.$$

Exemplo 10

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$ são vetores paralelos ao plano π e não são múltiplos um do outro, pois $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, obtemos que:

$$\pi : P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + t \\ y = -1 + s + 2t \\ z = 3 - 2s \end{cases}; \quad s, t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas do plano π .

Para determinar a equação cartesiana de π , devemos achar um vetor perpendicular a π .

Sendo, pela observação 2,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4, -2, 5), \end{aligned}$$

um vetor normal ao plano π , a equação cartesiana de π tem a forma:

$$4x - 2y + 5z = d,$$

onde d é calculado sabendo que $A = (1, -1, 3) \in \pi$:

$$d = 4(1) - 2(-1) + 5(3) = 21.$$

Portanto,

$$4x - 2y + 5z = 21,$$

é a equação cartesiana do plano π que procurávamos. $\square$

Exemplo 11

Determine a equação cartesiana do plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Solução.

Das equações paramétricas de π , obtemos um ponto $A = (-1, 1, 3)$ pertencente a π e os vetores $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 1, 2)$ não colineares e paralelos ao plano π .

Para determinar a equação cartesiana de π , como já sabemos que $A \in \pi$, basta achar um vetor $\vec{u}$ perpendicular a π .

Como $\vec{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$, basta tomar, pela observação 2,

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -2, 3). \end{aligned}$$

Assim, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$\pi : -2x - 2y + 3z = d,$$

onde o valor d é calculado sabendo que $A = (-1, 1, 3) \in \pi$:

$$d = -2(-1) - 2(1) + 3(3) = 9.$$

Portanto,

$$\pi : -2x - 2y + 3z = 9,$$

é a equação cartesiana do plano π . $\square$

Observação 3

Seja r a reta dada pela interseção de dois planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e

$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ concorrentes. Ou seja,

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad (1)$$

Como $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$ e $r = \pi_1 \cap \pi_2$, temos que $\vec{v}_1 \perp r$ e $\vec{v}_2 \perp r$. Portanto, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é um vetor paralelo à reta r .

Para determinar a equação paramétrica de r , temos também de encontrar um ponto A que satisfaz ao sistema (1). Feito isso, $r = \{A + t(\vec{u} \times \vec{v}); t \in \mathbb{R}\}$.

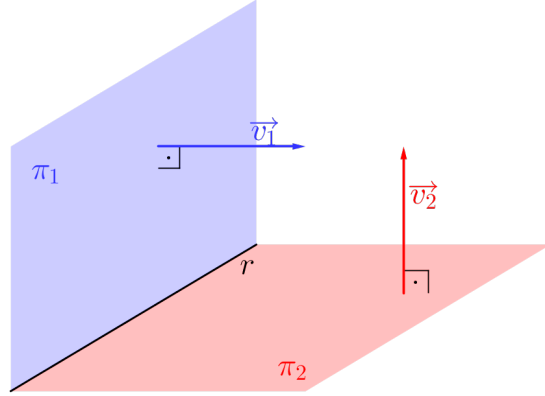


Figura 4: Reta r dada pela interseção de dois planos.

Exemplo 12

Determine a equação paramétrica da reta:

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Solução.

Pela observação acima, $\vec{u} \times \vec{v} \parallel r$, onde $\vec{u} = (1, 1, -2)$ e $\vec{v} = (2, 3, -4)$ são os vetores normais aos planos $x + y - 2z = 1$ e $2x + 3y - 4z = 5$, respectivamente.

Sendo,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (2, 0, 1),$$

obtemos que o vetor $(2, 0, 1)$ é paralelo à reta r .

Fazendo $x = 0$ no sistema (2), segue que $P = (0, y, z) \in r$ se, e somente se, y e z satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} y - 2z = 1 \\ 3y - 4z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - 6z = 3 \\ 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, chegamos que $2z = 2 \iff z = 1$ e, portanto, $y = 1 + 2z = 3$. Assim, $P = (0, 3, 1) \in r$ e

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica de r . $\square$

Exemplo 13

Determine, caso exista, $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta r seja perpendicular ao plano $\pi : x - z = 0$, onde

$$r : \begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + my + z = 2 \end{cases} \quad (3)$$

Caso afirmativo, determine o ponto P de interseção da reta r com o plano π .

Solução.

Sabemos que a reta r é paralela ao vetor

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \right) \\ &= (1 - 2m, -m + 2, m^2 - 1). \end{aligned}$$

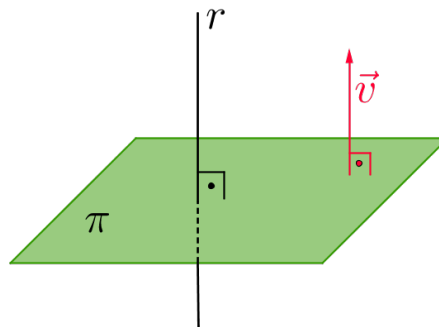


Figura 5: Reta r perpendicular ao plano π .

Para que r seja perpendicular a π , o vetor $\vec{u}$ deve ser múltiplo do vetor $\vec{v} = (1, 0, -1)$, normal ao plano π . Logo, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1-2m & -m+2 & m^2-1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (m-2, -1+2m-m^2+1, m-2) \\ &= (m-2, m(2-m), m-2) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Segue que $m = 2$ e $\vec{u} = (1-4, -2+2, 4-1) = (-3, 0, 3)$.

Fazendo $x = 0$ e $m = 2$ em (3), obtemos o sistema

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases},$$

cujas soluções são $y = 1$ e $z = 0$.

Logo, $A = (0, 1, 0) \in r$ e as equações paramétricas de r são

$$r : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

Seja $r \cap \pi = \{P\}$. Então $P = (-3t, 1, 3t)$ e

$$x - z = -3t - 3t = 0 \implies t = 0.$$

Assim, $P = A = (0, 1, 0)$ é o ponto de interseção de r com π . $\square$

Capítulo 11

Ângulos e distâncias no espaço

1. Ângulo entre duas retas no espaço

Definição 1

O ângulo $\angle(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2 é assim definido:

- Se r_1 e r_2 são coincidentes, então $\angle(r_1, r_2) = 0$.
- Se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, então $\angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas no plano que as contém.

Em particular, $0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2$.

- Se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, temos duas situações a considerar:

- se $r_1 \parallel r_2$, então $\angle(r_1, r_2) = 0$;

- se r_1 e r_2 não são paralelas e não se intersectam, dizemos que as retas são **reversas**. Neste caso, seja $P \in r_1$ e seja r'_2 a paralela a r_2 que passa por P . Então as retas r_1 e r'_2 são concorrentes e definimos

$$\angle(r_1, r_2) = \angle(r_1, r'_2)$$

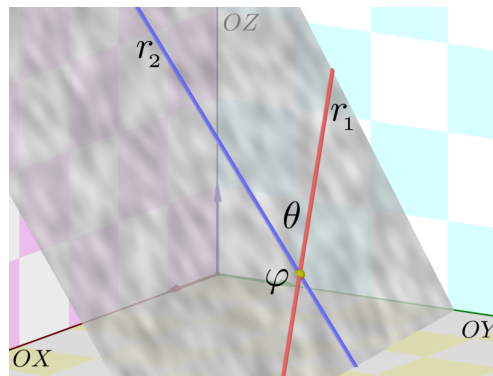
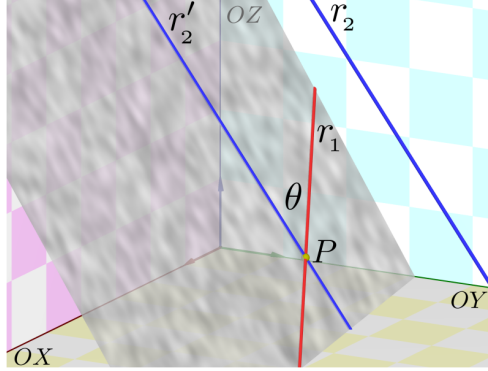


Figura 1: Retas concorrentes: $\theta = \angle(r_1, r_2) < \varphi$.

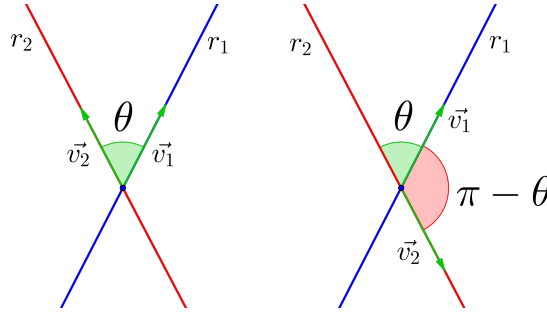
Figura 2: Retas reversas: $\theta = \angle(r_1, r_2)$.

Além disso, pelo paralelismo, $\angle(r_1, r_2)$ independe do ponto P escolhido.

A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores paralelos às retas concorrentes (ou reversas) r_1 e r_2 , respectivamente. Como $\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \angle(r_1, r_2)$ ou $\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \pi - \angle(r_1, r_2)$, segue que:

$$\cos \angle(r_1, r_2) = |\cos \angle(v_1, v_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}, \quad 0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2.$$

Figura 3: $\angle(r_1, r_2) = \theta$

A fórmula vale também quando r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0$, pois

$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2 \implies \frac{|\langle \lambda \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\lambda \vec{v}_2\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{|\lambda| |\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle|}{|\lambda| \|\vec{v}_2\| \|\vec{v}_2\|} = 1 = \cos 0 = \cos \angle(r_1, r_2).$$

Exemplo 1

Calcule o ângulo entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2} \quad e \quad r_2 : x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Mostre, também, que estas retas são reversas.

Solução.

Temos que $\vec{v}_1 = (2, 2, 2) \parallel r_1$ e $\vec{v}_2 = (1, 2, 3) \parallel r_2$. Logo,

$$\cos \angle(r_1, r_2) = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} = \frac{|2+4+6|}{\sqrt{12}\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{12 \times 14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Assim, o ângulo entre r_1 e r_2 é o ângulo entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ cujo cosseno é igual a

$$\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Para verificar que as retas r_1 e r_2 são reversas, observamos primeiro que os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são múltiplos, pois

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Portanto, as retas não podem ser coincidentes e nem paralelas, podendo ser concorrentes ou reversas.

Para concluir que r_1 e r_2 são reversas, devemos mostrar que elas não se intersectam. As equações paramétricas de r_1 são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (1 + 2t, -1 + 2t, 2t)$ um ponto de r_1 . Vamos tentar determinar o valor do parâmetro t , de modo que P esteja também em r_2 :

$$\begin{aligned} P \in r_2 &\iff (1 + 2t) + 2 = \frac{(-1 + 2t) - 1}{2} = \frac{2t - 2}{3} \\ &\iff 3 + 2t = \frac{-2 + 2t}{2} = \frac{2t - 2}{3} \\ &\iff 3 + 2t = -1 + t = \frac{2}{3}(t - 1). \end{aligned}$$

Da segunda igualdade, obtemos $t - 1 = 0$, ou seja, $t = 1$. Porém, substituindo este valor na primeira igualdade, obtemos a identidade impossível $5 = 0$.

