

Trabalho No 1

1 - Resolução de Sistemas Lineares.

Trabalho em Grupo de até 3 Alunos

Cada Grupo deve:

- 1 - entregar um relatório impresso que responda os problemas deste trabalho.
- 2 – apresentar oralmente para uma banca mista (professores e alunos) o desenvolvimento do trabalho.
- 3 – participar da banca mista.

A nota final de cada Grupo será a media das notas obtidas por cada Grupo nos três itens anteriores.

Características do Relatório Impresso

Cada Relatório Impresso deve:

- 1 – ter no máximo 15 páginas.
- 2 – ter a seguinte estrutura: Título e Identificação dos autores do Trabalho, Introdução, Definição e Desenvolvimento do Problema, Resultados Numéricos, Conclusões e Referencias.
- 3 – Introdução (máximo 1 página), Definição e Desenvolvimento do Problema (máximo 6 página), Resultados Numéricos (máximo 6 página), Conclusões (máximo 1 página) e Referencias (máximo 1 página) .

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Problema 1: Resolução de Sistemas Lineares.

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e suponha que queremos aproximar esta função por um polinômio de grau $n-1$ como segue:

$$f(x) \approx p(x) = c_n x^{n-1} + \dots + c_2 x^1 + c_1 x^0 = \sum_{i=1}^n c_i x^{i-1}$$

A expressão abaixo define um erro absoluto para esta aproximação (distancia entre a função e o polinômio).

$$e_a(c_1, c_2, \dots, c_n) = \sqrt{\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n c_i x^{i-1} - f(x) \right]^2 dx} \quad (1)$$

Os coeficientes c_i são determinados exigindo que o erro seja o menor possível (mínimo absoluto da função $e_a(c_1, c_2, \dots, c_n)$).

$$\frac{\partial e_a(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_i} = 0 \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n$$

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Problema 1: Resolução de Sistemas Lineares.

Calculando estas derivadas obtemos:

$$\frac{\partial e_a}{\partial c_i} = \left[\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} - f(x) \right]^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} - f(x) \right] x^{i-1} dx \right] = 0$$

$$\text{ou } \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n c_j x^{j-1} - f(x) \right] x^{i-1} dx = \sum_{j=1}^n \int_0^1 c_j x^{j+i-2} dx - \int_0^1 f(x) x^{i-1} dx = 0$$

$$\text{ou } \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int_0^1 x^{j+i-2} dx}_{a_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 f(x) x^{i-1} dx}_{b_i}$$

Que em forma matricial corresponde ao seguinte sistema.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = b_i \quad \text{com } i = 1, \dots, n \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{C}_{n \times 1} = \mathbf{B}_{n \times 1} \quad (2)$$

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Problema 1: Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Encontre os coeficientes c_i deste sistema (2) utilizando os métodos: Eliminação de Gauss, Método da Iteração (Jacobi), Método de Seidel (Gauss-Seidel), Método do Relaxamento, Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado se a matriz não for simétrica para:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Grupo 1 } f(x) = x^3 - x^2 + x + 1, \\ \text{Grupo 2 } f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1, \\ \text{Grupo 3 } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, \\ \text{Grupo 4 } f(x) = x^3 + x^2 - x + 1, \\ \text{Grupo 5 } f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1, \\ \text{Grupo 6 } f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1. \end{array} \right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Problema 1: Resolução de Sistemas Lineares.

- 1.2 Determine a matriz inversa $\mathbf{A}_{n \times n}^{-1}$ empregando os métodos citados acima, sabendo que $\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{A}_{n \times n}^{-1} = \mathbf{E}_{n \times n}$.
- 1.3 Liste os algoritmos computacionais usados para cada método no Apêndice do Relatório.
- 1.4 Contabilize para cada método o número total de somas (diferenças) e multiplicações (divisões) e o número de iterações de cada método iterativo. Use como critério de parada para os métodos iterativos $|c_i^{k+1} - c_i^k| < 10^{-4}$.
- 1.5 Para cada método estime o tempo de máquina necessário para obter resultados aceitáveis.
- 1.6 Calcule o erro para cada método obtido pela expressão (1).
- 1.7 Determine o condicionamento da matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ para as seguintes normas: m-norma, l-norma e k-norma.
- 1.8 Compare o desempenho de todos os métodos para os itens 1.1 a 1.6 e tire conclusões.

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Problema 2: Resolução de Sistemas Lineares.

Seja o sistema $\mathbf{A}_{36 \times 36} \mathbf{x}_{36 \times 1} = \mathbf{b}_{36 \times 1}$, onde a matriz $\mathbf{A}_{36 \times 36}$ e o vetor $\mathbf{b}_{36 \times 1}$ são definidos nos arquivos correspondentes em anexo em formato TXT e XLS.

2.1 Resolva o sistema utilizando os métodos: Eliminação de Gauss, Método da Iteração, Método de Seidel, Método do Relaxamento, Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado. Use como critério de parada para os métodos iterativos $\left| c_i^{k+1} - c_i^k \right| < 10^{-4}$.

2.2 Determine o condicionamento da matriz $\mathbf{A}_{36 \times 36}$ para as seguintes normas: m-norma, l-norma e k-norma.

2.3 Compare o desempenho de todos os métodos e tire conclusões.