Análise Envoltória de Dados

João Carlos Soares de Mello

Lidia Angulo Meza

Medidas de desempenho

- Avaliação de desempenho de unidades produtivas que transformam recursos em produtos
- Medidas de desempenho
  - Eficácia $\rightarrow$ capacidade de a unidade produtiva atingir a produção que tinha como meta
  - Produtividade $\rightarrow$ quociente entre o que foi produzido (*output*) e o que foi gasto para produzir (*input*)

$$\boxed{\text{Produtividade} = \frac{\textit{saída}}{\textit{entrada}}}$$

Medidas de desempenho

- Produtividade
  - Quando há múltiplas variáveis, há necessidade de agregá-las em índices únicos

$$\boxed{P = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_s y_s}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r}}$$

  - a_i e b_j são coeficientes de escala
  - Como calculá-los?

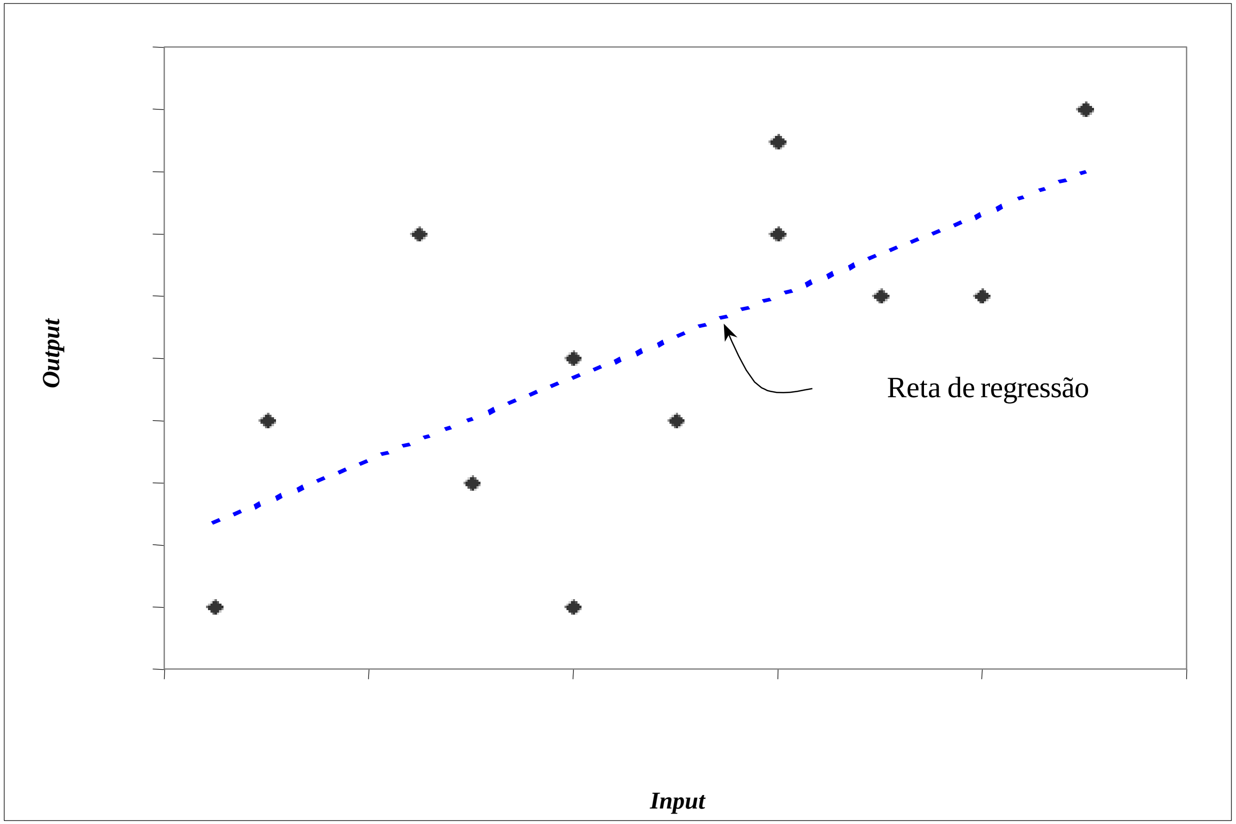
Medidas de desempenho

- **Eficiência**
  - Conceito relativo
  - Comparação entre o que foi realizado (produzido/gasto) e o que poderia ter sido realizado por uma unidade de referência

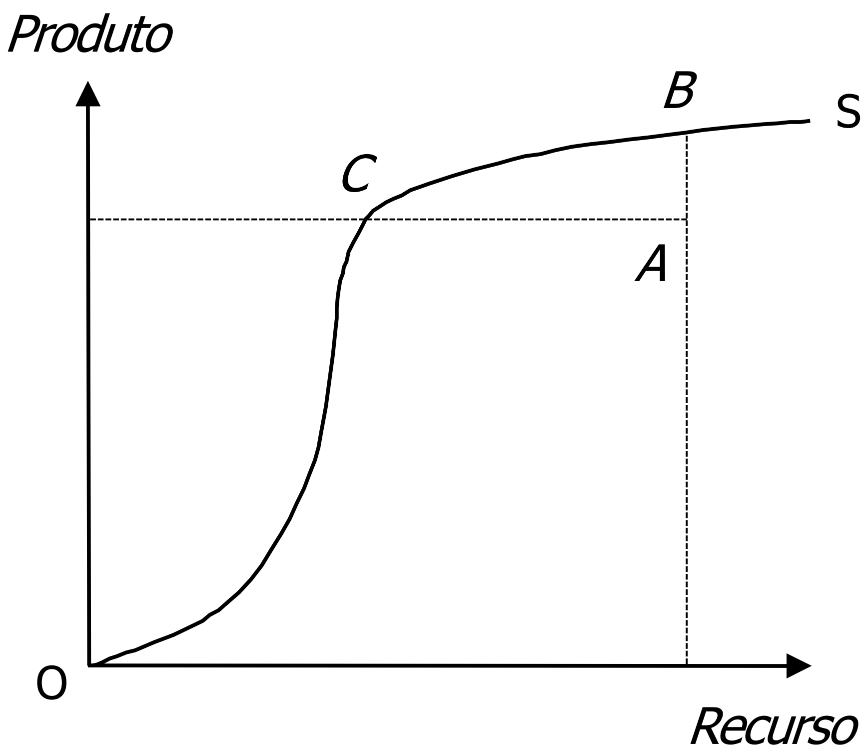
- Métodos paramétricos e não paramétricos
- Métodos de “mediocridade” e de excelência