Portanto, não existe $P \in r_1 \cap r_2$. Isto é, as retas não são concorrentes e sim reversas. $\square$

2. Ângulo entre dois planos

Definição 2

Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ dois planos no espaço.

O **ângulo entre os planos π_1 e π_2** , representado por $\angle(\pi_1, \pi_2)$, se define da seguinte maneira:

- se os planos são paralelos ($\pi_1 \parallel \pi_2$) ou coincidentes ($\pi_1 = \pi_2$), então $\angle(\pi_1, \pi_2) = 0$,
- se π_1 e π_2 não são paralelos nem coincidentes, então se intersectam ao longo de uma reta r .

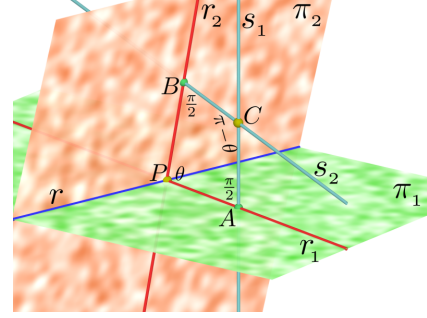


Figura 4: $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$.

Sejam $P \in r$ um ponto qualquer, r_1 a reta perpendicular a r contida em π_1 , que passa por P e r_2 a perpendicular a r contida em π_2 , que passa por P . Definimos:

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(r_1, r_2)$$

Tomando $A \in r_1$ e $B \in r_2$, $\angle(\pi_1, \pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \cos \angle(r_1, r_2) = |\cos \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})| = \frac{|\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB} \rangle|}{\|\overrightarrow{PA}\| \|\overrightarrow{PB}\|}$$

Seja agora s_1 a reta perpendicular ao plano π_1 , que passa pelo ponto A , e seja s_2 a reta perpendicular ao plano π_2 , que passa por B .

As retas s_1 e s_2 se intersectam em um ponto C .

Como os ângulos $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são suplementares (a sua soma é π), temos:

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})| = |\cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})|.$$

Além disso, como $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$, os ângulos $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são iguais ou suplementares. Logo,

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$$

A fórmula vale também quando os planos são paralelos ou coincidentes.

Observação 1

Pela fórmula acima, dois planos π_1 e π_2 são perpendiculares se, e só se, os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente, são ortogonais.

Exemplo 2

Calcule o ângulo entre os planos $\pi_1 : -y + 1 = 0$ e $\pi_2 : y + z + 2 = 0$.

Solução.

Temos que $\vec{v}_1 = (0, -1, 0) \perp \pi_1$ e $\vec{v}_2 = (0, 1, 1) \perp \pi_2$. Logo, $\angle(\pi_1, \pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\begin{aligned} \cos \angle(\pi_1, \pi_2) &= |\cos \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} \\ &= \frac{|\langle (0, -1, 0), (0, 1, 1) \rangle|}{\|(0, -1, 0)\| \|(0, 1, 1)\|} = \frac{|-1|}{(1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\angle(\pi_1, \pi_2) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. Ângulo entre uma reta r e um plano π

Definição 3

Sejam r uma reta e π um plano no espaço. Sejam $\vec{w}$ um vetor normal ao plano π e $\vec{v}$ um vetor paralelo à reta r .

Seja θ o menor ângulo não negativo entre r e w ($0 \leq \theta \leq \pi/2$). O **ângulo entre r e π** é, por definição, o complementar do ângulo θ .

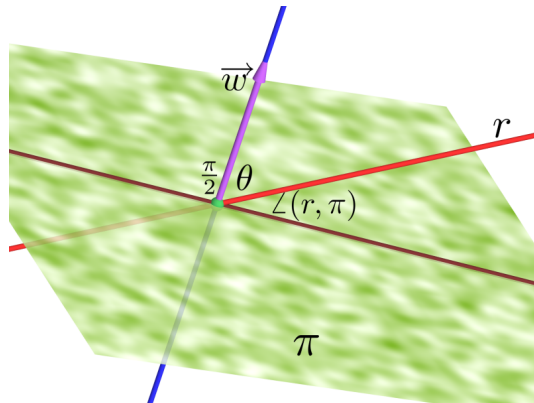


Figura 5: $\angle(r, \pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Isto é,

$$\angle(r, \pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Logo,

$$\operatorname{sen} \angle(r, \pi) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

Exemplo 3

Calcule o seno do ângulo entre a reta r e o plano π , onde

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 4 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \pi : x - 2y + 3 = 0.$$

Solução.

Temos que $\vec{v} = (1, 2, 0) \parallel r$ e $\vec{w} = (1, -2, 0) \perp \pi$. Logo,

$$\operatorname{sen} \angle(r, \pi) = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{|\langle (1, 2, 0), (1, -2, 0) \rangle|}{\|(1, 2, 0)\| \|(1, -2, 0)\|} = \frac{|1 - 4 + 0|}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

□

4. Distância de um ponto P_0 a um plano π

Definição 4

A **distância do ponto P_0 ao plano π** , designada $d(P_0, \pi)$ é, por definição, a menor das distâncias de P_0 aos pontos $P \in \pi$. Isto é,

$$d(P_0, \pi) = \min \{ d(P_0, P) \mid P \in \pi \}$$

Seja P^* o ponto de interseção de π com a reta r , que passa por P_0 e é perpendicular a π .

Se P é um ponto qualquer no plano π , diferente de P^* , obtemos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $\triangle P_0 P^* P$, que:

$$d(P_0, P)^2 = d(P_0, P^*)^2 + d(P^*, P)^2 > d(P_0, P^*)^2.$$

Logo, $d(P_0, P) > d(P_0, P^*)$ e, portanto, $d(P_0, P^*) = \min \{ d(P_0, P) \mid P \in \pi \}$.

Isto é,

$$d(P_0, \pi) = d(P_0, P^*)$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz = d$, então $\vec{w} = (a, b, c) \parallel r$ e as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

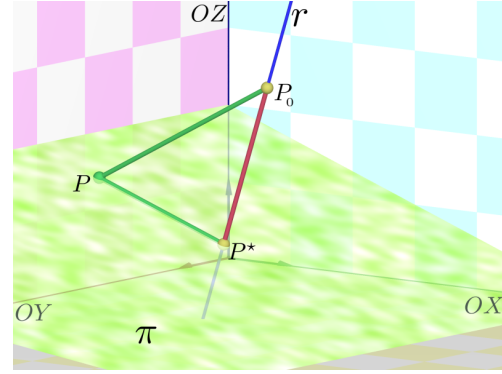


Figura 6: Cálculo de $d(P_0, \pi)$.

Como $P^* \in r$, temos $P^* = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, para algum valor $t \in \mathbb{R}$ a determinar.

Além disso, $P^* \in \pi$. Logo,

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = d,$$

ou seja,

$$(a^2 + b^2 + c^2)t = d - ax_0 - by_0 - cz_0 \iff t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P_0, P^*) &= \|\overrightarrow{P_0 P^*}\| = \|(at, bt, ct)\| = \|t(a, b, c)\| = |t| \|(a, b, c)\| \\ &= \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|^2} \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|}. \end{aligned}$$

Logo, a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $\pi : ax + by + cz = d$ é

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 4

Calcule a distância do ponto $A = (1, 2, 3)$ ao plano $\pi : 2x + y - 5z = 4$.

Solução.

(a) Usando a fórmula:

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(1) + 1(2) - 5(3) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

(b) Sem usar a fórmula:

A reta r que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{w} = (2, 1, -5) \perp \pi$, é dada por:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 5t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja $\{B\} = r \cap \pi$. As coordenadas de $B = (1 + 2t, 2 + t, 3 - 5t)$ satisfazem à equação de π :

$$2(1 + 2t) + (2 + t) - 5(3 - 5t) = 4,$$

ou seja,

$$2 + 4t + 2 + t - 15 + 25t = 4 \implies 30t = 15 \implies t = \frac{1}{2}.$$

Logo, $B = A + \frac{1}{2}\vec{w}$, isto é, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{2}(2, 1, -5)$ e, portanto,

$$d(A, \pi) = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\|\vec{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 25} = \frac{\sqrt{30}}{2} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

é a distância procurada. $\square$

5. Distância entre dois planos

Definição 5

A **distância entre os planos** π_1 e π_2 , designada $d(\pi_1, \pi_2)$, é, por definição, a menor dentre as distâncias dos pontos de π_1 aos pontos de π_2 . Isto é,

$$d(\pi_1, \pi_2) = \min \{ d(P, Q) \mid P \in \pi_1 \text{ e } Q \in \pi_2 \}$$

Note que,

- se π_1 e π_2 são coincidentes, isto é, $\pi_1 = \pi_2$, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$;
- se π_1 e π_2 são concorrentes, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$;
- suponha agora que π_1 e π_2 são planos paralelos dados pelas equações:

$$\begin{aligned}\pi_1 : \quad ax + by + cz &= d_1 \\ \pi_2 : \quad ax + by + cz &= d_2.\end{aligned}$$

Sejam $P_1 \in \pi_1$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π_2 .

Sejam $P \in \pi_1$, $Q \in \pi_2$ e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π_2 .

Então, como $P_1Q_1Q'P$ é um retângulo,

$$d(P, Q) \geq d(P, P') = d(P_1, Q_1).$$

Assim,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, Q_1) = d(P_1, \pi_2), \quad \text{qualquer que seja } P_1 \in \pi_1$$

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi_1$, então $ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1$, então:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Isto é, a distância entre os planos $\pi_1 : ax+by+cz = d_1$ e $\pi_2 : ax+by+cz = d_2$ é dada por:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 5

Calcule a distância entre os planos $\pi_1 : x + 2y + z = 2$ e $\pi_2 : 2x + 4y + 2z = 6$.

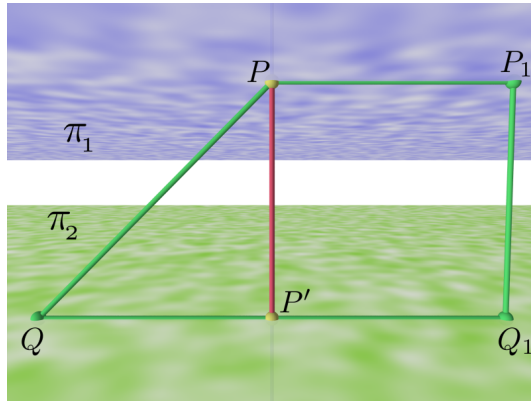


Figura 7: Cálculo de $d(\pi_1, \pi_2)$.

