

09/10/2017

1. [22pts] Considere os vetores $v_1 = (6, 0, 6, 8)$, $v_2 = (-5, 1, -4, -7)$, $v_3 = (5, 2, -3, 7)$ e $v_4 = (3, 0, -7, 5)$ de $\mathbb{R}^4$.
- (a) [Vale 12pts] Verifique se o vetor $u \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ quando: (A) $u = (1, 1, 1, 1)$, (B) $u = (1, -3, -3, 3)$.
- (b) [Vale 10pts] Considere a matriz A onde as linhas são os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 . Calcule $\det(A)$.

Solução: (a) Neste item precisamos ver se dois vetores pertencem ou não a um subespaço vetorial. Então a sugestão é ver sob quais condições um vetor geral esta no subespaço. Para isso, digamos que o vetor em questão tenha coordenadas $w = (a, b, c, d)$ e vamos tentar responder a seguinte questão: Existem x, y, z, t em $\mathbb{R}$ tais que:

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = w.$$

Ao desenvolver esta equação vetorial chegamos em um sistema linear. A seguinte matriz é a matriz ampliada deste sistema. Vamos escaloná-la.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 6 & 8 & a \\ -5 & 1 & -4 & -7 & b \\ 5 & 2 & -3 & 7 & c \\ 3 & 0 & -7 & 5 & d \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 3 & 4 & \frac{a}{2} \\ -5 & 1 & -4 & -7 & b \\ 5 & 2 & -3 & 7 & c \\ 3 & 0 & -7 & 5 & d \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 \rightarrow \ell_3 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 3 & 4 & \frac{a}{2} \\ -5 & 1 & -4 & -7 & b \\ 0 & 3 & -7 & 0 & b + c \\ 0 & 0 & -10 & 1 & d - \frac{a}{2} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\ell_2 \rightarrow \ell_2 + \frac{5}{3}\ell_1} &\left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 3 & 4 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5a}{6} + b \\ 0 & 3 & -7 & 0 & b + c \\ 0 & 0 & -10 & 1 & d - \frac{a}{2} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 3 & 4 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5a}{6} + b \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -\frac{5a}{2} - 2b + c \\ 0 & 0 & -10 & 1 & d - \frac{a}{2} \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 3 & 4 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5a}{6} + b \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -\frac{5a}{2} - 2b + c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a + 2b - c + d \end{array} \right] \end{aligned}$$

Logo, o vetor u pertence $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se, e somente se, o vetor satisfaz: $2a + 2b - c + d = 0$. Logo nem (A) nem o (B) pertencem a $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

b) Como vimos no item a) os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 são LD, logo $\det(A) = 0$.

2. [26pts] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

a) [vale 06pts] O conjunto S dos vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $x + ly + mz = 0$, com $l, m \neq 0$. Então S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) [vale 06pts] Se $\{u, v, w\}$ são vetores LI então: $\{u + v - 2w, u - v - w, u + w\}$ é LI.

c) [vale 07pts] Os polinômios $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$ e $p_3(x) = x^2 + x - 2$ formam uma base de P_2 -conjunto dos polinômios de grau menor igual a 2.

d) [vale 07pts] Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T então T não é invertível.

Solução: a) (Verdadeiro) É claro que o vetor $(0, 0, 0)$ pertence a S . Digamos agora, que $(x, y, z), (x', y', z') \in S$ e que $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $(x, y, z) + \alpha(x', y', z') = (x + \alpha x', y + \alpha y', z + \alpha z')$ e

$$x + \alpha x' + l(y + \alpha y') + m(z + \alpha z') = (ax + ly + mz) + \alpha(ax' + ly' + mz') = 0 + \alpha 0 = 0.$$

Portanto, S não é vazio e é fechado para soma de vetores e multiplicação por escalar, isto é, S é um subespaço vetorial.

b) (Verdadeiro) Podemos pensar que $\alpha = \{u, v, w\}$ e $\beta = \{u' = u + v - 2w, v' = u - v - w, w' = u + w\}$ são bases de um espaço vetorial V de dimensão 3. Se isto realmente acontece, podemos calcular $[I]_\alpha^\beta$ e esta matriz precisa ser invertível. Mas é fácil calcular esta matriz,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ calculando } \det[I]_\alpha^\beta = -5.$$

Portanto, $[I]_\alpha^\beta$ é invertível e β deve ser uma base.