Medidas de desempenho

- Regressão: método paramétrico de "mediocridade"
- *Outliers* são descartados

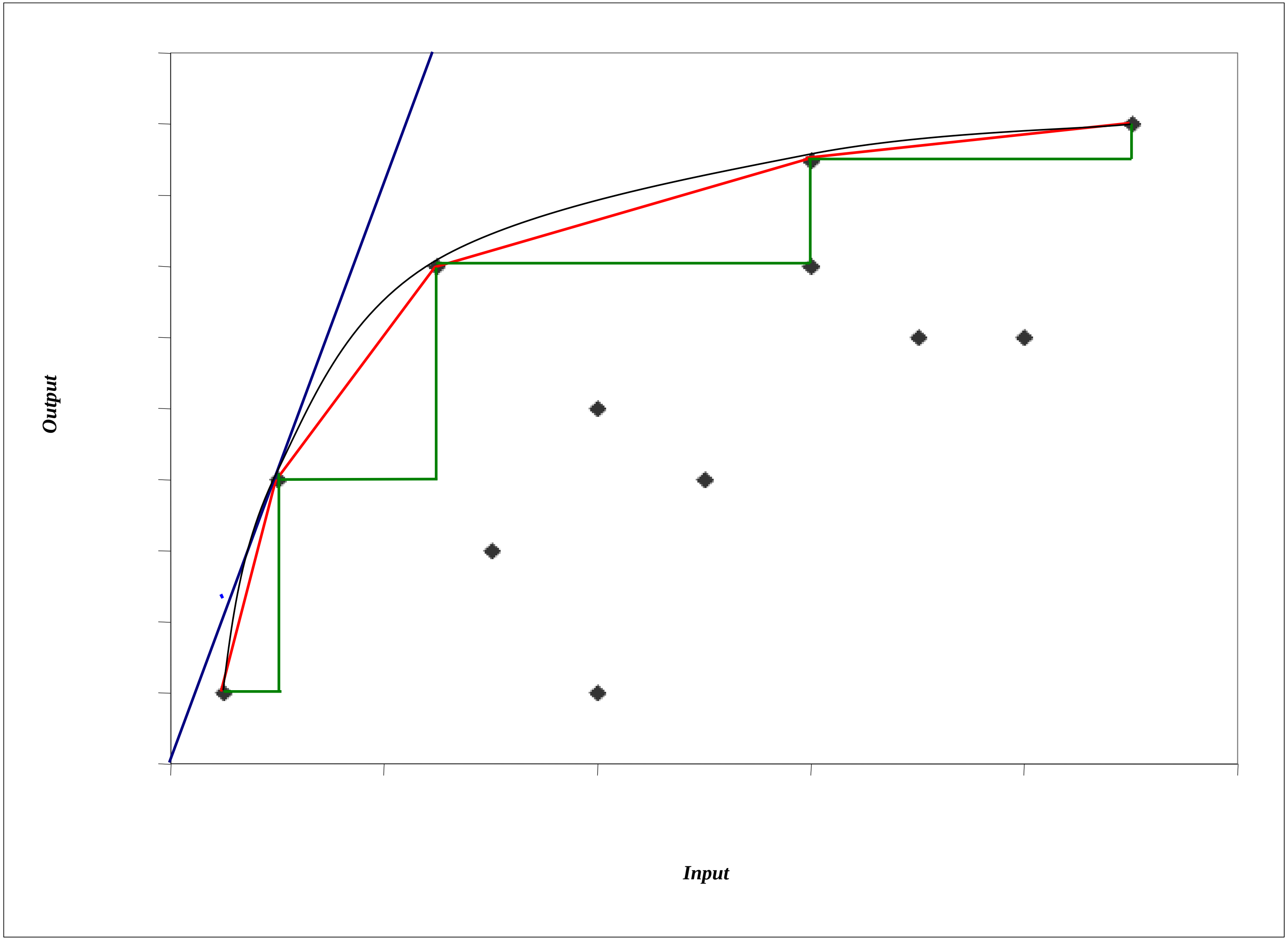


Medida de excelência

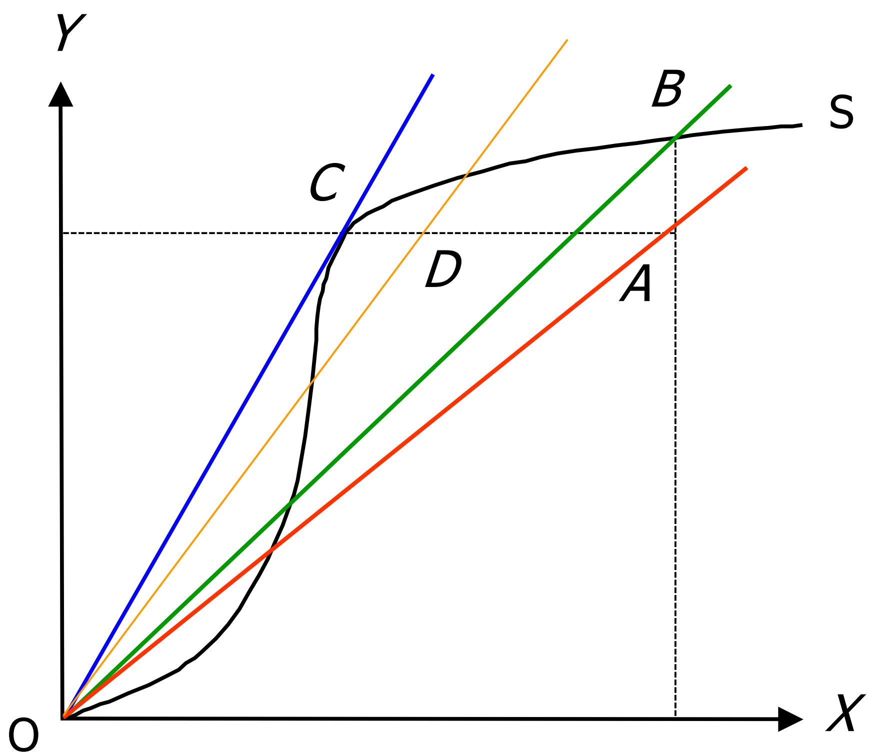


- OS → fronteira de produção; máxima produção para cada nível de recurso
- Unidades na fronteira são tecnicamente eficientes
- *B* e *C* eficientes; *A* ineficiente
- Conjunto viável de produção

Tipos de fronteiras



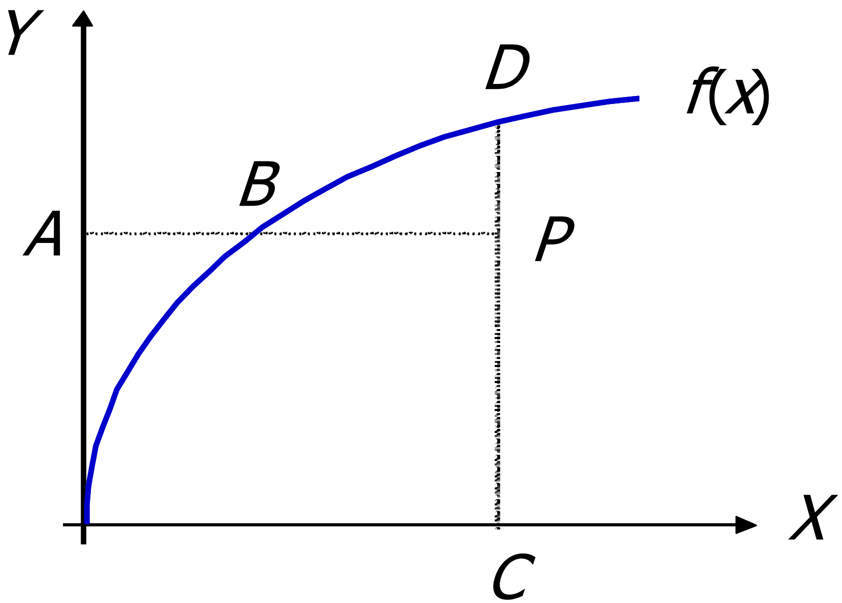
Produtividade X Eficiência



Produtividade = Y/X

- $A \rightarrow$ ineficiente
- $C \rightarrow$ tecnicamente eficiente e de maior produtividade $\rightarrow$ Produtividade = dY/dX
- $B \rightarrow$ eficiente, mas não é mais produtiva
- $D \rightarrow$ mais produtiva que B, mas não é eficiente

Orientação a recursos



- Em quanto os recursos podem ser reduzidos sem alterar a produção
- Eficiência técnica = AB/AP

