

1- Resolução de Sistemas Lineares.

1.1- Matrizes e Vetores.

1.2- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Exatos (Diretos).

1.3- Resolução de Sistemas Lineares de Equações Algébricas por Métodos Iterativos.

1.4- Convergência dos Métodos Iterativos.

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Método da Iteração:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} \quad (2)$$

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \alpha_{ii} = 0, \quad i = (1, \dots, n) \\ \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \end{cases} \quad (3)$$

Muitas vezes ao reduzir (1) para (2) é conveniente que $\alpha_{ii} \neq 0$. Isto pode ser feito $\alpha_{ii} = 0 = \alpha_{ii}^1 + \alpha_{ii}^2$. Logo as formulas do método serão:

$$\begin{cases} x_i^0 = \beta_i \\ x_i^{k+1} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Método da Iteração

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}^1}, \alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^2}{a_{ii}^1}, \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^1} \quad i = (1, \dots, n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^2 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} \mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} \mathbf{x}^0) = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}^2 \mathbf{x}^0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{x}^k = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} \mathbf{x}^{k-1} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}^2 + \dots + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}^{k-1}) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}^k \mathbf{x}^0 \quad (*) \end{array} \right.$$

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Nas duas telas a seguir mostraremos um resultado intermediário importante na prova do teorema $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l_{n \times n} = (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})^{-1}$.

Considere a convergência do seguinte processo iterativo:

Seja $\mathbf{F}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k$, $\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{k-1} + \mathbf{D}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{D}_{k-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}_{k-1})$ e $\|\mathbf{F}_0\| < 1$

logo $\mathbf{F}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)$,

$\mathbf{F}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_1(\mathbf{E} + \mathbf{F}_1) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{F}_1] =$

$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)] =$

$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0)[\mathbf{E} + \mathbf{F}_0\mathbf{F}_0] = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^2 + \mathbf{F}_0^3),$

.....

$\mathbf{F}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_k = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0(\mathbf{E} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^2 + \cdots + \mathbf{F}_0^{k+1}) =$

$\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{D}_0 \sum_{l=0}^{k+1} \mathbf{F}_0^l = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0) \sum_{l=0}^{k+1} \mathbf{F}_0^l,$

ja que $\mathbf{A}\mathbf{D}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{F}_0$ onde $\mathbf{F}_0^0 = \mathbf{E}$.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Se $\|\mathbf{F}_0\| < 1$ o processo iterativo anterior converge e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{F}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{D}_k) = \mathbf{E} - \mathbf{A} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}_k = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{D}_k = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}. \text{ Já que } \mathbf{F}_k = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0) \sum_{l=0}^{k+1} \mathbf{F}_0^l$$

e $\mathbf{0} = \mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}$ do resultado anterior segue

$$\mathbf{0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{F}_k = \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = \mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{F}_0) \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{F}_0^l = (\mathbf{E} - \mathbf{F}_0)^{-1}.$$

Se $\mathbf{F}_0 = \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}$ segue $\sum_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{n \times n}^l = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_{n \times n})^{-1}$. Note que $\|\boldsymbol{\alpha}_{n \times n}\| < 1$

é a hipótese do teorema que queremos provar. Logo, o resultado acima pode ser aplicado à matriz $\boldsymbol{\alpha}_{n \times n}$.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Se $\|\alpha\| < 1$ segue $\|\alpha^k\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, conseqüentemente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{E} + \alpha_{n \times n} + \alpha_{n \times n}^2 + \dots + \alpha_{n \times n}^{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n \times n}^k = (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})^{-1}$$

Se passamos ao limite em (*) quando $k \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} [(\mathbf{E} + \alpha_{n \times n} + \alpha_{n \times n}^2 + \dots + \alpha_{n \times n}^{k-1})\beta + \alpha_{n \times n}^k \mathbf{x}^0] \\ &= \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{E} + \alpha_{n \times n} + \alpha_{n \times n}^2 + \dots + \alpha_{n \times n}^{k-1})}_{(\mathbf{E} + \alpha_{n \times n})^{-1}} \beta + \boxed{\underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n \times n}^k \mathbf{x}^0}_{\text{zero}}} = (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})^{-1} \beta \quad (**) \end{aligned}$$

Isto prova a convergência do processo iterativo, ou seja, que existe o limite. Da equação (**) segue que

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})^{-1} \beta \text{ ou } (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n}) \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})(\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})^{-1} \beta \text{ ou } (\mathbf{E} - \alpha_{n \times n}) \mathbf{x} = \beta$$

ou $\mathbf{x} = \beta + \alpha_{n \times n} \mathbf{x}$ que significa que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k$ (**) é solução do sistema (2). Como a matriz $(\mathbf{E} - \alpha_{n \times n})$ é não singular o sistema (2) tem uma única solução.