Solução.

Como $\pi_2 : x + 2y + z = 3$, $\pi_1 \parallel \pi_2$; logo, $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

□

6. Distância entre uma reta e um plano

Definição 6

A **distância entre uma reta r e um plano π** é o número $d(r, \pi)$ dado por:

$$d(r, \pi) = \min \{ d(P, Q) \mid P \in r \text{ e } Q \in \pi \}$$

Note que, se $r \cap \pi \neq \emptyset$ ($r \subset \pi$ ou $r \cap \pi = \{P\}$), então $d(r, \pi) = 0$.

O caso interessante a considerar ocorre quando $r \cap \pi = \emptyset$, isto é, $r \parallel \pi$.

Sejam $P_1 \in r$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π .

Sejam $P \in r$ e $Q \in \pi$ pontos arbitrários e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π . Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, P') = d(P_1, Q_1),$$

pois $P_1Q_1P'P$ é um retângulo. Logo,

$$d(r, \pi) = d(P_1, Q_1) = d(P_1, \pi), \quad \text{qualquer que seja } P_1 \in r$$

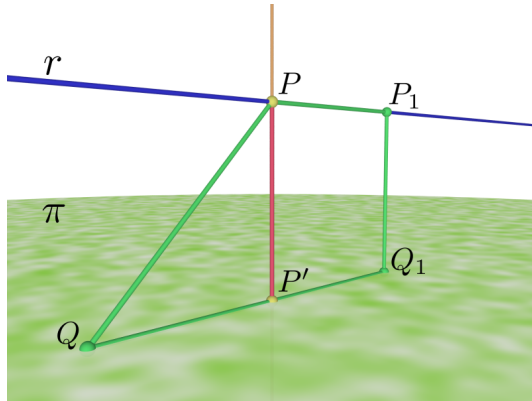


Figura 8: Cálculo de $d(r, \pi_2)$.

Exemplo 6

Mostre que a reta r é paralela ao plano π , onde

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{3y+1}{-6} = \frac{1-z}{3} \quad \text{e} \quad \pi : 2x - 3y + 6z = -3.$$

Calcule também $d(r, \pi)$.

Solução.

A equação simétrica de r pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z-1}{-3}.$$

Logo, a reta r passa pelo ponto $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (6, -2, -3)$, e o plano π é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (2, -3, 6)$.

Temos $\vec{v} \perp \vec{w}$, pois:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (6, -2, -3), (2, -3, 6) \rangle \\ &= (6)(2) + (-2)(-3) + (-3)(6) = 12 + 6 - 18 = 0. \end{aligned}$$

Logo, r é paralela ao plano π ou r está contida no plano π .

Para mostrar que $r \not\subset \pi$, basta verificar que um ponto de r não pertence a π .

De fato, $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1) \notin \pi$, pois

$$2(-2) - 3(-\frac{1}{3}) + 6(1) = -4 + 1 + 6 = 3 \neq -3.$$

Portanto, $r \cap \pi = \emptyset$, isto é, $r \parallel \pi$. Além disso,

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|2(-2) - 3(-\frac{1}{3}) + 6(1) + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{6}{7}.$$

□

7. Distância de um ponto a uma reta

Definição 7

Sejam P um ponto e r uma reta no espaço. A **distância do ponto P à reta r** , designada $d(P, r)$, é o número

$$d(P, r) = \min \{ d(P, Q) \mid Q \in r \}$$

Seja P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r .

Para todo ponto $Q \in r$, $Q \neq P'$, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= d(P, P')^2 + d(P', Q)^2 \\ &> d(P, P')^2. \end{aligned}$$

Logo, $d(P, Q) > d(P, P')$ e, portanto,

$$d(P, r) = d(P, P')$$

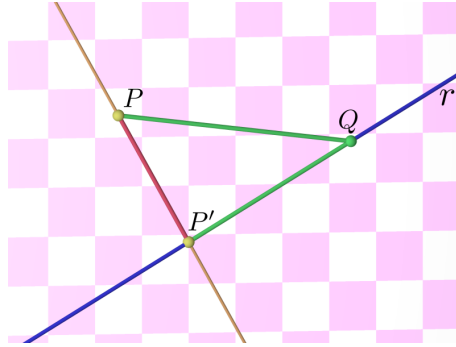


Figura 9: Cálculo de $d(P, r)$.

Assim, para calcular a distância de P a r devemos:

- determinar o ponto P' , pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r ;
- calcular $d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\|$.

Exemplo 7

Calcule a distância entre $P = (2, 5, -1)$ e a reta r que passa por $P_0 = (1, -1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

Solução.

Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r e seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P_0 + t_0 \vec{v}$.

Então, $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r se, e somente se,

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0} + t_0 \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{v} \rangle + t_0 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

Como $\overrightarrow{PP_0} = (-1, -6, 3)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{PP_0}, \vec{v} \rangle + t_0 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \langle (-1, -6, 3), (1, 0, 1) \rangle + t_0 \langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle \\ &= (-1 + 3) + t_0(1 + 1) = 2 + 2t_0. \end{aligned}$$

Logo, $t_0 = -1$ e, portanto,

$$Q = P_0 + t_0 \vec{v} = (1, -1, 2) - (1, 0, 1) = (0, -1, 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (5-(-1))^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8

Determine o conjunto $\mathcal{S}$ dos pontos do espaço que estão a distância 2 da reta r , paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 2, 1)$ que passa pela origem.

Solução.

Temos que $Q \in \mathcal{S}$ se, e somente se, existe $P \in r$ tal que $\vec{PQ} \perp r$ e $\|\vec{PQ}\| = 2$.

Sejam $P = (t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto de r e $Q = (x, y, z)$.

Então,

$$\vec{PQ} \perp r \iff \vec{PQ} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{PQ}, \vec{v} \rangle = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{PQ}, \vec{v} \rangle = \langle (x-t, y-2t, z-t), (1, 2, 1) \rangle \\ &= x-t+2y-4t+z-t = x+2y+z-6t. \end{aligned}$$

Isto é,

$$t = \frac{x+2y+z}{6}.$$

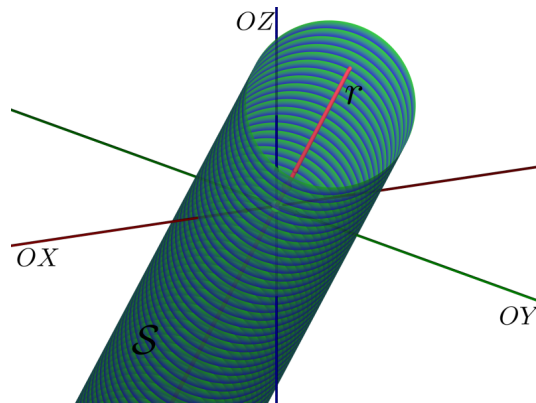


Figura 10: Exemplo 8.

Suponhamos, agora, que $\|\vec{PQ}\| = 2$. Como

$$P = \left(\frac{x+2y+z}{6}, \frac{2(x+2y+z)}{6}, \frac{x+2y+z}{6} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \left(x - \frac{x+2y+z}{6}, y - \frac{2(x+2y+z)}{6}, z - \frac{x+2y+z}{6} \right) \\ &= \left(\frac{5x-2y-z}{6}, \frac{-2x+2y-2z}{6}, \frac{-x-2y+5z}{6} \right). \end{aligned}$$

Logo, $d(Q, r) = d(Q, P) = \|\overrightarrow{PQ}\| = 2$ se, e somente se, $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = 4$, isto é, se, e somente se,

$$4 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \frac{(5x-2y-z)^2}{36} + \frac{(-2x+2y-2z)^2}{36} + \frac{(-x-2y+5z)^2}{36},$$

se e somente se,

$$(5x-2y-z)^2 + (-2x+2y-2z)^2 + (-x-2y+5z)^2 = 4(36).$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos a equação de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} : 30x^2 + 12y^2 + 30z^2 - 24xy - 12xz - 24yz - 144 = 0.$$

O conjunto $\mathcal{S}$ é o cilindro circular reto de raio 2 cujo eixo é a reta r . $\square$

Exemplo 9

Determine o conjunto dos pontos do plano $\pi : x + y + 2z = 1$ que estão a distância três da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, -1, 1)$.

Solução.

A reta r é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$ e o plano π é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (1, 1, 2)$.

Como $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{w} \rangle = \langle (1, -1, 0), (1, 1, 2) \rangle = 1 - 1 = 0$, e $A \notin \pi$ (note que as coordenadas de $A = (1, 0, 1)$ não satisfazem a equação de π) obtemos que $r \parallel \pi$.

Sejam $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1+t, -t, 1) \in r$ e $Q = (x, y, z) \in \pi$ tais que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $d(Q, r) = d(P, Q) = 3$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle (x-1-t, y+t, z-1), (1, -1, 0) \rangle \\ &= x-1-t-y-t = x-y-2t-1 = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x - y = 2t + 1.$$

Como $Q \in \pi$, as suas coordenadas x , y e z satisfazem ao sistema formado pela equação acima e pela equação de π :

$$\begin{cases} x - y = 2t + 1 \\ x + y = -2z + 1. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos $2x = 2 + 2t - 2z$, ou seja, $x = 1 + t - z$, e subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $2y = -2z - 2t \iff y = -t - z$. Então, as coordenadas de um ponto $Q = (x, y, z)$ do plano π que se projeta perpendicularmente sobre o ponto $P = (1 + t, -t, 1) \in r$, satisfazem

$$\begin{cases} x = 1 + t - z \\ y = -t - z. \end{cases} \quad (1)$$

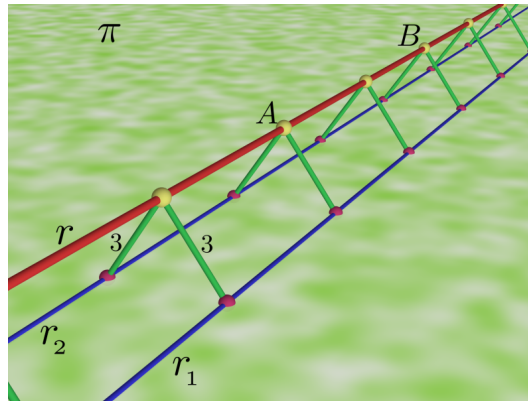


Figura 11: Exemplo 9.

Além disso, devemos ter $d(P, Q) = 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} 9 &= d(P, Q)^2 = (x - (1 + t))^2 + (y - (-t))^2 + (z - 1)^2 \\ &= (-z)^2 + (-z)^2 + (z - 1)^2 = 3z^2 - 2z + 1. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação $3z^2 - 2z + 1 = 9$, ou seja, $3z^2 - 2z - 8 = 0$, obtemos as raízes $z = 2$ e $z = -\frac{4}{3}$.