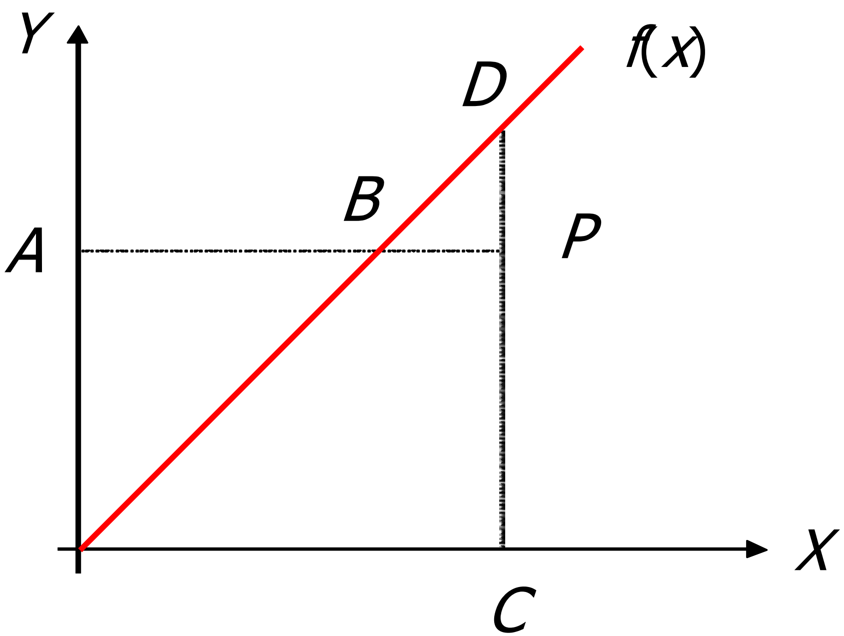
$$P\,(X_P, Y_P)$$

$$B\,(X_B, Y_B) \rightarrow X_B = h X_P$$

$$A\,(0, Y_P)$$

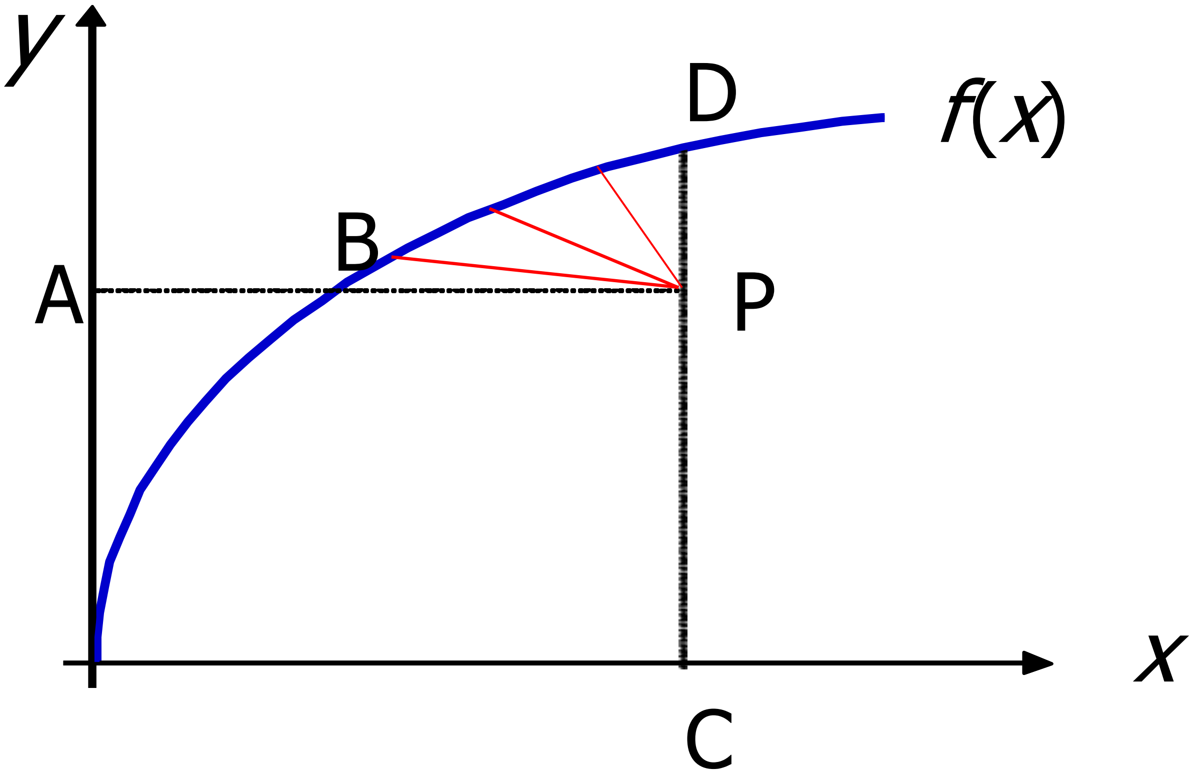
$$\boxed{h = X_B / X_P = AB / AP}$$

Orientação a produtos



- Em quanto os produtos podem ser aumentados sem alterar os recursos
- Eficiência técnica = CP/CD
- Equivalente à anterior somente sob certas condições

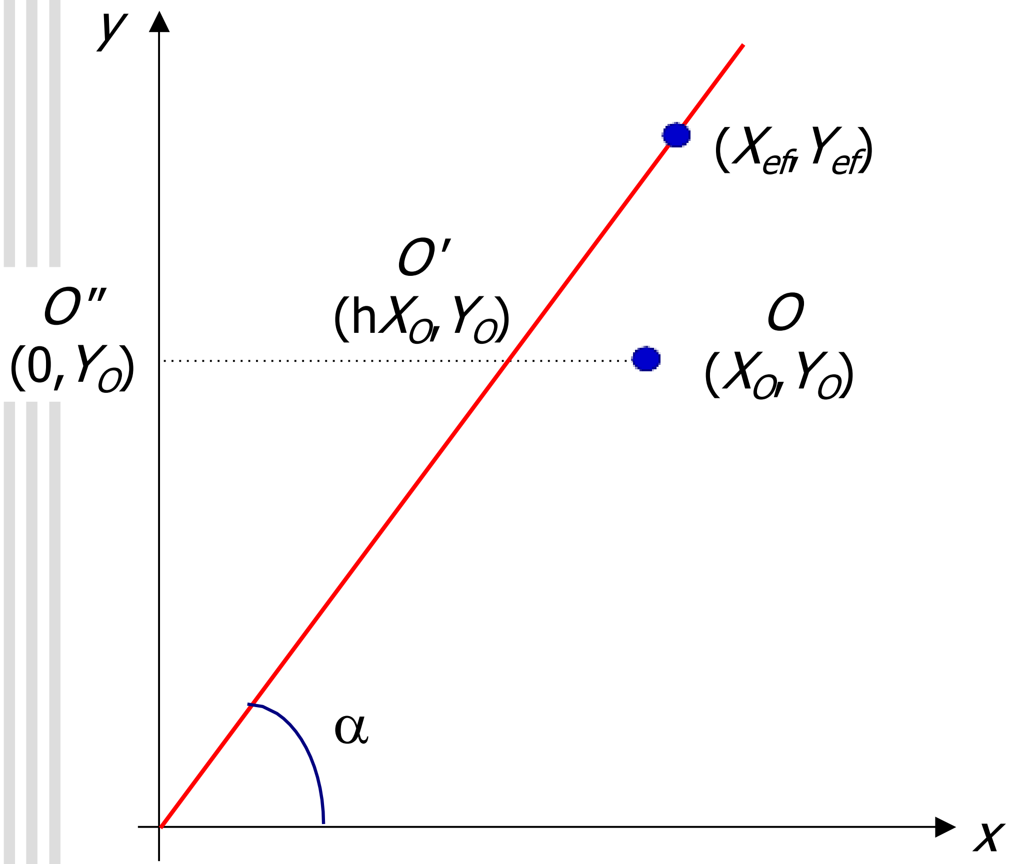
Outras orientações



Não sabemos calcular a eficiência

A eficiência é um vetor?

1 *input*, 1 *output*



- $Y_{ef} = a\ X_{ef} \Rightarrow a = Y_{ef}/X_{ef}$
- a → produtividade da unidade eficiente = tg α
- Eficiência → produtividade de uma unidade comparada a de com uma unidade eficiente
- Modelo CCR do envelope orientado a *input*

$$Ef = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{O''O}} = \frac{X_{ef}}{X_O} = \frac{Y_O/a}{X_O} = \frac{Y_O}{X_O}\frac{1}{a} = \frac{P_O}{P_{ef}}$$

Multidimensional

- PPL

$$\text{Max } \frac{u_{1o}Y_{1o} + u_{2o}Y_{2o} + \ldots + u_{jo}Y_{jo}}{v_{1o}X_{1o} + v_{2o}X_{2o} + \ldots + v_{io}X_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{u_{1o}Y_{1j} + u_{2o}Y_{2j} + \ldots + u_{jo}Y_{jk}}{v_{1o}X_{1j} + v_{2o}X_{2j} + \ldots + v_{io}X_{ik}} \leq 1, \quad k = 1 \ldots n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad i = 1 \ldots r, \; j = 1 \ldots s$$

- Função objetivo segue o conceito de Farrell
- Restrições garantem que é uma eficiência
- Será a mesma eficiência anterior?

Interpretação do modelo

- Charnes, Cooper e Rhodes, 1978
- Eficiência relativa é o quociente entre soma ponderada dos *outputs* e soma ponderada dos *inputs*

$$\boxed{Eficiência_{DMU_k} = \frac{\sum_j u_j y_{jk}}{\sum_i v_i x_{ik}}} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \textit{output} \text{ virtual} \\ \\ \leftarrow \textit{input} \text{ virtual} \end{array}$$

- Pesos são dados por um PPL de forma mais benevolente para cada DMU
- Modelo com proporcionalidade $\rightarrow$ alteração em uma variável produz alteração proporcional em outra variável

Caso particular: 1 *input*, 1 *output*

- PPL

$$\text{Max } \frac{uY_O}{vX_O}$$

sujeito a

$$\frac{uY_k}{vX_k} \leq 1$$

- Para calcular u/v

$$\frac{uY_{ef}}{vX_{ef}} = 1$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{Y_{ef} / X_{ef}} = \frac{1}{P_{ef}}$$

$$Ef = \frac{P_O}{P_{ef}}$$

- Neste caso particular as duas eficiências coincidem
- Demonstração geral usa dualidade

Exemplo: 1 input, 1 output

DMU	Input	Output
A	3	4
B	2	4
C	1	6

Max $\frac{4u}{2v}$

sujeito a

$$\frac{4u}{3v} \leq 1$$

$$\frac{4u}{2v} \leq 1$$

$$\frac{6u}{1v} \leq 1$$

$$u, v \geq 0$$

Analisando a DMU B

Só a última restrição é ativa (folga nula)

Valor ótimo $\rightarrow$ $u/v = 1/6$

Eficiência de B = 4/12 = 1/3

Modelo DEA CCR

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}} \leq 1, \quad k = 1,\ldots,n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad \forall\ j,i$$

- Problema de programação fracionária
- Calcula os pesos para os *inputs* e *outputs* (v_i e u_j)
- Unidade 0 $\rightarrow$ unidade em análise
- Problema tem múltiplas soluções ótimas $\rightarrow$ linearização

Modelo DEA CCR

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \quad \leq 0, \forall k$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\, j, i$$

- Problema de Programação Linear
- Modelo dos multiplicadores (determina conjunto de pesos e eficiência)
- DMU é CCR eficiente se $Eff^* = 1$ e existe uma solução ótima com v^* e $u^* > 0$