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Como consequência do teorema anterior segue.

Corolário 1: O método da iteração para o sistema (2) converge se for verificada uma das desigualdades:

$$1) \quad \|\alpha_{n \times n}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\text{m-norma}) \text{ ou}$$

$$2) \quad \|\alpha_{n \times n}\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\text{l-norma}) \text{ ou}$$

$$3) \quad \|\alpha_{n \times n}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1 \quad (\text{k-norma})$$

Em particular se os elementos da matriz α satisfazem $|\alpha_{ij}| < \frac{1}{n}$ então o método da iteração converge (n é o número de incógnitas).

1.4.1- Convergência do Método da Iteração (**Jacobi**)

Corolário 2: Para o sistema $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$

o método da iteração converge se for verificada uma das desigualdade abaixo:

$$1) |a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$2) |a_{jj}| > \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}| \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$1) \sum_j |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$2) \sum_i |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ii} = 0$$

$$|\alpha_{i1}| + |\alpha_{i2}| + \dots + |\alpha_{ii} = 0| + \dots + |\alpha_{in}| < 1$$

$$\left| -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} \right| + \left| -\frac{a_{i2}}{a_{ii}} \right| + \dots + |\alpha_{ii} = 0| + \dots + \left| -\frac{a_{in}}{a_{ii}} \right| < 1$$

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}| < |a_{ii}|$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Explicado na
aula anterior.

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração (**Jacobi**)

Sejam $\mathbf{x}^{k-1}$ e $\mathbf{x}^k$ duas aproximações sucessivas da solução do sistema linear $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$. Para $p \geq 1$ segue

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\| &= \left\| \underbrace{\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k + (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+1}) + (\mathbf{x}^{k+2} - \mathbf{x}^{k+2}) + \dots + (\mathbf{x}^{k+p-1} - \mathbf{x}^{k+p-1})}_{\text{é zero, mas esta manipulação permite usar a desigualdade triangular}} \right\| \\ &\leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| + \|\mathbf{x}^{k+2} - \mathbf{x}^{k+1}\| + \dots + \|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^{k+p-1}\| \quad (4) \end{aligned}$$

como $\mathbf{x}^{m+1} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x}^m + \boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{x}^m = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x}^{m-1} + \boldsymbol{\beta}$ segue $\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m = \mathbf{a}_{n \times n} (\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1})$

$$\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\| \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{m-k} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \quad \forall m > k > 1$$

$$\begin{aligned} \text{logo de (4) segue } \|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\| &\leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| + \underbrace{\|\mathbf{x}^{k+2} - \mathbf{x}^{k+1}\|}_{\|\mathbf{a}_{n \times n}\| \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|} + \dots + \underbrace{\|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^{k+p-1}\|}_{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{p-1} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \end{aligned}$$

Na tela a seguir mostramos este resultado em detalhes!

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração (**Jacobi**)

$$\|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\| \leq \underbrace{[1 + \|\mathbf{a}_{n \times n}\| + \cdots + \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Progressão} \\ \text{Geométrica} \end{array} \right\} S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ com } \begin{cases} a_i = qa_{i-1} \text{ (razão)} \\ a_1 \text{ (termo inicial)} \end{cases}$$

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1} = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ se } |q| < 1. \text{ Logo,}$$

$$\underbrace{[1 + \|\mathbf{a}_{n \times n}\| + \cdots + \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}} = \sum_{i=1}^p \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{i-1}, \text{ com } \begin{cases} q = \|\mathbf{a}_{n \times n}\| < 1 \text{ (razão)} \\ a_1 = 1 \text{ (termo inicial)} \end{cases}.$$

$$\text{Como } \sum_{i=1}^p \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{i-1} = \frac{1}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|}, \text{ logo}$$

$$\|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\| \leq \underbrace{[1 + \|\mathbf{a}_{n \times n}\| + \cdots + \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{p-1}]}_{\text{Progressão Geométrica}} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$$

passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$ nesta desigualdade obtemos