Substituindo estas raízes no sistema (1), obtemos as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - t ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} - t ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

paralelas à reta r , contidas no plano π e cujos pontos estão a distância três de r . $\square$

Capítulo 12

Distâncias entre retas no espaço

Sejam $r_1 = \{P_1 + t\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{P_2 + t\vec{v}_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço. Se $r_1 \neq r_2$, sabemos que r_1 e r_2 são concorrentes (isto é, $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$) ou não se intersectam. Quando a segunda possibilidade ocorre, temos ainda duas situações a considerar: as retas podem ser **paralelas** ou **reversas**.

Definição 1

A **distância entre r_1 e r_2** é o número $d(r_1, r_2)$ dado por:

$$d(r_1, r_2) = \min \{d(P, Q) \mid P \in r_1 \text{ e } Q \in r_2\}$$

Se as retas se intersectam, por definição, $d(r_1, r_2) = 0$. Assim, os casos importantes a considerar ocorrem quando $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

1. Distância entre duas retas paralelas no espaço

Suponhamos que $r_1 \parallel r_2$. Então, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são colineares, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e existe um plano π que contém ambas as retas. Seja $P_1 \in r_1$ e R_1 o pé da perpendicular baixada de P_1 sobre a reta r_2 . Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, R) = d(P_1, R_1).$$

quaisquer que sejam os pontos $P \in r_1$ e $Q \in r_2$, onde R é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r_2 , pois P_1R_1RP é um retângulo contido no plano π .

Logo, qualquer que seja o ponto $P_1 \in r_1$, temos que (figura 1):

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, R_1) = d(P_1, r_2).$$

Exemplo 1

Mostre que a reta r_1 , que passa por $A_1 = (1, 2, 1)$ e $B_1 = (2, 1, 0)$, é paralela à reta r_2 que passa por $A_2 = (0, 1, 2)$ e $B_2 = (1, 0, 1)$. Calcule a distância entre r_1 e r_2 .

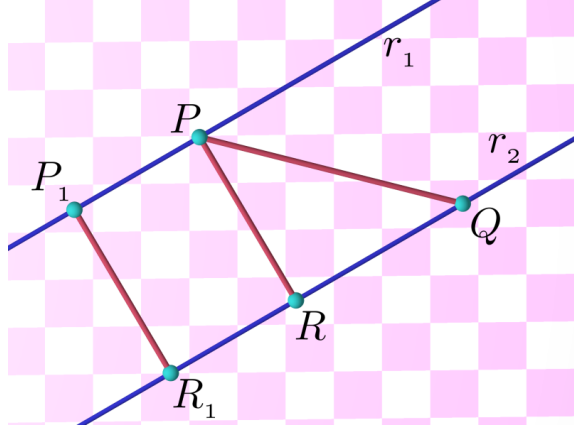


Figura 1: $d(P, Q) \geq d(r_1, r_2)$, para todo $Q \in r_2$ e $P \in r_1$.

Solução.

Temos:

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = (1, -1, -1) \parallel r_1 \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = (1, -1, -1) \parallel r_2.$$

Logo, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ e as retas r_1 e r_2 são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \{A_1 + t\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 2-t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ r_2 &= \{A_2 + s\vec{v}_2 \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(s, 1-s, 2-s) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Para verificar que $r_1 \parallel r_2$ basta verificar que um ponto de r_2 não pertence a r_1 , pois já sabemos que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são múltiplos. Por exemplo, vejamos que $B_2 = (1, 0, 1) \notin r_1$.

De fato, se $B_2 = (1, 0, 1) \in r_1$, então deveria existir um valor $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} 1+t = 1 \\ 2-t = 0 \\ 1-t = 1. \end{cases}$$

Da segunda destas identidades obtemos $t = 2$, e substituindo este valor de t na primeira identidade, obtemos $3 = 1 + 2 = 1$, um absurdo.

Portanto, $B_2 \notin r_1$ e as retas r_1 e r_2 são, efetivamente, paralelas.

Para calcular a distância $d(r_1, r_2)$, basta calcular a distância de um ponto de r_1 a r_2 . Por exemplo, calculemos $d(A_1, r_2)$.

Seja $C = (s, 1 - s, 2 - s) \in r_2$, tal que o vetor

$$\overrightarrow{A_1C} = (-1 + s, -1 - s, 1 - s)$$

é perpendicular à reta r_2 , isto é, ao vetor $\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$.

Temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1C} \perp \vec{v}_2 &\iff 0 = \langle \overrightarrow{A_1C}, \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle (-1 + s, -1 - s, 1 - s), (1, -1, -1) \rangle \\ &= -1 + s + 1 + s - 1 + s = 3s - 1 \\ &\iff s = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= d(A_1, C) = \|\overrightarrow{A_1C}\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{24} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{aligned}$$

é a distância procurada. $\square$

2. Distância entre duas retas reversas no espaço

Sejam $r_1 = \{P_1 + t\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{P_2 + t\vec{v}_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas **reversas** no espaço (isto é, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares). Por definição, a distância entre r_1 e r_2 é a menor das distâncias entre um ponto de r_1 e um ponto de r_2 :

$$d(r_1, r_2) = \min\{d(P, Q) \mid P \in r_1 \text{ e } Q \in r_2\}.$$

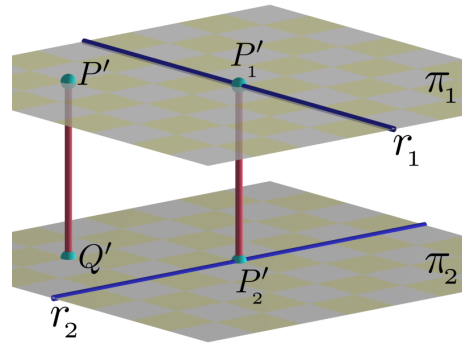


Figura 2: Retas reversas r_1 e r_2 .

Sejam π_1 e π_2 os planos paralelos aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ que contêm, respectivamente, os pontos P_1 e P_2 .

Já sabemos que

$$d(\pi_1, \pi_2) = \min\{d(P, Q) \mid P \in \pi_1 \text{ e } Q \in \pi_2\} = d(P', Q'),$$

onde $P' \in \pi_1$ é um ponto arbitrário e $Q' \in \pi_2$ é o pé da perpendicular baixada desde o ponto P' sobre o plano π_2 . Isto é, $\overrightarrow{P'Q'} \perp \pi_2$ (ou a π_1).

Pela própria definição, temos

$$d(r_1, r_2) \geq d(\pi_1, \pi_2),$$

pois $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$.

Afirmamos que

$$d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2)$$

Para isto, basta mostrar que existem $P'_1 \in r_1$ e $P'_2 \in r_2$, tais que, $\overrightarrow{P'_1P'_2}$ é perpendicular a r_1 e a r_2 , isto é, perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

Consideremos

$$P'_1 = P_1 + t\overrightarrow{v_1} \in r_1 \text{ e } P'_2 = P_2 + s\overrightarrow{v_2} \in r_2.$$

$$\text{Como } \overrightarrow{P'_1P'_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1},$$

$$\overrightarrow{P'_1P'_2} \perp \overrightarrow{v_1} \iff \langle \overrightarrow{P'_1P'_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = 0,$$

$$\overrightarrow{P'_1P'_2} \perp \overrightarrow{v_2} \iff \langle \overrightarrow{P'_1P'_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0.$$

Desenvolvendo os produtos internos acima, obtemos que $\overrightarrow{P'_1P'_2}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, simultaneamente, se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle + s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle + s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0, \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle = -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle \\ s\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle - t\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & (\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle, \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle)s + (-\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \rangle, -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle)t \\ & = (-\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1} \rangle, -\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_2} \rangle), \end{aligned}$$

o sistema possui uma única solução se, e só se, os vetores

$$(\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle) \quad \text{e} \quad (-\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle, -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle)$$

não são múltiplos, isto é, se e só, e somente, o determinante

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle & -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle & -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \end{pmatrix} &= -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle^2 + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \\ &= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle^2 \\ &= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 \cos^2 \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \\ &= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 (1 - \cos^2 \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)) \\ &= \|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 \sin^2 \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \end{aligned}$$

é diferente de zero.

Sendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores não nulos e não colineares, temos que $0 < \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) < \pi$ e, em particular, $\sin \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$.

Portanto, o determinante anterior é diferente de zero e o sistema em questão possui uma única solução para s e t . Estes valores determinam um único par de pontos $P'_1 \in r_1$ e $P'_2 \in r_2$, tais que, $\overrightarrow{P'_1 P'_2}$ é perpendicular a r_1 e a r_2 , simultaneamente. Então, a distância entre r_1 e r_2 é

$$d(r_1, r_2) = d(P'_1, P'_2)$$

Exemplo 2

Mostre que as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

são reversas, calcule $d(r_1, r_2)$ e determine a única reta r_3 que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

Solução.

Temos que $r_1 \parallel \vec{v}_1 = (1, 2, 0)$ e $r_2 \parallel \vec{v}_2 = (1, 0, 1)$. Como $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são colineares, as retas podem ser concorrentes ou reversas.

Para mostrar que r_1 e r_2 são reversas, basta verificar que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

Suponhamos, por absurdo, que $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$. Então deveriam existir valores $s, t \in \mathbb{R}$, tais que

$$(1+t, 2t, 0) = (2+s, 3, 1+s).$$

Igualando as coordenadas, obtemos:

$$\begin{aligned} 1+t &= 2+s \\ 2t &= 3 \\ 0 &= 1+s. \end{aligned}$$

Da segunda identidade, temos $t = \frac{3}{2}$ e da terceira, $s = -1$. Estes valores são incompatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2} \neq 1 = 2+(-1) = 1+s$. Assim, o sistema não tem solução e os valores procurados para s e t não existem.

Logo, as retas r_1 e r_2 não se intersectam e são, portanto, reversas.

Vamos determinar pontos $P'_1 = (1+t, 2t, 0) \in r_1$ e $P'_2 = (2+s, 3, 1+s) \in r_2$ tais que o vetor $\overrightarrow{P'_1P'_2} = (1+s-t, 3-2t, 1+s)$ seja perpendicular a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, simultaneamente.