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

Max $Eff_A = 2\,u_1$

sujeito a

$4v_1 + 3v_2 = 1$

$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$

$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$

$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$

$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$

$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$

$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$

$u_1, v_1, v_2 \geq 0$

Max $Eff_B = 5\,u_1$

sujeito a

$1v_1 + 6v_2 = 1$

$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$

$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$

$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$

$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$

$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$

$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$

$u_1, v_1, v_2 \geq 0$

Exemplo

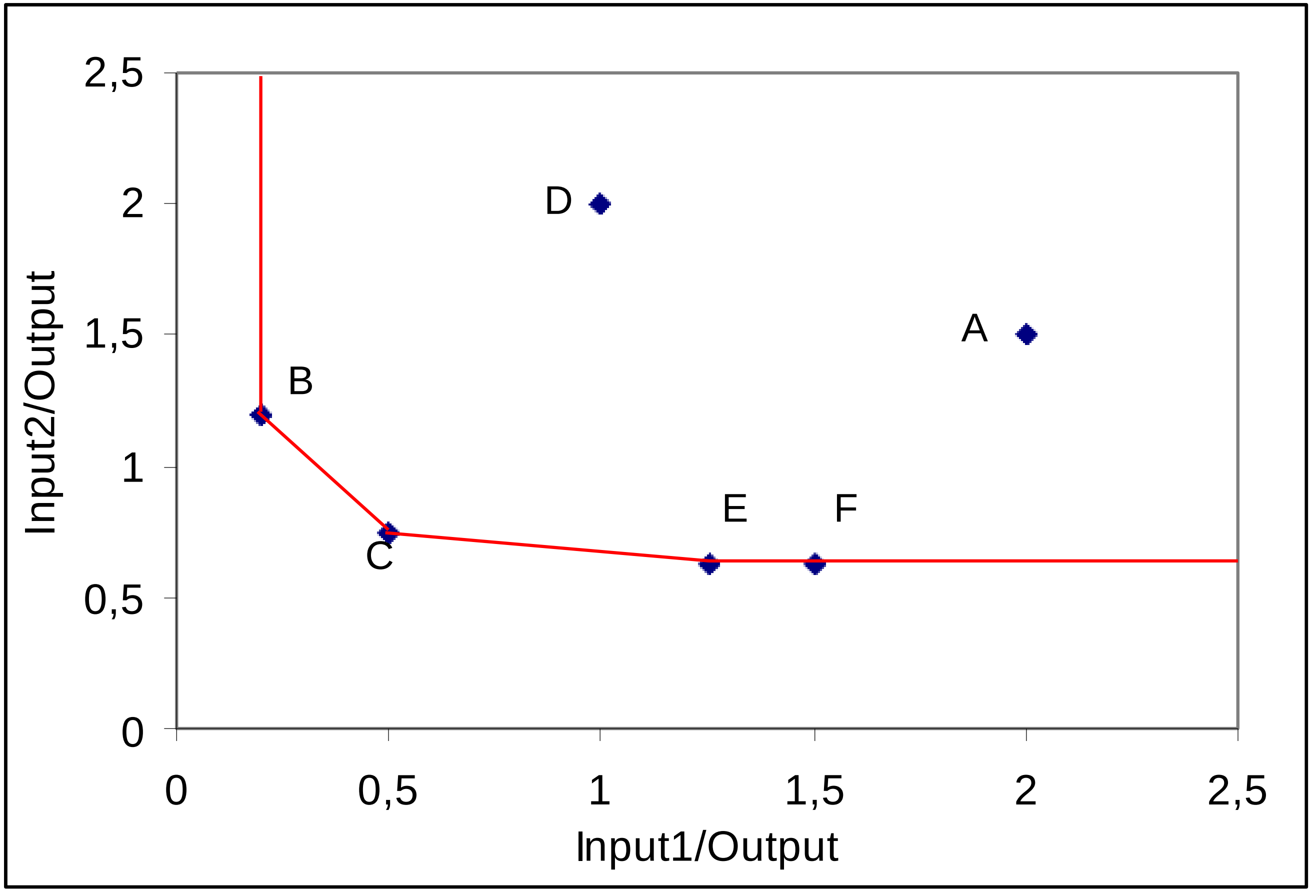
	Pesos			
DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*	Eficiência (%)
A	0,045	0,273	0,227	45,45
B	0,200	0,133	0,200	100,00
C	0,050	0,300	0,250	100,00
D	0,429	0,286	0,429	42,85
E	0,025	0,150	0,125	100,00
F	0,000	0,200	0,125	100,00

Exemplo: invariância com escala

DMU	*Input 1*	*Input 2*	*Output*
A	40	3	2
B	10	6	5
C	20	3	4
D	10	2	1
E	100	5	8
F	120	5	8

DMU	Pesos *Input 1*	*Input 2*	*Output*	Eficiência (%)
A	0,0045	0,273	0,227	45,45
B	0,0200	0,133	0,200	100,00
C	0,0050	0,300	0,250	100,00
D	0,0429	0,286	0,429	42,85
E	0,0025	0,150	0,125	100,00
F	0,0000	0,200	0,125	100,00

Representação gráfica



A e D ineficientes; B, C e E eficientes;
F parece eficiente, mas menos eficiente que E;
só consegue eficiência com um peso zero

Análise de resultados

- B, C e E Pareto eficientes
- F fracamente eficiente ou não Pareto eficiente
- Qualquer DMU em região da fronteira paralela aos eixos tem a mesma designação
- B e E admitem outro esquema de pesos
  - DMU E: 0 para o *input* 1 e 0,2 para o *input* 2
- Propriedade é válida para todos os vértices da fronteira, chamados de DMUs extremo eficientes

Identificação de DMUs fracamente eficientes

- A DMU F foi identificada graficamente
- Necessita-se de um método algébrico para problemas de maior dimensão
- Solução $\rightarrow$ impedir pesos zero
- Colocar restrição de que u e v devem ser maiores ou iguais a ε (número não arquimediano)
  - Na prática, número muito pequeno que o *software* usado consiga distinguir de zero

PPL não arquimediano para F

Max $Eff_F = 8u_1$

sujeito a

$12v_1 + 5v_2 = 1$

$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$

$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$

$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$

$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$

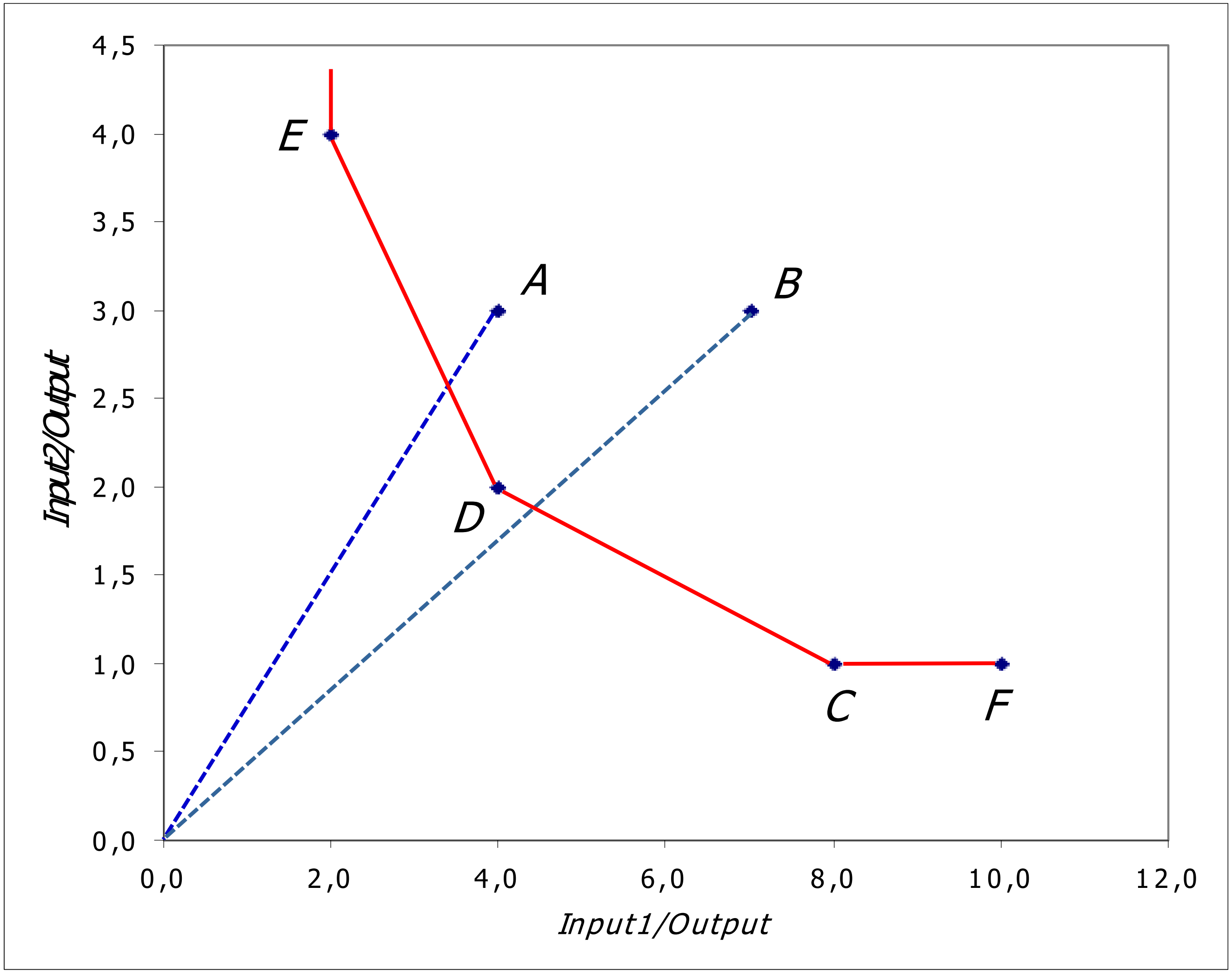
$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$