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração (**Jacobi**)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{k+p} = \mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \quad \forall k \geq 1 \quad (5) \text{ ou}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \quad (6) \text{ se } \|\mathbf{a}_{n \times n}\| \leq \frac{1}{2} \text{ então segue que}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \text{ logo se } \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| < \varepsilon \text{ consequentemente}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon. \text{ No caso mais geral, se } q = \|\mathbf{a}_{n \times n}\| < 1 \text{ e } \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| < \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

$$\text{então } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \varepsilon \text{ e para cada componente } |x_i - x_i^k| < \varepsilon \quad (i=1, \dots, n)$$

Note que nestes cálculos não foram considerados erros devidos à **Aritmética de Precisão Finita** (round-off errors). Ou seja, é assumido que os cálculos são exatos.

1.4.2- Estimativa do Erro do Método da Iteração (**Jacobi**)

Se usamos (6) para estimar a norma da diferença entre duas aproximações sucessivas segue

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \quad (6)$$

como $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\| \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\|^k \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|$ substituindo em (6)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|^k}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|. \text{ Como caso particular, se escolhermos}$$

$$\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta}, \text{ então } \mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_{n \times n} \boldsymbol{\beta} \text{ e } \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = \|\mathbf{a}_{n \times n} \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\| \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

$$\text{Portanto, } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\boldsymbol{\beta}\| \quad (6')$$

Esta desigualdade permite estimar o erro que estamos cometendo na iteração k. Note que este erro depende apenas dos dados do problema (a matriz $\mathbf{a}_{n \times n}$ e o vetor $\boldsymbol{\beta}$).

1.4.3- Convergência do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

Primeira condição suficiente para a convergência do método de Seidel (*Norma m*).

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ (7) se verifica a condição $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1$ com $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ (*m-norma*), então o método de Seidel converge para sua única solução

$\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Note que a prova deste teorema prova como caso particular o **Corolário 1** sobre a convergência do método da iteração.

Prova: Seja $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ a aproximação k do método de Seidel. Ou seja,

$$x_i^k = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{k-1} \quad (i=1, \dots, n) \quad (8)$$

Se $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1$ o sistema (7) terá uma única solução que pode

1.4.3- Convergência do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

ser encontrada pelo método da iteração. Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a solução exata de

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (9)$$

Subtraindo (8) de (9) segue

$$x_i - x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} (x_j - x_j^k) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} (x_j - x_j^{k-1}) \text{ logo}$$

$$|x_i - x_i^k| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^k| + \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{k-1}|. \text{ Lembrando a definição de}$$

$$\text{m-norma } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m = \max_i |x_i - x_i^k| \text{ segue que } |x_j - x_j^k| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m$$

Que substituindo na desigualdade anterior segue

$$|x_i - x_i^k| \leq p_i \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m + q_i \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \text{ onde } p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \text{ e } q_i = \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| \quad (10)$$

Denotemos por $s=s(k)$ o valor da componente que verifica

$$|x_s - x_s^k| = \max_i |x_i - x_i^k| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m$$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

A desigualdade (10) é válida para todas as componentes i , logo é válida para a componente s e segue

$$|x_s - x_s^k| \leq p_s \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m + q_s \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \quad \text{onde } p_s = \sum_{j=1}^{s-1} |\alpha_{sj}| \text{ e } q_s = \sum_{j=s}^n |\alpha_{sj}|$$

$$|x_s - x_s^k| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq p_s \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m + q_s \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \quad \text{ou}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m (1 - p_s) \leq q_s \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \frac{q_s}{(1 - p_s)} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m$$

Se definimos $\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1 - p_i)} \right\}$ segue da desigualdade anterior

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \quad (11)$$

Agora devemos provar que $\mu \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1$. De fato

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| + \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1 \quad \text{por hipótese do Teorema}$$

$$\text{logo } q_i \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m - p_i \Rightarrow \frac{q_i}{1 - p_i} \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m - p_i}{1 - p_i} \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m - p_i \|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m}{1 - p_i} = \|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m$$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

$$p_i + q_i \leq \|\alpha_{n \times n}\| < 1, |p_i| < 1, |q_i| < 1 \text{ logo } \|\alpha_{n \times n}\| |p_i| < |p_i| \text{ e } \|\alpha_{n \times n}\| |p_i| < \|\alpha_{n \times n}\|$$

$$\text{logo } \mu = \frac{q_i}{1 - p_i} \leq \frac{\|\alpha_{n \times n}\|_m - p_i}{1 - p_i} \leq \frac{\|\alpha_{n \times n}\|_m - p_i \|\alpha_{n \times n}\|_m}{1 - p_i} = \|\alpha_{n \times n}\|_m < 1 \text{ ou } \mu < 1$$