Outra forma de fazer isso, é usar a definição de conjunto linearmente independente. Queremos verificar que a única solução do sistema vetorial

$xu' + yv' + zw' = 0$ é o trivial, mas $x(u + v - 2w) + y(u - v - w) + z(u + w) = (x + y + z)u + (x - y)v + (-2x - y + z)w = 0$. Ocorre que $\{u, v, w\}$ é LI, logo deve valer

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases}$$

Agora é só ver que este sistema só tem solução trivial.

c) (Verdadeiro) Precisamos ver que $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$ e $p_3(x) = x^2 + x - 2$ é um conjunto LI, ou seja, verificar que

$$rp_1(x) + sp_2(x) + tp_3(x) = 0$$

só admite a solução $r = s = t = 0$.

$$(s+t)x^2 + (r+2s+t)x + (-r+t-2s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s+t &= 0 \\ r+2s+t &= 0 \\ -r+t-2s &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $r = 0 = s = t$. Isto mostra que este conjunto é LI.

d) (Verdadeiro) Se $\lambda = 0$ é um autovetor, deve existir um vetor $v \neq 0$ tal que $Tv = 0v = 0$, isto quer dizer que $N(T) \neq \{0\}$, ou seja, T não é injetora. Portanto, T não pode ser invertível.

3. [26pts] a) [Vale 18pts] Resolva (por escalonamento) o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 4 \\ 2x + z + t = -1 \\ -x + 5y + z + 2t = 0 \\ x + 3t = 1 \end{cases}$$

b) [vale 08pts] Encontre a área do triângulo de vértices $(3, 3)$, $(4, 0)$ e $(-2, -1)$.

Solução:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 10 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{2} & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{31}{55} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{36}{55} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{55} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{55} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Conforme exercício a área é dada em termos de

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-19| = \frac{19}{2}.$$

4. [26pts] (a) [vale 13pts] Determine o operador T do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $\beta = \{(1, 0), (-1, 1)\}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) [vale 13pts] Calcule o polinômio característico de T seus autovalores e determine uma base na qual a matriz de T é diagonal.

Solução: a) Seja α a base canônica do $\mathbb{R}^2$ obtendo as matrizes $[I]_{\alpha}^{\beta}$, $[I]_{\beta}^{\alpha}$ mudança de coordenadas. Depois é só calcular

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} [T]_{\beta}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Podemos utilizar qualquer uma das matrizes. Vou adotar a inicial.

O polinômio característico é $\Delta(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$. Para o autovalor $x = -5$ temos o vetor $(-1, 1)$ e para o autovalor $x = 3$ temos $(1, 1)$. Estes vetores estão escritos na base β . Na base $\beta' = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ a matriz se torna diagonal. Vamos determinar estes vetores com respeito a base canônica

$$-1(1, 0) + 1(-1, 1) = (-2, 1) \text{ e } 1(1, 0) + 1(-1, 1) = (0, 1).$$

5. **Questão Extra** [2, 0pts] Determine $S : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que é uma reflexão em torno da reta determinada por $v = (-1, 3)$.

Solução: Existe mais de uma forma de fazer esta questão. Vamos dar preferência pela que utiliza matrizes mudanças de coordenadas. Como S é uma reflexão em torno do vetor $v = (-1, 3)$ segue que $S(-1, 3) = (-1, 3)$ e $S(3, 1) = -(3, 1)$. Portanto, com relação a base $\alpha = \{(-1, 3), (3, 1)\}$ a matriz que representa S é $[S]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Como queremos a expressão de S na base canônica, seja β esta base. Queremos encontrar $[S]_{\beta}^{\beta}$. Para isto precisamos $[I]_{\alpha}^{\beta}$, $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

$$[S]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [S]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo } S(x, y) = \left(\frac{-4x-3y}{5}, \frac{-3x+4y}{5} \right).$$