$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$

$u_1, v_1, v_2 \geq 0{,}01$

DMU	Eficiência (%)	Eficiência nova (%)
A	45,45	45,45
B	100,00	100,00
C	100,00	100,00
D	42,85	42,85
E	100,00	100,00
F	100,00	98,00

Exemplo 2 *inputs*, 1*output*



Modelo do Envelope

- Baseado na redução do *input*, como visto anteriormente
- Caso haja mais de um *input*, aplica-se a redução de Debreu, ou seja, redução equiproporcional
- Admite-se que se é possível produzir de forma eficiente também é possível produzir de forma ineficiente (aumento de *inputs* ou redução de *outputs*)
- Admite-se que não há restrição quanto à escala de operação (raio ilimitado)

Modelo do Envelope

- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor Y de *outputs* com um vetor X de *inputs*, então é possível produzir de forma eficiente um vetor kY de *outputs* com um vetor kX de *inputs*
- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor $Y1$ e $Y2$ de *outputs* com, respectivamente, vetores $X1$ e $X2$ de *inputs*, é possível produzir de forma eficiente $Y = Y1 + Y2$ *outputs* com $X = X1 + X2$ *inputs*
- A combinação linear de um conjunto de DMUs viáveis é uma DMU viável

Modelo do Envelope

- Qualquer DMU eficiente pode ser descrita como combinação linear de um conjunto de DMUs eficientes que contenha uma base ($r + s$ DMUs L.I.)
- Não sabemos quais são as eficientes $\rightarrow$ todas as DMUs devem, à partida, entrar na combinação linear

Modelo do Envelope

- Construção de uma DMU viável a partir de DMUs existentes por combinação linear

$$\overline{X}_N = \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{X}_k + \ldots + \lambda_n \overline{X}_n$$

$$\overline{Y}_N = \lambda_1 \overline{Y}_1 + \lambda_2 \overline{Y}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{Y}_k + \ldots + \lambda_n \overline{Y}_n$$

- Pela ineficiência, DMUs maior *input* e menor *output* também são viáveis

$$\overline{X}_N \geq \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{X}_k + \ldots + \lambda_n \overline{X}_n$$

$$\overline{Y}_N \leq \lambda_1 \overline{Y}_1 + \lambda_2 \overline{Y}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{Y}_k + \ldots + \lambda_n \overline{Y}_n$$

Modelo do Envelope: redução de *inputs*

- Nova DMU deve manter o mesmo *output* e reduzir os *inputs* equiproporcionalmente por um coeficiente *h*

  $$h\overline{X}_o \geq \lambda_1\overline{X}_1 + \lambda_2\overline{X}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{X}_k + \ldots + \lambda_n\overline{X}_n$$

  $$\overline{Y}_o \leq \lambda_1\overline{Y}_1 + \lambda_2\overline{Y}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{Y}_k + \ldots + \lambda_n\overline{Y}_n$$

- Deseja-se que a nova DMU tenha o menor *input* possível continuando viável, ou seja, que esteja na fronteira $\rightarrow$ deve-se minimizar *h*, mantendo-se as restrições de viabilidade
- DMU obtida dessa forma é chamada de alvo da DMU anterior e é eficiente

Modelo do Envelope: redução de *inputs*

Min h

sujeito a

$$h\overline{X}_o \geq \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{X}_k + \ldots + \lambda_n \overline{X}_n$$

$$\overline{Y}_o \leq \lambda_1 \overline{Y}_1 + \lambda_2 \overline{Y}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{Y}_k + \ldots + \lambda_n \overline{Y}_n$$

$$\lambda_k \geq 0$$

- h é a eficiência - Será a mesma do modelo dos multiplicadores?
- Quanto menor h, mais distante a DMU está da fronteira
- $1/h$ é um indicativo da distância da DMU da fronteira, chamada distância de Shephard (apesar de não ser uma métrica)

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

$$\text{Min } h_A$$

sujeito a

$$4h_A \geq 4\lambda_A + \lambda_B + 2\lambda_C + \lambda_D + 10\lambda_E + 12\lambda_F$$

$$3h_A \geq 3\lambda_A + 6\lambda_B + 3\lambda_C + 2\lambda_D + 5\lambda_E + 5\lambda_F$$

$$2 \leq 2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$\text{Min } h_F$$

sujeito a

$$12h_F \geq 4\lambda_A + \lambda_B + 2\lambda_C + \lambda_D + 10\lambda_E + 12\lambda_F$$

$$5h_F \geq 3\lambda_A + 6\lambda_B + 3\lambda_C + 2\lambda_D + 5\lambda_E + 5\lambda_F$$

$$8 \leq 2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Exemplo

DMUs	Eficiência h	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,4545	0	0	0,2273	0	0,1364	0	$S_2=2$
F	1	0	0	0	0	0	0	–

- DMU A é ineficiente; alvo é uma combinação linear das DMUs C e E que são os seus *benchmarks*
- DMU F é eficiente, mas não é o seu próprio alvo $\rightarrow$ é fracamente eficiente
- Soma dos lambdas pode não ser igual a 1

Dualidade

$$\text{Max} \quad Eff_A = 2u_1$$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$
$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$
$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$
$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$
$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$
$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$
$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$
$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