Da desigualdade (11) $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m$ segue

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \mu^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_m \text{ e conseqüentemente } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}.$$

Note que foi obtido:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \|\alpha_{n \times n}\|_m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \text{ para o método da iteração}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_m \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k-1}\|_m \text{ para o método de Seidel com } \mu \leq \|\alpha_{n \times n}\|_m$$

Isto indica que sob certas condições $\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1 - p_i)} \right\}$ o método

de Seidel converge melhor que o método da iteração. Neste caso é conveniente que a primeira equação do sistema tenha a menor soma dos módulos.

$$q_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha_{1j}|, p_1 = 0$$

1.4.3- Convergência do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

Teoremas e provas semelhantes podem ser construídos se consideramos em lugar da *m-norma* (linha) a *l-norma* (coluna) e *k-norma* (Euclidiana).

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \mathbf{\beta}$ (7) se verifica a condição $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_l < 1$ com $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ (l-norma)

, então o método de Seidel converge para sua única solução

$\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \mathbf{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

Teorema: Se para o sistema $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \mathbf{\beta}$ (7) se verifica a condição $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_k < 1$ com $\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1$ (k-norma)

, então o método de Seidel converge para sua única solução

$\mathbf{x} = \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x} + \mathbf{\beta}$ independentemente da escolha da aproximação inicial $\mathbf{x}^0$.

1.4.4- Estimativa do Erro do Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

Procedendo semelhante ao descrito para o método da iteração obtemos $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \mu \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|$ e $\|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|$

Passando ao limite quando $p \rightarrow \infty$ nesta desigualdade segue

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{k+p} = \mathbf{x} \quad \text{e consequentemente} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|$$

$$\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1-p_i)} \right\}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \quad \text{ou por componente}$$

$$|x_i - x_i^k| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \max_j |x_j^1 - x_j^0| \quad \text{se} \quad \max_j |x_j^1 - x_j^0| < \frac{1-\mu}{\mu^k} \varepsilon$$

$$\text{então} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon.$$

1.4.5- Resumo da Convergência e Estimativa do Erro para o Método da Iteração (**Jacobi**)

Os métodos da Iteração e de Seidel convergem se alguma norma canônica da matriz $\mathbf{a}_{n \times n}$ é menor que a unidade:

$$\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1$$

Estimativa do erro na *m-norma*:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|^k}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \quad \text{Método da Iteração}$$

Como caso particular, se escolhermos $\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta}$, então

$$\mathbf{x}^1 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_{n \times n} \mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{a}_{n \times n} \boldsymbol{\beta} \text{ e } \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = \|\mathbf{a}_{n \times n} \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\mathbf{a}_{n \times n}\| \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

$$\text{Portanto, } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{a}_{n \times n}\|^{k+1}}{1 - \|\mathbf{a}_{n \times n}\|} \|\boldsymbol{\beta}\|$$

1.4.5- Resumo da Convergência e Estimativa do Erro para o Método de Seidel (**Gauss-Seidel**)

Os métodos da Iteração e de Seidel convergem se alguma norma canônica da matriz $\mathbf{a}_{n \times n}$ é menor que a unidade:

$$\|\mathbf{a}_{n \times n}\|_m < 1$$

Estimativa do erro na **m-norma**:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\| \leq \frac{\mu^k}{1 - \mu} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \quad \text{Método de Seidel}$$

$$\mu = \max_i \left\{ \frac{q_i}{(1 - p_i)} \right\} \quad \text{onde } p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \text{ e } q_i = \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}|$$

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado

Para resolver sistemas lineares de equações algébricas $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ existem mais “*métodos iterativos*” que os estudados no tópico 1.3. Aqui apresentamos sinteticamente dois outros métodos.

Método do Gradiente Conjugado (1952, CG): pode ser utilizado para resolver o sistema linear $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ sempre que a matriz $\mathbf{A}$ seja simétrica.