Devemos achar valores $s, t \in \mathbb{R}$, tais que,

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P'_1P'_2}, \vec{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P'_1P'_2}, \vec{v}_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1, 2, 0) \rangle = 0 \\ \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1, 0, 1) \rangle = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} s-5t = -7 \\ 2s-t = -2. \end{cases}$$

Substituindo $t = 2+2s$ da segunda equação, na primeira, obtemos $s-10-10s = -7$. Então, $s = -\frac{1}{3}$, $t = 2+2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$,

$$P'_1 = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0\right), \quad P'_2 = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{2}{3}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P'_1P'_2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Assim, a distância entre r_1 e r_2 é

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{P'_1P'_2}\| = \frac{1}{3} \sqrt{4+1+4} = 1$$

e

$$r_3 = \left\{ P'_1 + t \overrightarrow{P'_1 P'_2} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}t, \frac{8}{3} + \frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

é a reta procurada. $\square$

Exemplo 3

Sejam r_1 a reta que passa pelo ponto $P_1 = (1, 1, 2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$ e r_2 a reta de interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y + z = 4$ e $\pi_2 : x + z = 2$.

- (a) Mostre que r_1 e r_2 são retas reversas.
- (b) Calcule a distância entre r_1 e r_2 .
- (c) Determine a única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

Solução.

(a) A reta r_1 é dada por

$$r_1 = \{P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Determinemos a equação paramétrica da reta r_2 .

Sabemos que a reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, onde $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{w} = (1, 0, 1) \perp \pi_2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, 0, -2). \end{aligned}$$

Para achar um ponto $P_2 \in r_2$, tomamos $x = 2$, por exemplo, nas equações dos planos π_1 e π_2 :

$$\begin{cases} 2 + 2y + z = 4 \\ 2 + z = 2 \end{cases} \implies z = 0 \implies y = 1 \implies P_2 = (2, 1, 0) \in r_2.$$

Logo, r_2 é a reta que passa pelo ponto $P_2 = (2, 1, 0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1)$, ou seja:

$$r_2 = \{P'_1 + s\overrightarrow{v_2} \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(s, 1, 2-s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, -1)$ não são colineares, as retas r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas.

Suponhamos que $r_1 \cap r_2 = \{Q\}$. Então $Q = (1+t, 1+t, 2) = (s, 1, 2-s)$ para certos valores $s, t \in \mathbb{R}$, que tentaremos determinar.

Devemos ter $1+t = s$, $1+t = 1$ e $2 = 2-s$. Da segunda identidade, obtemos $t = 0$ e, da terceira, $s = 0$. No entanto, estes valores não são compatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+0 \neq 0 = s$.

Assim, o ponto $Q \in r_1 \cap r_2$ não existe. Isto é, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e, portanto, as retas são reversas.

(b) e **(c)** Devemos determinar $P \in r_1$ e $P' \in r_2$, tais que $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_2$, simultaneamente.

Como $P = (1+t, 1+t, 2)$, $P' = (s, 1, 2-s)$ e $\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s)$, as condições de perpendicularidade, em termos do produto interno, são:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PP'}, \vec{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{PP'}, \vec{v}_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (s-t-1, -t, -s), (1, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (s-t-1, -t, -s), (1, 0, -1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s-t-1-t = 0 \\ s-t-1+s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s-2t = 1 \\ 2s-t = 1 \end{cases}$$

Substituindo $s = 2t+1$ da primeira equação, na segunda, obtemos $4t+2-t = 1$ ou seja, $t = -\frac{1}{3}$ e $s = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}$.

Portanto,

$$P = (1+t, 1+t, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right); \quad P' = (s, 1, 2-s) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right);$$

e

$$\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1, 1, -1).$$

Assim,

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente é a a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{PP'}$, ou seja, paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 1, -1)$. Logo,

$$r = \{P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(\frac{2}{3} - t, \frac{2}{3} + t, 2 - t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

é a reta procurada. $\square$

Capítulo 13

Exemplos de revisão

Exemplo 1

Considere os pontos $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, 4, 3)$, $C = (-1, 4, 2)$, $D = (7, 1, 3)$ e $E = (-4, 16, 5)$.

- (a) Mostre que A , B e C não são colineares.
- (b) Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A , B e C .
- (c) Determine a área do paralelogramo que possui A , B e C como vértices.
- (d) Mostre que A , B , C e D não são coplanares.
- (e) Determine o volume do paralelepípedo de vértices A , B , C e D .
- (f) Escreva o vetor $\overrightarrow{AE}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.
- (g) Determine a distância do ponto D à reta que passa pelos pontos A e B .
- (h) Determine o ponto simétrico do ponto C em relação à reta que passa pelos pontos A e B .
- (i) Determine a intersecção da reta que passa por A e B com a reta $\ell = \{(7t-7, t-1, 2t-1); t \in \mathbb{R}\}$.

Solução.

- (a) Sabemos que:

$$\begin{aligned} A, B \text{ e } C \text{ são não colineares} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AC} \text{ não são múltiplos} \\ &\iff \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0)$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -2, 6) \neq (0, 0, 0) = \vec{0}, \end{aligned}$$

concluimos que A , B e C são não colineares.

(b) Temos $\pi = \{A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$, ou seja, as equações paramétricas de π são:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 + 2t + 2s \\ z = 2 + t \end{cases} ; t, s \in \mathbb{R}.$$

Para determinar a equação cartesiana de π , sabemos que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 6)$ é perpendicular a π . Logo, a equação cartesiana de π tem a forma

$$\pi : x + y - 3z = d,$$

onde

$$d = 1 + 2 - 3(2) = -3,$$

pois $A = (1, 2, 2) \in \pi$.

Portanto, a equação cartesiana de π é

$$\pi : x + y - 3z = -3.$$

(c) Seja $\mathcal{R}$ o paralelogramo que possui A , B e C como vértices. Então,

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|(-2, -2, 6)\| = \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

(d) Sabemos que:

$$\begin{aligned} A, B, C, \text{ e } D \text{ são não coplanares} &\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AD} \text{ são LI} \\ &\iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \neq 0. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AD} = (6, -1, 1)$, e

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2, -2, 6), (6, -1, 1) \rangle \\ &= -12 + 2 + 6 = -4 \neq 0, \end{aligned}$$

concluimos que A , B , C e D não são coplanares.

(e) Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem os pontos A , B , C e D por vértices. Então:

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right| = |-4| = 4.$$

(f) Temos que $\overrightarrow{AE} = (-5, 14, 3)$. Devemos achar números reais x e y tais que:

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Ou seja,

$$(-5, 14, 3) = x(1, 2, 1) + y(-2, 2, 0).$$

Igualando as coordenadas, temos:

$$\begin{cases} -5 = x - 2y \\ 14 = 2x + 2y \\ 3 = x \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 5 + x = 5 + 3 = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Observe que os valores encontrados são compatíveis com a segunda equação: $2x + 2y = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$.

Portanto, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ e, em particular, $E \in \pi$.

(g) A reta r que passa por A e B é

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = 2 + s \end{cases}; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Seja $M = (1 + s, 2 + 2s, 2 + s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $D = (7, 1, 3)$ sobre a reta r .

Devemos achar $s \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB} \iff \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle = 0$, onde $\overrightarrow{DM} = (s - 6, 2s + 1, s - 1)$.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle &= \langle (1, 2, 1), (s - 6, 2s + 1, s - 1) \rangle = 0 \\ &\iff s - 6 + 2(2s + 1) + s - 1 = 0 \\ &\iff 2s - 7 + 4s + 2 = 0 \\ &\iff 6s = 5 \iff \boxed{s = \frac{5}{6}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overrightarrow{DM} = \left(\frac{5}{6} - 6, 2 \cdot \frac{5}{6} + 1, \frac{5}{6} - 1 \right) = \left(-\frac{31}{6}, \frac{16}{6}, -\frac{1}{6} \right)$$

e

$$d(D, r) = \|\overrightarrow{DM}\| = \frac{1}{6} \sqrt{31^2 + 16^2 + 1^2} = \frac{1}{6} \sqrt{1218}.$$

(h) Seja $N = (1 + s, 2 + 2s, 2 + s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $C = (-1, 4, 2)$ sobre a reta r .

Sendo $\overrightarrow{CN} = (s + 2, 2s - 2, s)$ e $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, temos que $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$ se, e só se:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle (s + 2, 2s - 2, s), (1, 2, 1) \rangle \\ &= s + 2 + 2(2s - 2) + s = 6s - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{s = \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Logo, $N = \left(1 + \frac{1}{3}, 2 + 2 \cdot \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Seja C' o simétrico de C em relação à reta r .

Como $N = \frac{1}{2}(C + C')$, temos que:

$$\begin{aligned} C' &= 2N - C = 2 \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (-1, 4, 2) \\ &= \left(\frac{8}{3} + 1, \frac{16}{3} - 4, \frac{14}{3} - 2\right). \end{aligned}$$

Portanto, $C' = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

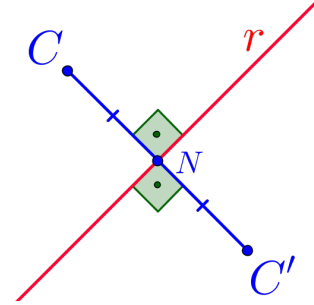


Figura 1: Exemplo 1.

(i) Para determinar a interseção das retas

$r = \{(1 + s, 2 + 2s, 2 + s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ e $\ell = \{(7t - 7, t - 1, 2t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, devemos resolver o sistema obtido igualando as coordenadas dos pontos de r e de ℓ :

$$r \cap \ell : \begin{cases} 1 + s = 7t - 7 \\ 2 + 2s = t - 1 \\ 2 + s = 2t - 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da terceira, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 4 + 2s & = & 4t - 2 \\ - & 2 + 2s & = t - 1 \\ \hline 2 & = & 3t - 1. \end{array}$$

Ou seja, $t = 1$. Substituindo este valor na terceira equação, obtemos $s = 2t - 3 = 2(1) - 3 = -1$. Como os valores $t = 1$ e $s = -1$ também satisfazem à primeira equação, pois $1 + s = 1 + (-1) = 0 = 7(1) - 7 = 7t - 7$, podemos

concluir que $(0, 0, 1)$ é o único ponto de interseção das retas r e ℓ . $\square$

Exemplo 2

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 4 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = s + 4 \\ y = -s \\ z = -3s - 1 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que r_1 e r_2 são reversas.
- (b) Determine a reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.
- (c) Determine o plano π tal que $d(\pi, r_1) = \frac{1}{3} d(r_1, r_2)$ e $d(\pi, r_2) = \frac{2}{3} d(r_1, r_2)$.

Solução.

- (a) Temos que $\vec{v}_1 = (1, 1, -1) \parallel r_1$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, -3) \parallel r_2$.

As retas r_1 e r_2 são reversas, pois:

- $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são colineares.

De fato,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \neq (0, 0, 0);$$

- $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

De fato,

$$\begin{cases} t + 3 = s + 4 \\ t + 4 = -s \\ -t - 1 = -3s - 1. \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos $2t + 7 = 4 \implies t = -\frac{3}{2}$.