$$\text{Min} \ h_A$$

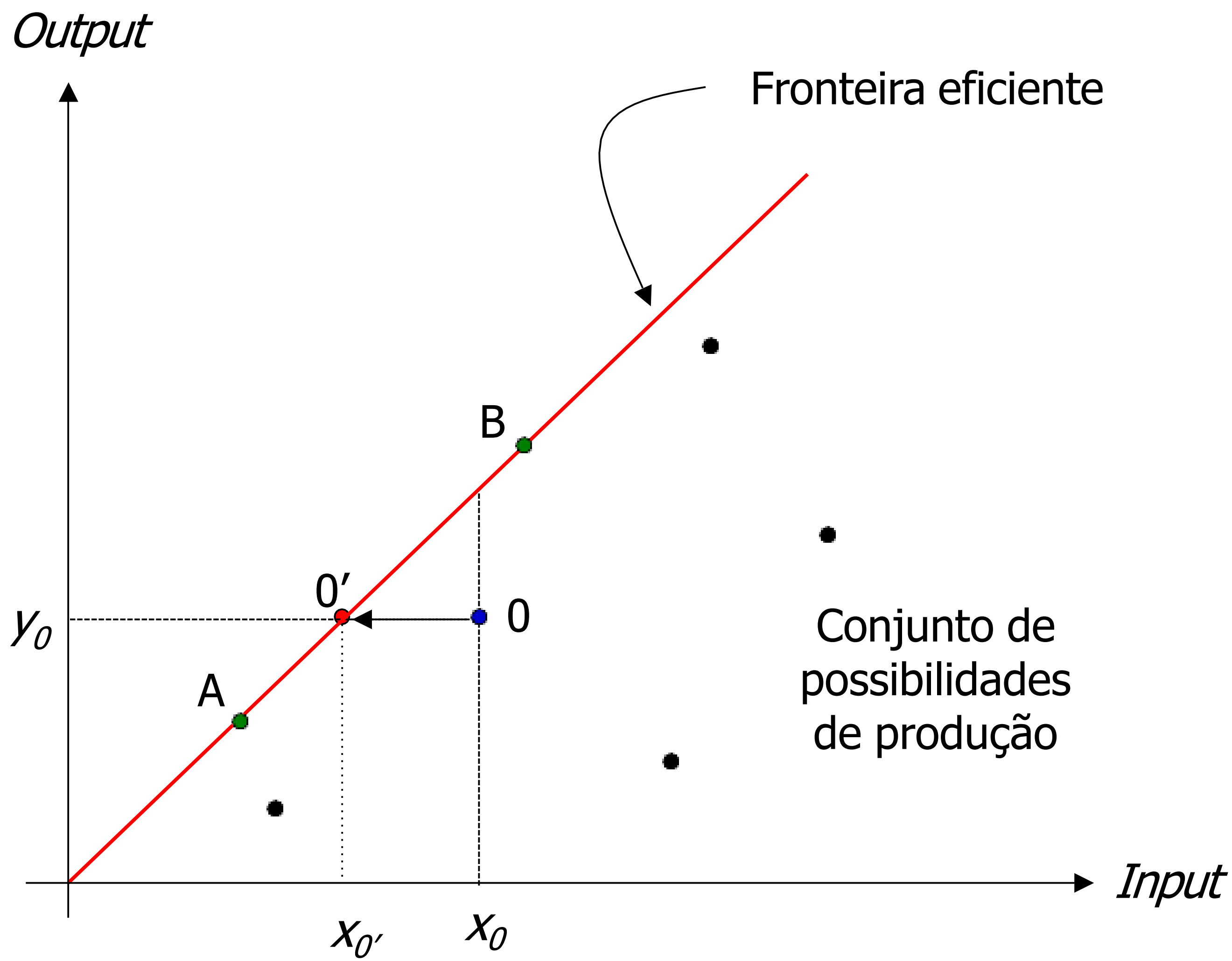
sujeito a

$$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$
$$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$
$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$
$$\lambda_i \geq 0$$

Modelo DEA CCR

- Modelo primal → Modelo dos Multiplicadores
  - Determina conjunto ótimo de pesos (*tradeoffs*)
    - nº de restrições = nº de DMUs +1
    - nº de variáveis = nº de *inputs* + nº de *outputs*
- Modelo dual → Modelo do Envelope
  - Menor nº de restrições - implementação computacional mais fácil
    - nº de restrições = nº de *inputs* + nº de *outputs*
    - nº de variáveis = nº de DMUs + 1
  - Determina quais unidades eficientes que servem de referência para as ineficientes (*mix*)

Modelos DEA CCR/*Inputs*



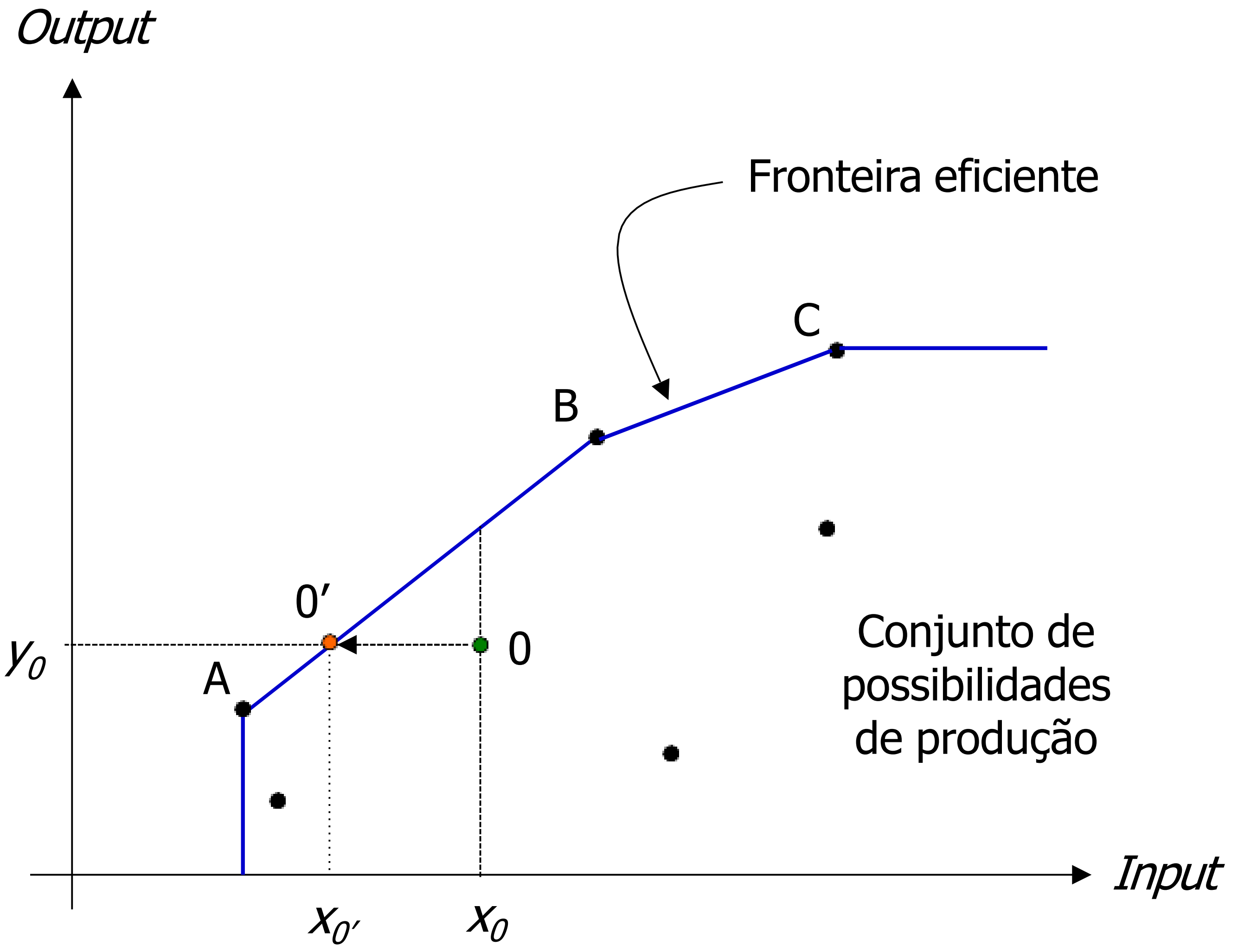
Resultados do modelo DEA CCR

- Eficiência
- Pesos/multiplicadores
- Unidades de referência/*benchmarks*
- Intensidade da contribuição de cada unidade de referência na formação do alvo
- Alvos para *inputs*/*outputs*
- Folgas para *inputs*/*outputs*
- *É importante não só avaliar, mas também promover a eficiência, estabelecendo metas (aumentar outputs, reduzir inputs ou ambos)*