Método do Gradiente Conjugado Quadrado (1989, CGS): pode ser utilizado para resolver o sistema linear $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ quando a matriz $\mathbf{A}$ não é simétrica.

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado

Método do Gradiente Conjugado (1952, CG): Passos da iteração do método:

0- escolher $\vec{x}^0$ e se calculam os vetores $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$ e $\vec{p}^0 = \vec{r}^0$

1- calcular $\alpha^{k+1} = (\vec{r}^k, \vec{r}^k) / (\vec{p}^k, A\vec{p}^k)$, onde (r,p) é o produto interno dos vetores r e p .

2- calcular $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \alpha^{k+1} \vec{p}^k$

3- calcular $\vec{r}^{k+1} = \vec{b} - A\vec{x}^{k+1}$

4- calcular $\beta^{k+1} = (\vec{r}^{k+1}, \vec{r}^{k+1}) / (\vec{r}^k, \vec{r}^k)$

5- calcular $\vec{p}^{k+1} = \vec{r}^{k+1} + \beta^{k+1} \vec{p}^k$

6- Repetir os passos 1 ao 5 até satisfazer um critério de parada.

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado

Algumas peculiaridades do método **CG (Conjugate Gradient)**:

- 1- A matriz **A** tem que ser simétrica.
- 2- A convergência do método não é monótona, diferente à convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel que são monótonas.
- 3- A convergência é lenta, mas a taxa de convergência tende a aumentar com o aumento das iterações, podendo chegar a ser convergência superlinear.
- 4- Em aritmética exata o método converge em até “n” iterações (método direto). Em aritmética de precisão finita existem erros de round-off e a convergência em até “n” iterações não é garantida.

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado

Método do Gradiente Conjugado Quadrado (1989, CGS):

Passos da iteração do método:

0- escolher $\vec{x}^0$ e calcular $\vec{r}^0 = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{x}^0$, $\vec{p}^0 = \vec{r}^0$ e $\vec{q}^0 = \vec{r}^0$

1- calcular $\alpha^{k+1} = (\vec{r}^0, \vec{r}^k) / (\vec{r}^0, \mathbf{A}\vec{p}^k)$

2- calcular $\vec{g}^{k+1} = \vec{q}^k - \alpha^{k+1} \mathbf{A}\vec{p}^k$

3- calcular $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \alpha^{k+1} [\vec{q}^k + \vec{g}^{k+1}]$

4- calcular $\vec{r}^{k+1} = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{x}^{k+1}$

5- calcular $\beta^{k+1} = (\vec{r}^0, \vec{r}^{k+1}) / (\vec{r}^0, \vec{r}^k)$

6- calcular $\vec{q}^{k+1} = \vec{r}^{k+1} + \beta^{k+1} \vec{g}^{k+1}$

7- calcular $\vec{p}^{k+1} = \vec{q}^{k+1} + \beta^{k+1} [\vec{g}^{k+1} + \beta^{k+1} \vec{p}^k]$

Repetir os passos do 1 ao 7 até verificar um critério de parada.

1.5- Método do Gradiente Conjugado e Método do Gradiente Conjugado Quadrado

Algumas peculiaridades do método **CGS (Conjugate Gradient Squared)**:

- 1- Desenvolvido para matrizes **A** não simétricas.
- 2- A convergência não é monótona.

Referencias Bibliográficas:

Hestenes MR, Stiefel E (1952) Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, No. 6, 409–436.

Lanczos C (1952) Solution of systems of linear equations by minimized iteration. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, 33–53.

Sonneveld P (1989) CGS: a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. SIAM J Sci Stat Comput, Vol. 10, No. 1, 36–52.

Sandip M (2016) Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods. Academic Press. ISBN: 978-0-12-849894-1

Frase do Dia

“O objetivo de minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a **certeza** dos **métodos matemáticos**... O estado atual das coisas, em que nos chocamos com os **paradoxos**, é intolerável. Imaginem as definições e os métodos dedutivos que todos apreendem, ensinam e usam em matemática, os paradigmas de **verdade** e de **certeza**, conduzindo a **absurdos**! Se o pensamento matemático é defeituoso, onde acharemos **verdade** e **certeza**?”

D. Hilbert, “On the Infinite”, em *Philosophy of Mathematics*, de Benacerraf e Putnam.