Substituindo na segunda equação, temos $-s = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2} \implies s = -\frac{5}{2}$.

No entanto, substituindo $t = -\frac{3}{2}$ e $s = -\frac{5}{2}$ em ambos os lados da terceira equação, vemos que

$$-t - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad e \quad -3s - 1 = -3\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = \frac{13}{2}.$$

Como estes números são diferentes, concluímos que o sistema não tem solu-

ção. Isto é, nenhum ponto de r_1 pertence a r_2 . Ou seja, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

Portanto, r_1 e r_2 são retas reversas.

(b) Vamos determinar os números $t, s \in \mathbb{R}$ de modo que $P_1 = (t+3, t+4, -t-1) \in r_1$ e $P_2 = (s+4, -s, -3s-1)$ satisfaçam:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_1, \quad \overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_2,$$

onde $\overrightarrow{P_1P_2} = (s+4-t-3, -s-t-4, -3s-1+t+1) = (s-t+1, -s-t-4, -3s+t)$.

Assim:

$$\begin{aligned} \bullet \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1 \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1, 1, -1) \rangle = 0 \\ &\iff s-t+1 - s-t-4 + 3s-t = 0 \\ &\iff 3s-3t = 3 \iff s-t = 1, \\ \bullet \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_2 \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1, -1, -3) \rangle = 0 \\ &\iff s-t+1 + s+t+4 + 9s-3t = 0 \\ &\iff 11s-3t = -5. \end{aligned}$$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} s-t = 1 \\ 11s-3t = -5 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} -11s+11t = -11 \\ 11s-3t = -5. \end{cases}$$

Somando estas equações, obtemos: $8t = -16 \iff t = -2$.

Substituindo $t = -2$ na primeira equação, segue que: $s - (-2) = 1 \iff s = -1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P_1 &= (t+3, t+4, -t-1) = (-2+3, -2+4, 1) = (1, 2, 1), \\ P_2 &= (s+4, -s, -3s-1) = (-1+4, -(-1), -3(-1)-1) = (3, 1, 2), \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (2, -1, 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é a única reta que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

(c) Como $d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, temos que

$$d(\pi, r_1) = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{e} \quad d(\pi, r_2) = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \text{ Portanto,}$$

$$\pi \parallel r_1 \quad \text{e} \quad \pi \parallel r_2, \quad \text{pois } d(\pi, r_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad d(\pi, r_2) \neq 0.$$

Logo, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \parallel (-2, 1, -1)$,

é um vetor perpendicular a π , o que implica que $\pi : 2x - y + z = d$ para algum $d \in \mathbb{R}$.

Sendo,

$$\bullet d(\pi, r_1) = d(P_1, \pi) = \frac{|2 - 2 + 1 - d|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \iff |d - 1| = \frac{6}{3} = 2$$

$$\iff d - 1 = \pm 2 \iff \begin{cases} d = 3 \\ \text{ou} \\ d = -1, \end{cases}$$

$$\bullet d(\pi, r_2) = d(P_2, \pi) = \frac{|6 - 1 + 2 - d|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \iff |d - 7| = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

$$\iff d - 7 = \pm 4 \iff \begin{cases} d = 11 \\ \text{ou} \\ d = 3, \end{cases}$$

concluimos que $d = 3$ e, portanto, $\pi : 2x - y + z = 3$. $\square$

Exemplo 3

Considere os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 2, 2)$ e $C = (4, 5, 3)$, e a reta

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z-1.$$

(a) Determine a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A , B e C .

(b) Mostre que a reta r é paralela ao plano π .

(c) Calcule $d(r, \pi)$

Solução.

(a) Como $A, B, C \in \pi$, $\vec{AB} = (2, 1, 0)$ e $\vec{AC} = (3, 4, 1)$ são vetores paralelos ao plano π . Logo,

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 5)$$

é perpendicular ao plano π .

Assim, $\pi : x - 2y + 5z = d$, onde $d = 1 - 2 + 10 = 9$, pois $A = (1, 1, 2) \in \pi$.

Isto é,

$$\pi : x - 2y + 5z = 9.$$

(b) Como $\vec{v} = (3, 4, 1) \parallel r$, $\vec{w} = (1, -2, 5) \perp \pi$ e $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3 - 8 + 5 = 0$, temos que :

$$r \parallel \pi \quad \text{ou} \quad r \subset \pi.$$

Para mostrar que $r \parallel \pi$, basta verificar que o ponto $P = (1, 2, 1) \in r$ não pertence ao plano π .

De fato, substituindo as coordenadas de P na equação do plano π , obtemos:

$$1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 \neq 9 \implies P \notin \pi.$$

(c) Calculando, temos: $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{30}}.$ $\square$

Exemplo 4

Considere os pontos $A = (2, 3, 1)$, $B = (1, 4, 2)$ e $C = (3, 1, 2)$ e a reta r paralela ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 3)$ que passa pelo ponto $P = (1, 3, 0)$.

(a) Verifique que A , B e C não são colineares.

(b) Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A , B e C .

(c) Determine os vértices R , S e T de um triângulo tal que $\{R\} = \pi \cap r$, $S \in r$, $T \in \pi$, $\|\overrightarrow{ST}\| = \frac{4}{\sqrt{14}}$ e $\overrightarrow{ST} \perp \pi$.

Solução.

(a) Temos $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 1)$.

Os pontos A , B e C não são colineares, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro. De fato,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3, 2, 1) \neq (0, 0, 0).$$

(b) A equação paramétrica do plano π que passa pelo ponto $A = (2, 3, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 3 + t - 2s \\ z = 1 + t + s \end{cases} ; \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Como o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e passa pelo ponto A , a sua equação cartesiana é

$$\pi : 3x + 2y + z = 6 + 6 + 1 \iff \pi : 3x + 2y + z = 13.$$

(c) A equação paramétrica da reta r é

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como R é o ponto de interseção de r com o plano π , $R = (1 + t, 3 - t, 3t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que as coordenadas de R satisfazem à equação cartesiana de π :

$$\begin{aligned} 3(1 + t) + 2(3 - t) + 3t = 13 &\implies 3 + 3t + 6 - 2t + 3t = 13 \\ &\implies 9 + 4t = 13 \\ &\implies 4t = 4 \\ &\implies t = 1 \\ &\implies R = (2, 2, 3). \end{aligned}$$

Sejam $S = (1 + t, 3 - t, 3t) \in r$ e $T \in \pi$, tais que $\overrightarrow{ST} \perp \pi$ e $\|\overrightarrow{ST}\| = \frac{4}{\sqrt{14}}$.

Então,

$$\begin{aligned} d(S, \pi) = \|\overrightarrow{ST}\| = \frac{4}{\sqrt{14}} &\implies \frac{|3(1 + t) + 2(3 - t) + 3t - 13|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\implies \frac{|4t - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\implies |t - 1| = 1 \implies t - 1 = \pm 1 \\ &\implies \begin{cases} t = 2 \implies S_1 = (3, 1, 6) \\ \text{ou} \\ t = 0 \implies S_2 = (1, 3, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

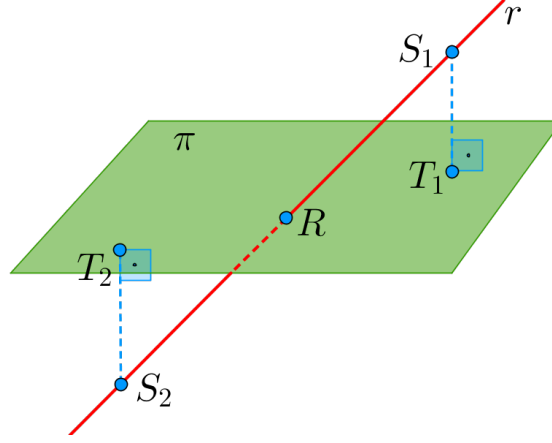


Figura 2: Exemplo 4.

Assim, os pontos S_1 e S_2 são os pontos da reta r que estão à distância $\frac{4}{\sqrt{14}}$ do plano π .

Para achar os correspondentes pontos T_1 e T_2 tais que $\triangle RT_1S_1$ e $\triangle RT_2S_2$ são triângulos retângulos em T_1 e T_2 , respectivamente, projetamos os pontos S_1 e S_2 perpendicularmente sobre o plano π .

- Seja ℓ_1 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_1 . Então,

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \{T_1\} = \ell_1 \cap \pi.$$

Como $T_1 \in \ell_1 \cap \pi$, $T_1 = (3 + 3t, 1 + 2t, 6 + t)$ e:

$$\begin{aligned} 3(3 + 3t) + 2(1 + 2t) + (6 + t) &= 13 \implies 14t + 17 = 13 \implies t = -\frac{2}{7} \\ \implies T_1 &= \left(3 - \frac{6}{7}, 1 - \frac{4}{7}, 6 - \frac{2}{7}\right) \implies T_1 = \left(\frac{15}{7}, \frac{3}{7}, \frac{40}{7}\right). \end{aligned}$$

- Seja ℓ_2 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_2 . Então,

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \{T_2\} = \ell_2 \cap \pi.$$

Como $T_2 \in \ell_2 \cap \pi$, $T_2 = (1 + 3t, 3 + 2t, t)$ e:

$$\begin{aligned} 3(1 + 3t) + 2(3 + 2t) + t &= 13 \implies 14t + 9 = 13 \implies t = \frac{2}{7} \\ \implies T_2 &= \left(1 + \frac{6}{7}, 3 + \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right) \implies T_2 = \left(\frac{13}{7}, \frac{25}{7}, \frac{2}{7}\right). \end{aligned}$$

□

Exemplo 5

Considere os planos

$$\pi_1 : mx - ny + z = 2 \quad \text{e} \quad \pi_2 : nx - my + nz = 4,$$

onde $m, n \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine $m, n \in \mathbb{R}$, de modo que π_1 e π_2 sejam paralelos.
- (b) Determine $m, n \in \mathbb{R}$, de modo que $\pi_1 \cap \pi_2$ seja uma reta perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, 2)$.

Solução.

(a) Das equações dos planos, temos $\vec{v}_1 = (m, -n, 1) \perp \pi_1$ e $\vec{v}_2 = (n, -m, n) \perp \pi_2$. Logo,

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}_2 \text{ são colineares} \iff \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Isto é, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= \left(\begin{vmatrix} -n & 1 \\ -m & n \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m & 1 \\ n & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -n \\ n & -m \end{vmatrix} \right) \\ &= (-n^2 + m, -nm + n, -m^2 + n^2) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -n^2 + m = 0 \\ -nm + n = 0 \\ -m^2 + n^2 = 0. \end{cases}$$

Da terceira identidade, obtemos: $n^2 = m^2 \iff n = \pm m$. Substituindo na primeira identidade, temos: $-m^2 + m = 0 \iff m(-m + 1) = 0 \iff m = 0$ ou $m = 1$.

