Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística
Professor: Jones Colombo
Gabarito da P2 de Álgebra Linear - GAN00140

06/12/2017

1. [24*pts*] Em cada item determine se a proposição é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   [6] a) Se λ é um autovalor de T, e n é inteiro, então λ^n é um autovalor de T^n.

   [6] b) Se $T : V \to V$ é um operador linear nilpotente não nulo, então T é diagonalizável.

   [6] c) Se $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear tal que $S^2 = id$. Então seus únicos autovalores são 1 e -1.

   [6] d) Seja A uma matriz 2×2. Então A e A^t tem os mesmos autovetores.

Solução: a) (VERDADEIRO) Seja v autovetor de T associado ao autovalor λ. Observe que

$$T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v.$$

Uma demonstração para todo inteiro positivo k é a a seguinte: Como o resultado é válido para $n = 2$, suponha, por um momento que o resultado seja válido para um $n = k$ positivo qualquer, vamos provar que nesta situação o resultado é válido para $n = k + 1$. Veja que

$$T^{k+1}(v) = T(T^k(v)) = T(\lambda^k v) = \lambda^k T(v) = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v.$$

Esta conta mostra que o resultado, apoiado em k, conduz a um resultado verdadeiro em $k+1$, como sabemos verdadeiro para $k = 2$ o resultado deve ser verdadeiro para todo k inteiro positivo (este tipo de argumentação - se chama: Prova por indução). Se por acaso o operador T for invertível, então

$$T(v) = \lambda v \Rightarrow v = T^{-1}(T(v)) = \lambda T^{-1}(v) \Rightarrow T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v.$$

Com isso fica patente que o resultado deve ser verdadeiro para todo n inteiro.

b) (FALSO) Suponha, por um momento que o resultado fosse verdadeiro, isto é, existe uma base na qual a matriz T não nula, pudesse ser escrita representada como uma matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda_1 \neq 0 \text{ ou } \lambda_2 \neq 0.$$

Como T é nilpotente, deve existir um $n > 0$ natural tal que $T^n = 0$, mas isto significa que

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas isto é claramente um absurdo!

c) (VERDADEIRO) - Digamos que v é um autovetor associado ao autovalor λ

$$S(v) = \lambda v \Rightarrow v = S(S(v)) = \lambda^2 v \Rightarrow (\lambda^2 - 1)v = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

d) (FALSO) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Veja que os autovalores são $3, -3$ e $(1,1)$ é o autovetor associado ao autovalor 3 de A, já o autovetor associado 3 para A^t é $(2,1)$.

---

2. [26pts] Encontre o número de todas as matrizes 2×2 ortogonais da forma $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ e exibe-as.

Solução: Chame a matriz de A, como ela deve ser ortogonal, então $A^tA = I$, logo

$$A^tA = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & y \\ x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 + \frac{1}{9} & \frac{x}{3} + yz \\ \frac{x}{3} + yz & x^2 + z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

resolvendo $y^2 + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Logo, se escolhermos $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{x}{3} + yz = \frac{x}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}z = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2}z.$$

E o fato de $x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 8z^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\frac{1}{3}$. Veja que x e z precisam ter sinais opostos. Logo,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

E 4 é quantidade de matrizes ortogonais da forma de A.

---

3. [26pts] Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x,y,z) = (x + y + z, x + y + 2z, x + 2y - 4z, x + 4y - 3z).$$

[6] a) Encontre uma base para $W = \text{Im}(T)$ (a imagem de T).

[8] b) Seja $v = (-10, 16, -1, 3)$. Encontre $u \in W$ que esta a menor distância de v.

[6] c) Resolva o sistema $T(x,y,z) = u$.

[6] d) Se $v' = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Calcule $\text{Proj}_W\, v'$.

Solução: a) e b) Veja que

$$(x+y+z, x+y+2z, x+2y-4z, x+4y-3z) = x(1,1,1,1)+y(1,1,2,4)+z(1,2,-4,-3).$$

Para conseguirmos projetar v sobre W precisaremos ortogonalizar os vetores $(1,1,1,1),(1,1,2,4)$ e $(1,2,-4,-3)$, ao fazer isto verificamos simultaneamente se eles são LI ou LD. Vamos aplicar o processo de gram-Schimdt

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1,1,1,1)\\
u_2 &= (1,1,2,4)-\frac{8}{4}(1,1,1,1)=(-1,-1,0,2)\\
u_3 &= (1,2,-4,-3)-\frac{-4}{4}(1,1,1,1)-\frac{-9}{6}(-1,-1,-,2)=\frac{1}{2}(1,3,-6,2).
\end{aligned}$$

Em particular podemos concluir que $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Span}\,\{(1,1,1,1),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\}$.

Vamos chamar $v_3=2u_3$ e recordando que $v=(-10,16,-1,3)$, portanto,

$$u=\mathrm{Proj}_{u_1} v+\mathrm{Proj}_{u_2} v+\mathrm{Proj}_{v_3} v=(3,5,-4,4).$$

c) Para resolver esta $T(x,y,z)=u$, vamos colocar na forma matricial e escalonar

$$\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&1&2&5\\1&2&-4&-4\\1&4&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Portatno, a solução é $(x,y,z)=(-2,3,2)$.

d) basta calcular

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_W(x,y,z,t) &= \mathrm{Proj}_{u_1}(x,y,z,t)+\mathrm{Proj}_{u_2}(x,y,z,t)+\mathrm{Proj}_{v_3}(x,y,z,t)\\
&= \left(\frac{1}{4}(t+x+y+z),\frac{1}{4}(t+x+y+z),\frac{1}{4}(t+x+y+z),\frac{1}{4}(t+x+y+z)\right)+\\
&= \left(\frac{1}{6}(-2t+x+y),\frac{1}{6}(-2t+x+y),0,\frac{1}{3}(2t-x-y)\right)+\\
&= \left(\frac{1}{50}(2t+x+3y-6z),\frac{3}{50}(2t+x+3y-6z),-\frac{3}{25}(2t+x+3y-6z)\right.\\
&\left.,\frac{1}{25}(2t+x+3y-6z)\right).
\end{aligned}$$

---

4. [24*pts*] Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$2x^2-4xy+5y^2+4x-16y+13=0.$$

Solução: Escrevendo a equação quadrática na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

Então devemos diagonalizar a matriz $B=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&5\end{bmatrix}$. O polinômio característico fica $\Delta_B(x)=x^2-7x+6=(x-6)(x-1)$. Associado ao autovalor $x=6$ temos $(-1,2)$ e associado ao autovalor $x=1$ temos $(2,1)$. Considere a base α por ser a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$. Logo, se $P = [I]_\alpha^\beta$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, voltando a equação matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -16 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Que depois de fazer as contas fica

$$6x'^2 + y'^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 13 = 0.$$

Completando quadrados obtemos

$$6\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

Que é uma equação de uma elipse, centrada em $(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ do sistema de coordenadas (x', y'). Fazendo os desenhos obtemos