Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Matemática e Estatística
Professor: Jones Colombo
Gabarito da VR de Álgebra Linear - GAN00140

Nome(a):____

13/12/2017

1. $[1,8pts]$ Resolva (por escalonamento) o sistema e depois olhando a matriz escalonada reduzida diga se o sistema é possível ou impossível, determinado ou indeterminado. Se solução for infinita qual a dimensão da mesma, nesta situação expresse a solução na forma paramétrica.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 + 6x_5 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 8 \end{cases}$$

Solução: Montando a matriz ampliada do sistema e escalonando obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O sistema é possível e, como a quantidade de linhas não nulas é 3, segue a solução terá $5 - 3 = 2$ graus de liberdade. A solução na forma paramétrica é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -24 \\ 8 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

2. $[2,4pts]$ Em cada item faça o que se pede ou, se for uma afirmação, verifique se é falsa ou verdadeira e justifique com uma demonstração ou um contra-exemplo.

a) Determine $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear tal que $L(1,1) = (7,12)$ e $L(-1,1) = (3,4)$.

b) Determine a reflexão $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em torno da reta $y = -2x$.

c) Se A e B são matrizes semelhantes, então $f(A)$ e $f(B)$ serão matrizes semelhantes qualquer que seja o polinômio $f(x)$.

d) Se P e Q são matrizes ortogonais, então PQ também o é.

Solução: a) Observe que $\frac{1}{2}(L(1,1)-L(-1,1))=L(1,0)=\frac{1}{2}((7,12)-(3,4)))=(2,4)$ e $\frac{1}{2}(L(1,1)+L(-1,1))=L(0,1)=\frac{1}{2}((7,12)+(3,4)))=(5,8)$. Logo,

$$L(x,y)=xL(1,0)+yL(0,1)=x(2,4)+y(5,8)=(2x+5y,4x+8y).$$

b) A reflexão S em torno da reta determinada por u é dada por $S=I-2\operatorname{Proj}_u$. No nosso caso $u=(1,-2)$ logo

$$S(x,y)=2\frac{\langle (x,y),(1,-2)\rangle}{\langle (1,-2),(1,-2)\rangle}(1,-2)-(x,y)=\left(\frac{1}{5}(-3x-4y),\frac{1}{5}(3y-4x)\right).$$

c) (VERDADEIRO) Se $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$. Como A e B são semelhantes, então existe P invertível tal que $A=P^{-1}BP$ e

$$\begin{aligned}
f(A)&=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_1A+c_0I\\
&=a_n(P^{-1}BP)^n+a_{n-1}(P^{-1}BP)^{n-1}+\cdots+c_1P^{-1}BP+c_0I\\
&=a_nP^{-1}B^nP+a_{n-1}P^{-1}B^{n-1}P+\cdots+c_1P^{-1}BP+c_0P^{-1}IP\\
&=P^{-1}\left(a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+\cdots+c_1B+c_0I\right)P=P^{-1}f(B)P.
\end{aligned}$$

Mas isto significa que as matrizes $f(A)$ e $f(B)$ são semelhantes.

d) (VERDADEIRO) Suponha que P,Q são matrizes ortogonais. E considere PQ. Fazendo

$$(PQ)^t(PQ)=\left(Q^tP^t\right)(PQ)=Q^t\left(P^tP\right)Q=Q^tIQ=I.$$

---

3. $[1,8pts]$ Considere $V=M_2$ o espaço vetorial das matrizes 2×2. Considere $W_1=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}$ e $W_2=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&0\end{bmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

(a) Prove que W_1 é um subespaço vetorial de V.

(b) Admita que W_2 é um subespaço vetorial e exiba uma base para W_1+W_2 e para $W_1\cap W_2$.

Solução: a) Precisamos verificar que W_1 é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar. Considere $\lambda\in\mathbb{R}$ e $\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a'&b'\\0&0\end{bmatrix}$ dois elementos de W_1. Logo

$$\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}a'&b'\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+\lambda a'&b+\lambda b'\\0&0\end{bmatrix}$$

E obtemos outro elemento de W_1. Logo W_1 é um subespaço vetorial de V.

b) Veja que

$$W_1+W_2=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+a'&b+b'\\c'&0\end{bmatrix}:a,b,c,a',b'\in\mathbb{R}\right\}$$

Logo um elemento de W_1+W_2 pode ser escrito como combinação de $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$.

Já uma base para $W_1\cap W_2$ é dado pelo conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}$.

---

4. $[2,0pts]$ Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}(t)$ dos polinômios munido do produto interno $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt$. Encontre a projeção ortogonal de $h(t)=6t^2-4t+3$ sobre o subespaço vetorial W gerado pelos polinômios $f_1(t)=1$, $f_2(t)=t$, $f_3(t)=t^2$.

Solução: Vamos determinar uma base ortogonal para W, aplicando a parte do processo de Gram-Schmitd que ortogonaliza os vetores temos

$$\begin{aligned}
g_1(t)&=f_1(t)=1\\
g_2(t)&=f_2(t)-\frac{\langle f_2,g_1\rangle}{\langle g_1,g_1\rangle}g_1=t\\
g_3(t)&=f_3(t)-\frac{\langle f_3,g_1\rangle}{\langle g_1,g_1\rangle}g_1-\frac{\langle f_3,g_2\rangle}{\langle g_2,g_2\rangle}g_2=t^2-\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Calculando a projeção sobre W obtemos

$$\mathrm{Proj}_W(h)=\mathrm{Proj}_{g_3}(h)+\mathrm{Proj}_{g_2}(h)+\mathrm{Proj}_{g_1}(h)=6\left(t^2-\frac{1}{3}\right)-4t+5.$$

---

5. $[2,0pts]$ Identifique a quádrica abaixo e determine as direções de seus eixos

$$x^2+8xy+14x-5y^2-28y-36=0.$$

Solução:

Escrevendo a equação quadrática na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix}x&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14&-28\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

Então devemos diagonalizar a matriz $B=\begin{bmatrix}1&4\\4&-5\end{bmatrix}$. O polinômio característico fica $\Delta_B(x)=x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$. Associado ao autovalor $x=-7$ temos $(-1,2)$ e associado ao autovalor $x=3$ temos $(2,1)$. Considere a base α por ser a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e $\beta=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\right\}$. Logo, se $P=[I]_\alpha^\beta$ e $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$, voltando a equação matricial obtemos

$$\begin{bmatrix}x'&y'\end{bmatrix}P^t\begin{bmatrix}1&4\\4&-5\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14&-28\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

Que depois de fazer as contas fica

$$-7x'^2 + 3y'^2 - 14\sqrt{5}x' - 36 = 0.$$

Completando quadrados obtemos

$$-7\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 + 3\left(y' - 0\right)^2 = 36 - 35 = 1.$$

Que é uma equação de uma hipérbole, centrada em $(-\sqrt{5}, 0)$ do sistema de coordenadas (x', y'). Não passa sobre o eixo x'. Fazendo os desenhos obtemos