Se $m = 0$, $n = m = 0$ e $\vec{v}_2$ seria o vetor nulo, uma contradição.

Assim, devemos ter, necessariamente, $m = 1$ e, portanto, $n = \pm 1$. Verifique que a segunda identidade também é satisfeita para estes valores.

As soluções são: $\begin{cases} m = 1 & \text{e} & n = 1; \\ m = 1 & \text{e} & n = -1. \end{cases}$

(b) Seja $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Como $A = (0, 0, 2) \in r$, temos $A \in \pi_1$ e $A \in \pi_2$.

Em particular, $A \in \pi_2 \iff n \cdot 0 + m \cdot 0 + n \cdot 2 = 4 \iff n = 2$.

Como $\vec{v}_1 = (m, -2, 1) \perp \pi_1$, $\vec{v}_2 = (2, -m, 2) \perp \pi_2$ e $r = \pi_1 \cap \pi_2$, segue que

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \parallel r$, onde:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -m & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -2 \\ 2 & -m \end{vmatrix} \right) = (-4 + m, -2m + 2, -m^2 + 4).$$

Sendo $\vec{v} = (2, 1, -1) \perp r$, devemos ter $\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle \\ &= \langle (2, 1, -1), (-4 + m, -2m + 2, -m^2 + 4) \rangle \\ &= -8 + 2m - 2m + 2 + m^2 - 4 \\ &= m^2 - 10. \end{aligned}$$

Portanto, $m = \pm\sqrt{10}$. $\square$

Exemplo 6

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases} \quad e \quad r_2 : x = y - 1 = z - 2.$$

- (a) Mostre que r_1 e r_2 são paralelas.
- (b) Determine a equação cartesiana do plano que contém as retas r_1 e r_2 .
- (c) Calcule $d(r_1, r_2)$.

Solução.

(a) Basta mostrar que as retas r_1 e r_2 são paralelas a uma mesma direção e que um ponto de uma das retas não pertence à outra.

Como $r_1 = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 : 2x - y - z = 8$ e $\pi_2 : -x + y = -4$, temos que $\vec{v}_1 = (2, -1, -1) \perp r_1$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0) \perp r_1$.

Logo, $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \parallel r_1$, onde:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, 1).$$

Da forma simétrica da equação de r_2 , vemos que $r_2 \parallel \vec{v} = (1, 1, 1)$.

Portanto, $r_1 \parallel r_2$ ou $r_1 = r_2$.

Determinemos um ponto $A \in r_1$.

Tomando $y = 0$ nas equações dos planos que definem r_1 , obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - z = 8 \\ -x = -4 \end{cases} \implies x = 4 \text{ e } z = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \implies A = (4, 0, 0) \in r_1.$$

Para mostrar que $r_1 \parallel r_2$, vamos verificar que $A \notin r_2$. De fato, substituindo as coordenadas de A na equação de r_2 , obtemos a identidade impossível $4 = 0 - 1 = 0 - 2$.

Logo, $A \notin r_2$ e, portanto, $r_1 \parallel r_2$.

(b) Para determinar a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2 , devemos conhecer um ponto de π e um vetor perpendicular a π .

Como $r_1 \subset \pi$, segue que $A = (4, 0, 0) \in \pi$ e $\vec{v} = (1, 1, 1) \parallel \pi$.

Uma vez que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor paralelo a π que não é colinear com $\vec{v}$, para todo ponto $B \in r_2$.

Tomando $x = 0$ na equação de r_2 , obtemos $y - 1 = 0$ e $z - 2 = 0$, ou seja, $y = 1$ e $z = 2$. Logo, $B = (0, 1, 2) \in r_2$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 2) \parallel \pi$.

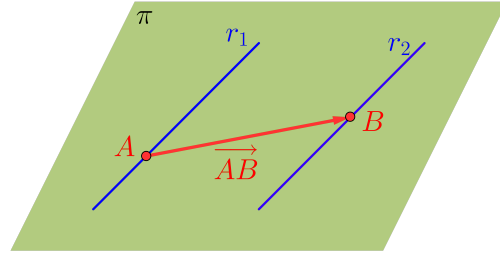


Figura 3: Exemplo 6.

Como $\vec{v} \parallel \pi$ e $\overrightarrow{AB} \parallel \pi$, concluímos que $\vec{v} \times \overrightarrow{AB} \perp \pi$, onde:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -6, 5).$$

Assim, $\pi : x - 6y + 5z = d$, onde $d = 4 - 6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4$, pois $A = (4, 0, 0) \in \pi$.

(c) Como $r_1 \parallel r_2$, temos que $d(r_1, r_2) = (B, r_1)$, onde $B = (0, 1, 2) \in r_2$.

Seja $Q = (t + 4, t, t) \in r_1$ o pé da perpendicular a r_1 baixada do ponto B .

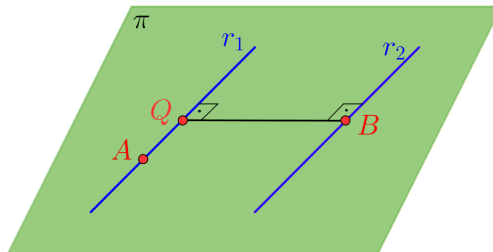


Figura 4: Exemplo 6.

Sendo $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp r_1$, temos $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp \vec{v} = (1, 1, 1)$,

ou seja,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{BQ}, \vec{v} \rangle &= t + 4 + t - 1 + t - 2 = 3t + 1 = 0 \\ \implies t &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Então, $d(B, r_1) = d(B, Q)$.

Logo,

$$\overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{1}{3} + 4, -\frac{1}{3} - 1, -\frac{1}{3} - 2\right) = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}d(r_1, r_2) &= d(B, Q) = \|\overrightarrow{BQ}\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{121 + 16 + 49} = \frac{1}{3}\sqrt{186}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7

Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determine a equação paramétrica da reta r .
- (b) Determine a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto A .
- (c) Determine as retas paralelas à reta r contidas no plano π que distam $\sqrt{6}$ de r .

Solução.

(a) Temos:

$$\left. \begin{array}{l} (1, -1, 1) \perp r \\ (2, 1, 0) \perp r \end{array} \right\} \implies (1, -1, 1) \times (2, 1, 0) = (-1, 2, 3) = \vec{v} \parallel r.$$

Tomando $y = 0$ nas equações que definem r , obtemos que $B = (x, 0, z) \in r$ se, e só se,

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 - x \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \iff B = (1, 0, 0).$$

Logo, a equação paramétrica de r é:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Temos $\vec{v} = (-1, 2, 3) \parallel \pi$ e $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 1) \parallel \pi$, pois $\vec{v} \parallel r$, $r \subset \pi$ e $A, B \in r$. Logo,

$$\vec{v} \times \overrightarrow{BA} = (-4, 1, -2) \perp \pi.$$

Como $B = (1, 0, 0) \in \pi$, obtemos

$$\pi : 4x - y + 2z = 4.$$

(c) Seja $\ell \subset \pi$ tal que $\ell \perp r$ e $B \in \ell$.

Então,

$$\begin{aligned} & (4, -1, 2) \perp \ell \text{ e } (-1, 2, 3) \perp \ell \\ \Rightarrow & (4, -1, 2) \times (-1, 2, 3) = \\ & (-7, -14, 7) \parallel \ell \\ \Rightarrow & (1, 2, -1) \parallel \ell. \end{aligned}$$

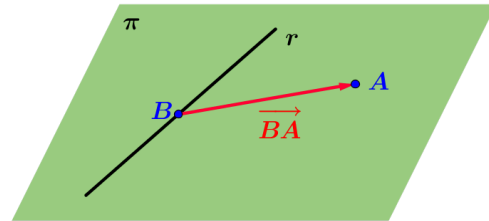


Figura 5: Exemplo 7.

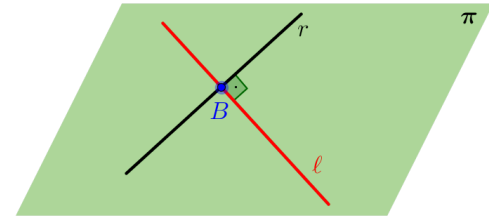


Figura 6: Exemplo 7.

Como $B = (1, 0, 0) \in \ell$, obtemos as equações paramétricas de ℓ :

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja $P = (1 + t, 2t, -t) \in \ell$ tal que $d(P, B) = \sqrt{6}$. Então:

$$\begin{aligned} d(P, B)^2 = 6 & \Leftrightarrow t^2 + 4t^2 + t^2 = 6 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow P_1 = (2, 2, -1) \\ \text{ou} \\ t = -1 \Rightarrow P_2 = (0, -2, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Para $P_1 = (2, 2, -1)$, obtemos a reta

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

e para $P_2 = (0, -2, 1)$, a reta

$$r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

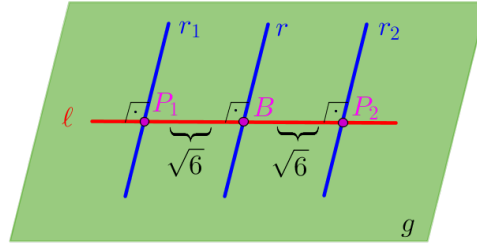


Figura 7: Exemplo 7.

Assim, r_1 e r_2 são as retas paralelas à reta r contidas no plano π que distam $\sqrt{6}$ de r . $\square$

Exemplo 8

Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$ que contêm os pontos $A = (2, 3, 1)$ e $B = (4, 1, 3)$, com centro no plano $\pi : 2x + y + z = 3$.

Solução.

O centro das esferas procuradas deve ser um ponto equidistante de A e B . Seja $\bar{\pi}$ o conjunto dos pontos equidistantes de A e B . Já provamos que (ver exemplo 3, do capítulo 7),

$$\bar{\pi} = \{P \mid d(P, A) = d(P, B)\}$$

é o plano que passa pelo ponto médio $M = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(6, 4, 4) = (3, 2, 2)$ e é

perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 2)$, ou seja, $(1, -1, 1) \perp \bar{\pi}$.

Assim, a equação de $\bar{\pi}$ é da forma $x - y + z = d$, onde d se calcula sabendo que $M \in \bar{\pi}$. Logo, $d = 3 - 2 + 2 = 3$ e

$$\bar{\pi} : x - y + z = 3.$$

Então, o centro C das esferas procuradas deve pertencer à reta $r = \pi \cap \bar{\pi}$. Determinemos a reta r :

$$r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3. \end{cases}$$

Como $\vec{v} = (1, -1, 1) \perp r$ e $\vec{w} = (2, 1, 1) \perp r$, temos $\vec{v} \times \vec{w} = (-2, 1, 3) \parallel r$. Além disso, $P = (0, 0, 3) \in r$.