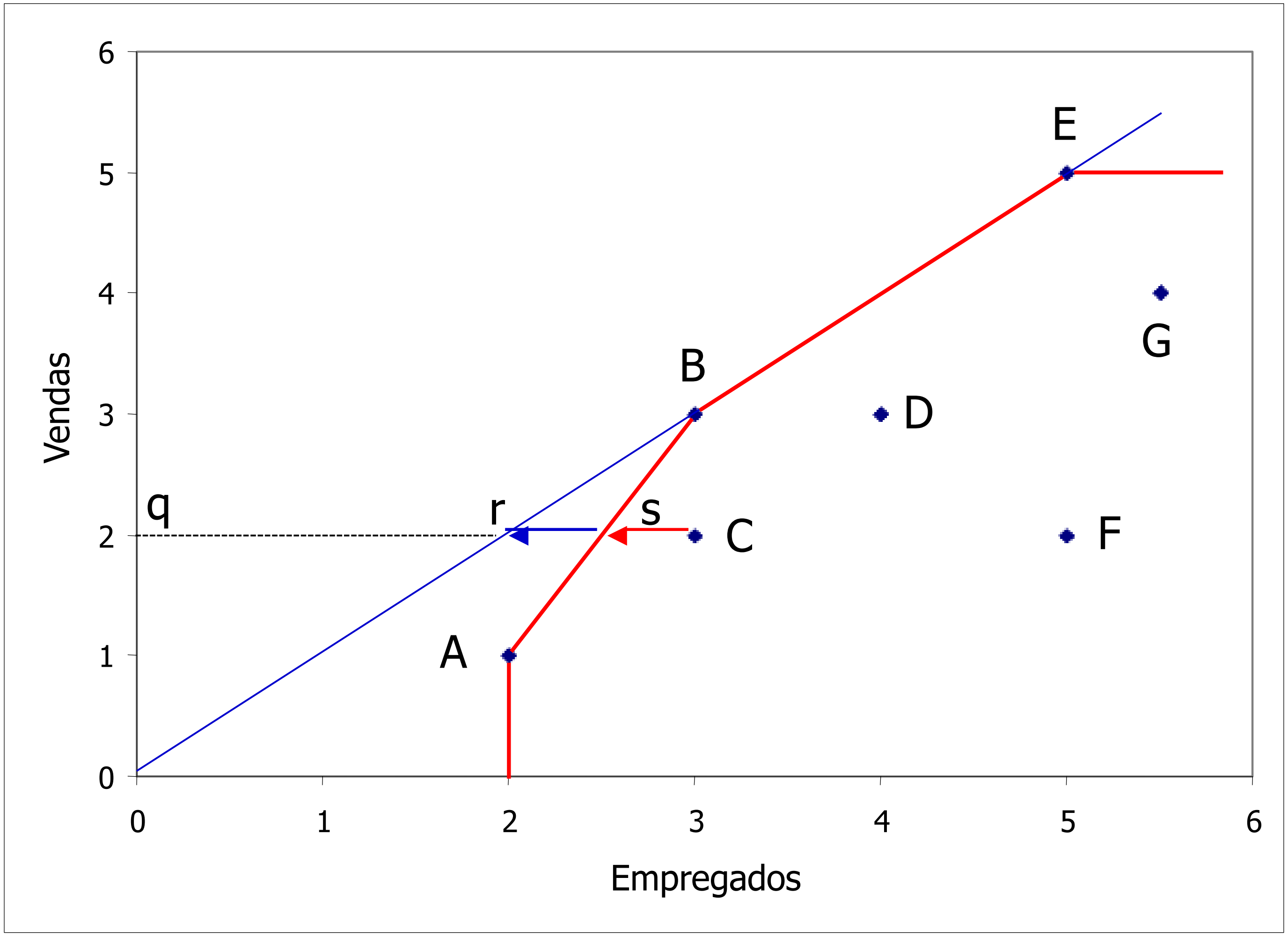
Modelo DEA BCC

- Modelo CCR
  - Retornos constantes de escala
  - Válido para unidades operando em escala ótima
- Modelo BCC ou VRS (Banker, Charnes e Cooper, 1984)
  - Substitui o axioma da **proporcionalidade** pelo axioma da **convexidade**, soma dos lambdas igual a 1
  - Fronteira côncava e linear por partes (*piece-wise linear*) $\rightarrow$ impropriamente chamado "retornos variáveis de escala"

Modelo DEA BCC



Modelo DEA BCC



Modelo CCR
Eficiência = qr/qC

Modelo BCC
Eficiência = qs/qC

Modelo DEA BCC/I

Modelo CCR/I

$$\text{Min} \quad h_o$$

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \ \forall \ k$$

Modelo BCC/I

$$\text{Min} \quad h_o$$

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1}$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Exemplo

DMU	*Input* 1	*Input* 2	*Output*
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8

Exemplo

Min h_A

sujeito a

$$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$

$$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$

$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Min h_F

sujeito a

$$12h_F - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$

$$5h_F - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$

$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Exemplo

DMUs	Eficiência BCC	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,7778	0	0	0,3333	0,6667	0	0	S_1=1,777
F	1	0	0	0	0	1	0	S_2=2

- Eficiências BCC são maiores ou iguais que as eficiências CCR
- Observar somatório dos lambdas igual 1

Modelo DEA BCC/I

Envelope

$$\text{Min} \quad h_o$$

$$\text{sujeito a}$$

$$h_o x_{io} - \sum_k x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_k y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\boxed{\sum_k \lambda_k = 1}$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Multiplicadores

$$\text{Max} \quad Eff_o = \sum_j u_j y_{jo} + \boxed{u_*}$$

$$\text{sujeito a}$$

$$\sum_i v_i x_{io} = 1$$

$$-\sum_i v_i x_{ik} + \sum_j u_j y_{jk} + \boxed{u_*} \leq 0, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$\boxed{u_*} \in \Re$$

Exemplo

Max $\quad Eff_A = 2\,u_1 + u_*$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$

$$2u_1 + u_* - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$5u_1 + u_* - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$

$$4u_1 + u_* - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$1u_1 + u_* - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$

$$8u_1 + u_* - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$8u_1 + u_* - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

$$u_* \in \Re$$

DMU *A*	0,7778
v	0,0000
u_1	0,3333
u_2	0,1111
u_*	0,5556

Modelo DEA BCC/I

$$\text{Max} \quad Eff_o = \frac{\sum_j u_j y_{jo} + u_*}{\sum_i v_i x_{io}}$$

sujeito a

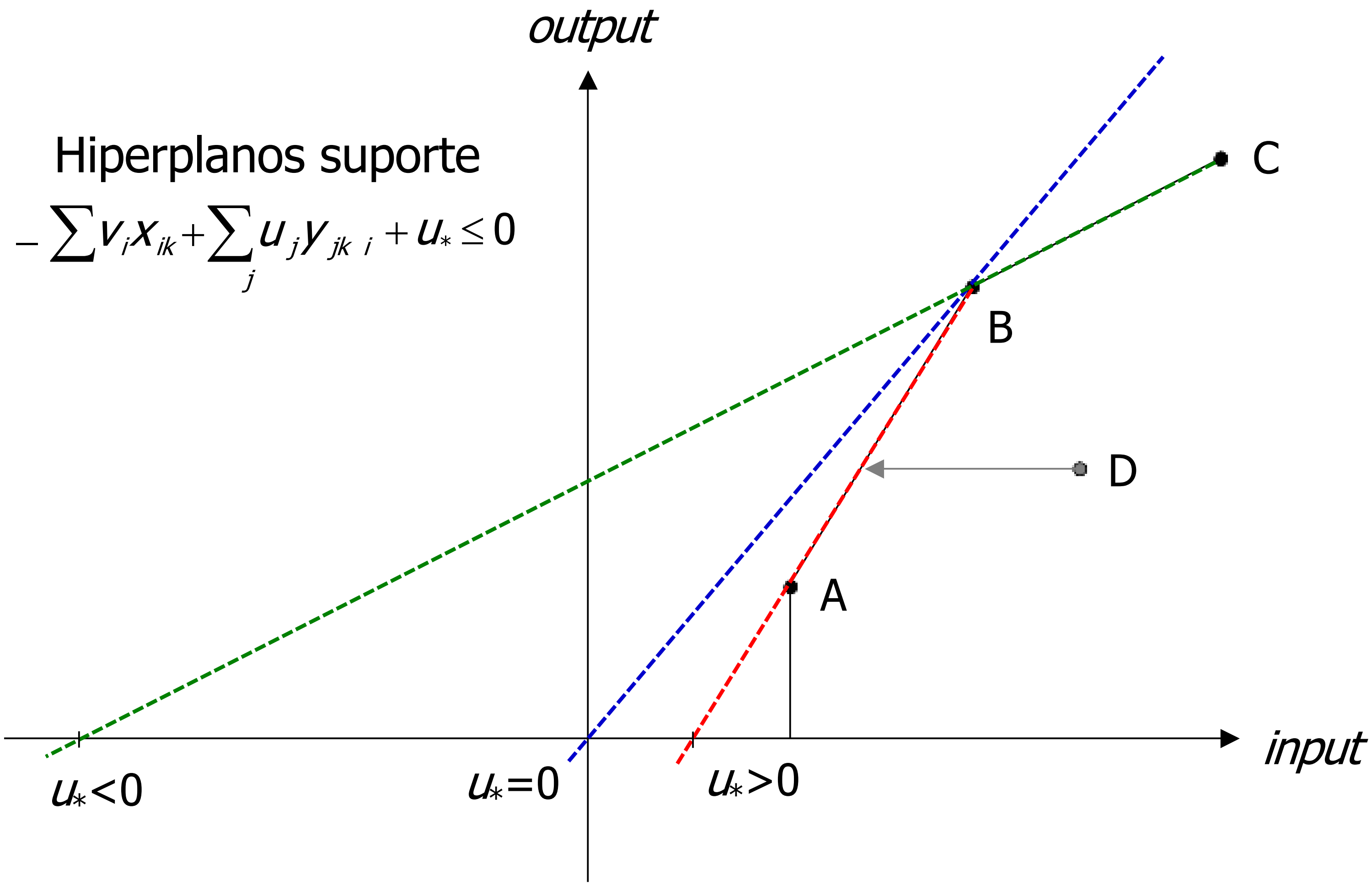
$$\frac{\sum_j u_j y_{jk} + u_*}{\sum_i v_i x_{ik}} \leq 1, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$u_* \in \Re$$