Portanto, $r = \{(-2t, t, 3t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Sendo $C \in r$ e $d(A, C) = \sqrt{17}$, temos $C = (-2t, t, 3t + 3)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e

$$(-2t - 2)^2 + (t - 3)^2 + (3t + 2)^2 = 17.$$

Desenvolvendo os binômios do lado esquerdo desta identidade, segue que:

$$\begin{aligned} 4t^2 + 8t + 4 + t^2 - 6t + 9 + 9t^2 + 12t + 4 = 17 &\iff 14t^2 + 14t = 0 \\ &\iff t(t + 1) = 0 \\ &\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -1. \end{aligned}$$

Para $t = 0$, obtemos a esfera $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 17$ de centro $C_1 = (0, 0, 3)$.

Para $t = -1$, obtemos a esfera $\mathcal{S}_2 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 17$ de centro $C_2 = (2, -1, 0)$. $\square$

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas das retas paralelas ao plano $\pi_1 : x + 3y - z = 3$ e contidas no plano $\pi_2 : 2x + y + z = 5$, que distam $\sqrt{300}$ da reta $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$.

Solução.

Sejam $\vec{v}_1 = (1, 3, -1) \perp \pi_1$ e $\vec{v}_2 = (2, 1, 1) \perp \pi_2$.

Como $\vec{v}_1 \perp \ell$ e $\vec{v}_2 \perp \ell$, devemos ter $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \parallel \ell$, onde:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4, -3, -5).$$

Este vetor é a direção da reta ℓ . Determinemos um ponto $A \in \ell$.

Sabemos que

$$\ell = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 2x + y + z = 5. \end{cases}$$

Fazendo $x = 0$ nestas equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3y - z = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Somando as equações, temos $4y = 8$, ou seja, $y = 2$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos $z = 5 - y = 5 - 2 = 3$.

Portanto, $A = (0, 2, 3) \in \ell$.

Seja r uma reta contida em π_2 e paralela ao plano π_1 . Então, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \parallel r$, ou seja, r é paralela à reta ℓ .

Seja agora $\bar{\ell}$ a reta perpendicular a ℓ , contida no plano π_2 , que passa pelo ponto A .

Como $\bar{\ell} \subset \pi_2$, temos $\vec{v}_2 \perp \bar{\ell}$, e, como $\bar{\ell} \perp \ell$, temos $\vec{v} \perp \bar{\ell}$.

Portanto, $\vec{v}_2 \times \vec{v} \parallel \bar{\ell}$, onde

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 \times \vec{v} &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, 14, -10).\end{aligned}$$

Assim, $\vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 \times \vec{v}) = (-1, 7, -5) \parallel \bar{\ell}$ e $\bar{\ell} = \{(-t, 2 + 7t, 3 - 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

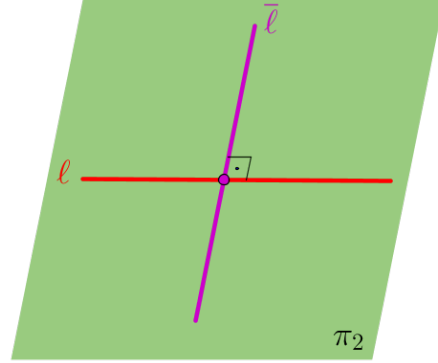


Figura 8: Exemplo 9.

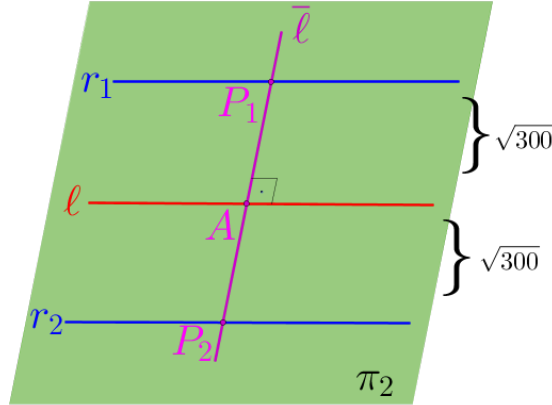


Figura 9: Exemplo 9.

Na reta $\bar{\ell}$ determinemos os pontos que estão a uma distância de $\sqrt{300}$ do ponto A .

Seja $P = (-t, 2 + 7t, 3 - 5t) \in \bar{\ell}$ tal que $d(P, A)^2 = 300$. Sendo,

$$d(P, A)^2 = (-t)^2 + (2 + 7t - 2)^2 + (3 - 5t - 3)^2 = t^2 + 49t^2 + 25t^2 = 75t^2 = 300,$$

obtemos $t^2 = \frac{300}{75} = 4$. Portanto, $t = \pm 2$.

Substituindo estes valores de t na expressão do ponto P , obtemos os pontos:

$$P_1 = (-2, 2 + 7 \cdot 2, 3 - 5 \cdot 2) = (-2, 16, -7),$$

$$P_2 = (-(-2), 2 + 7 \cdot (-2), 3 - 5 \cdot (-2)) = (2, -12, 13).$$

Como as retas r_1 e r_2 procuradas são paralelas ao vetor $\vec{v} = (4, -3, -5)$ e passam pelos pontos P_1 e P_2 , respectivamente, estas retas são:

$$r_1 : \{(-2 + 4t, 16 - 3t, -7 - 5t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$r_2 : \{(2 + 4t, -12 - 3t, 13 - 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Exemplo 10

Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 4, 3)$, e o plano

$$\pi : x - y + z = 1.$$

- (a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de A e B .
- (b) Determine o ponto $C = (x, y, z) \in \pi$ tal que $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CB}\| = \sqrt{11}$ e $x + y - 2z < 0$.
- (c) Determine a área do triângulo de vértices A , B e C , e o plano que contém este triângulo.

Solução.

(a) Seja $\bar{\pi} = \{P \mid d(P, A) = d(P, B)\}$. Então, $\bar{\pi}$ é o plano perpendicular ao vetor $\vec{AB} = (2, 2, 2) \parallel (1, 1, 1)$, que passa pelo ponto $\frac{A+B}{2} = (2, 3, 2)$. Logo:

$$\bar{\pi} : x + y + z = 7.$$

(b) Seja $C = (x, y, z) \in \pi$ tal que $\|\vec{CA}\| = \|\vec{CB}\| = \sqrt{11}$ e $x + y - 2z < 0$. Como $d(C, A) = d(C, B)$, temos $C \in \bar{\pi}$.

$$\text{Logo, } C \in \pi \cap \bar{\pi} = r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 7. \end{cases}$$

Sendo $\vec{v} = (1, -1, 1) \perp r$ e $\vec{w} = (1, 1, 1) \perp r$, temos que $\vec{v} \times \vec{w} = (-2, 0, 2) \parallel (-1, 0, 1) \parallel r$.

Fazendo $x = 0$ nas equações que definem r , temos que $P_0 = (0, y, z) \in r$ se, e só se,

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ y + z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z = 8 \\ y = 7 - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 \\ y = 3 \end{cases} \iff P_0 = (0, 3, 4) \in r.$$

Logo, as equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 \\ z = t + 4 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $C \in r$, $C = (-t, 3, t+4)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Além disso, $d(C, A)^2 = 11$.

Assim,

$$\begin{aligned} (-t-1)^2 + (3-2)^2 + (t+4-1)^2 = 11 &\iff t^2 + 2t + 1 + 1 + t^2 + 6t + 9 = 11 \\ &\iff 2t^2 + 8t = 0 \iff t^2 + 4t = 0 \iff t(t+4) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo estes valores de t , vemos que $C = (0, 3, 4)$ ou $C = (4, 3, 0)$. Mas como as coordenadas de C devem satisfazer à desigualdade $x + y - 2z < 0$, devemos ter $C = (0, 3, 4)$.

(c) Sabemos que:

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= (-1, 1, 3) \end{aligned} \implies \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, -8, 4),$$

obtemos

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \|(4, -8, 4)\| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{96} = \frac{4}{2} \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.$$

Consideremos agora o plano π que contém o triângulo $\triangle ABC$. Então,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, -8, 4) \perp \pi,$$

isto é, $(1, -2, 1) \perp \pi$. Portanto,

$$\pi : x - 2y + z = 0 - 6 + 4 = -2,$$

pois $C = (0, 3, 4) \in \pi$. $\square$

Exemplo 11

Considere o ponto $A = (a, 2a, a)$, onde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, e as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3s + 1 \\ z = s + 1 \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $C \in r_1$ de modo que $\overrightarrow{AC}$ seja perpendicular à reta r_2 e $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$.

(b) Mostre que os pontos A e C , do item anterior, e a reta r_2 não são coplanares.

Solução.

(a) Seja $C = (2s, 3s+1, s+1) \in r_1$. Então, $\overrightarrow{AC} = (2s-a, 3s+1-2a, s+1-a)$.

Como $\overrightarrow{AC} \perp r_2$, temos que $\overrightarrow{AC} \perp (2, 1, -1)$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AC}, (2, 1, -1) \rangle &= 4s - 2a + 3s + 1 - 2a - s - 1 + a = 0 \\ &\iff 6s - 3a = 0 \iff a = 2s. \end{aligned}$$

Além disso, como $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$, segue que:

$$\begin{aligned} |(2s-2s, 3s+1-4s, s+1-2s)| &= \sqrt{2} \iff |(0, 1-s, 1-s)| = \sqrt{2} \\ &\iff (1-s)^2 + (1-s)^2 = 2 \iff 2(1-s)^2 = 2 \iff (1-s)^2 = 1 \\ &\iff 1-s = \pm 1 \iff \begin{cases} s = 2 \\ \text{ou} \\ s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ \text{ou} \\ a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Sendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a = 4$ e, portanto, $C = (4, 7, 3)$.

(b) Seja π o plano que contém a reta r_2 e o ponto $A = (4, 8, 4)$.

Seja $B = (1, 2, 2) \in r_2$. Como $\vec{v} = (2, 1, -1) \parallel \pi$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-3, -6, -2) \parallel \pi$, temos que $\vec{v} \times \vec{w} \perp \pi$, onde:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \right) = (-8, 7, -9).$$

Logo, $\pi : -8x + 7y - 9z = -8 + 14 - 18 = -12$, pois $B = (1, 2, 2) \in \pi$.

Para mostrar que A, C e r_2 não são coplanares, basta verificar que $C = (4, 7, 3) \notin \pi$.

De fato, substituindo as coordenadas de C no lado esquerdo da equação de π , obtemos:

$-8 \times 4 + 7 \times 7 - 9 \times 3 = -32 + 49 - 27 = -59 + 49 = -10 \neq -12$,
mostrando, assim, que $C \notin \pi$. $\square$