Não há garantia de positividade devido a u_*

Modelo DEA BCC/I

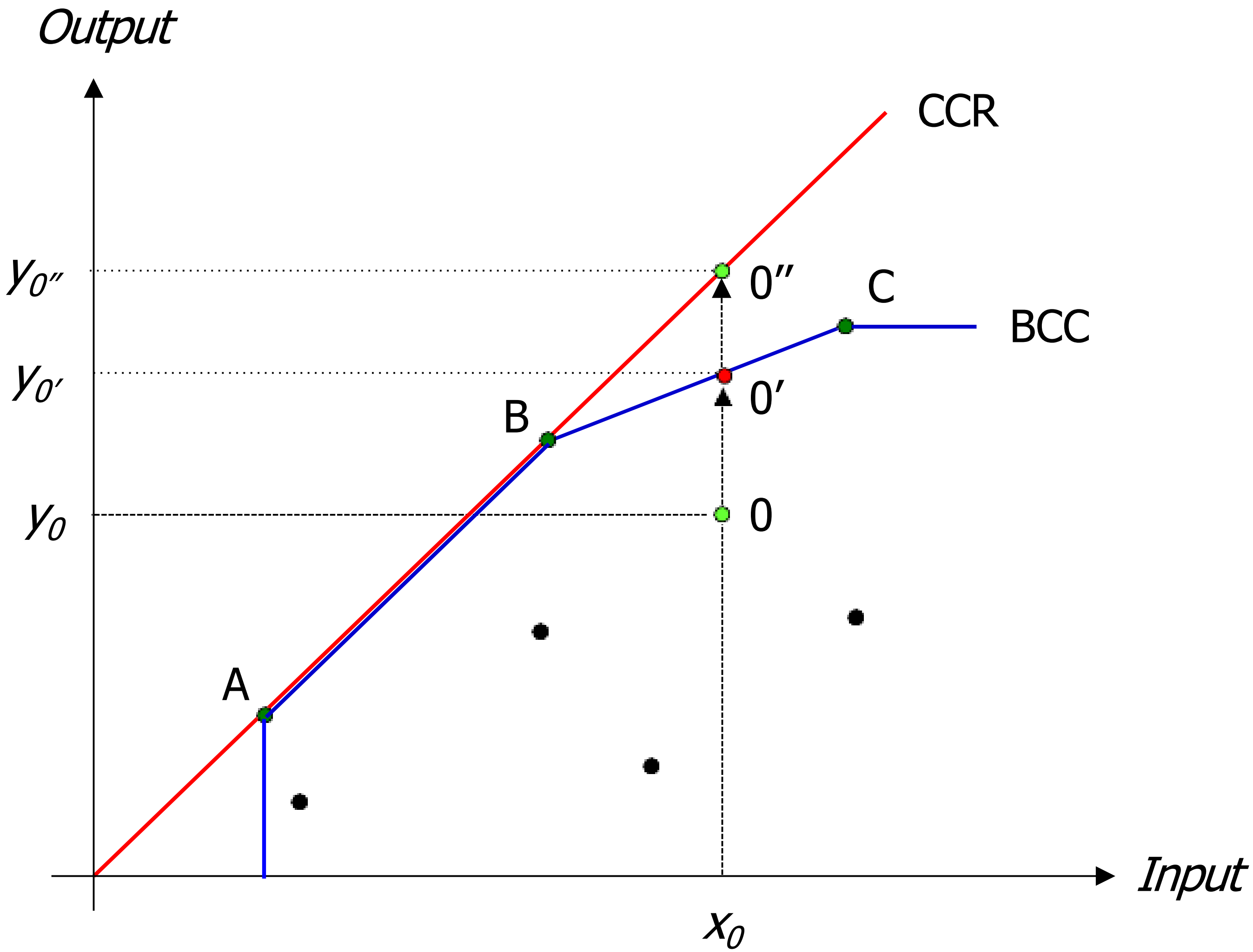


B tem mais de um hiperplano suporte: qual escolher?

Orientação a *outputs*

- É possível atingir a eficiência mantendo os *inputs* constantes e multiplicando os *outputs* por um número *h* maior ou igual a 1
- Neste caso, a eficiência é dada por 1/*h*
- A dedução é feita no Modelo do Envelope
- Obtém-se o Modelo dos Multiplicadores por Dualidade
- No modelo CCR as eficiências independem da orientação; os outros resultados de DEA dependem da orientação
- No modelo BCC todos os resultados de DEA dependem da orientação

Orientação a *outputs*



Modelo DEA CCR/O

Envelope

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad h_o \\
&\text{sujeito} \quad \text{a} \\
&x_{io} - \sum_k x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i \\
&-h_o y_{jo} + \sum_k y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j \\
&\lambda_k \geq 0, \forall k
\end{aligned}
$$

Multiplicadores

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad Eff_o = \sum_i v_i x_{io} \\
&\text{sujeito} \quad \text{a} \\
&\sum_j u_j y_{jo} = 1 \\
&-\sum_i v_i x_{ik} + \sum_j u_j y_{jk} \leq 0, \forall k \\
&u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i
\end{aligned}
$$

Modelo DEA BCC/O

Envelope

$$\text{Max} \quad h_o$$

sujeito a

$$x_{io} - \sum_k x_{ik}\lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-h_o y_{jo} + \sum_k y_{jk}\lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\sum_k \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Multiplicadores

$$\text{Min} \quad Eff_o = \sum_i v_i x_{io} + v_*$$

sujeito a

$$\sum_j u_j y_{jo} = 1$$

$$-\sum_i v_i x_{ik} + \sum_j u_j y_{jk} + v_* \leq 0, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$v_* \in \Re$$

Modelagem em DEA

- Escolha do modelo
  - Comparação de tamanho das DMUs
  - Geometria da superfície de “envelopamento” dos dados, que tem relação com as medidas de eficiência
  - Projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMUs ineficientes até a fronteira de eficiência
    - CCR, BCC etc.
    - Orientação a *inputs*, a *outputs*, não orientado etc.

Modelagem em DEA

- Escolha do modelo: propriedades dos modelos
  - Invariância com a escala de medida
  - Melhor relação *output i* e *input j* é eficiente
  - Maior *output* ou menor *input*: eficiente no BCC
  - BCC é invariante a translações a *output* quando é orientado a *input* e vice-versa

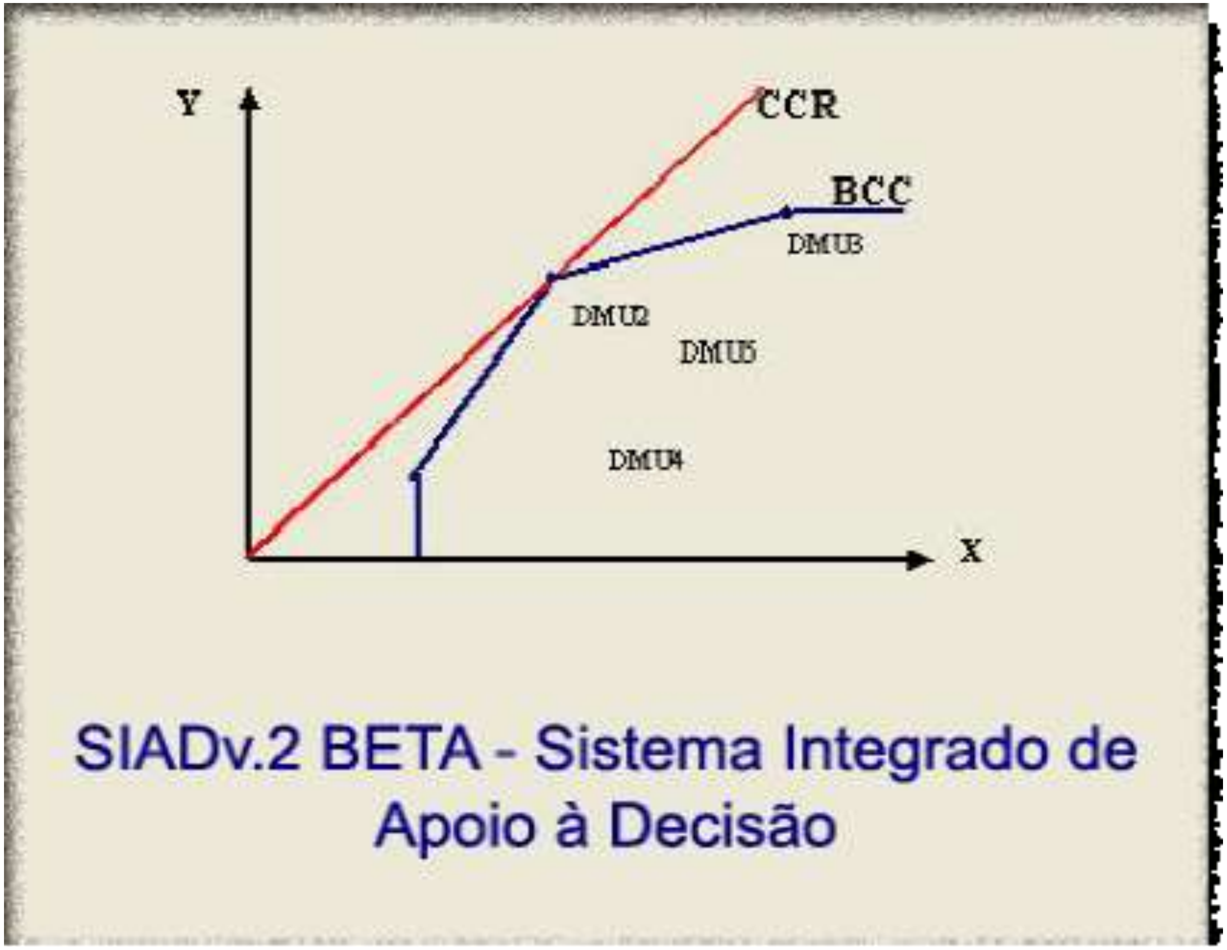
- Escolha das DMUs
- Pré escolha das variáveis

Software

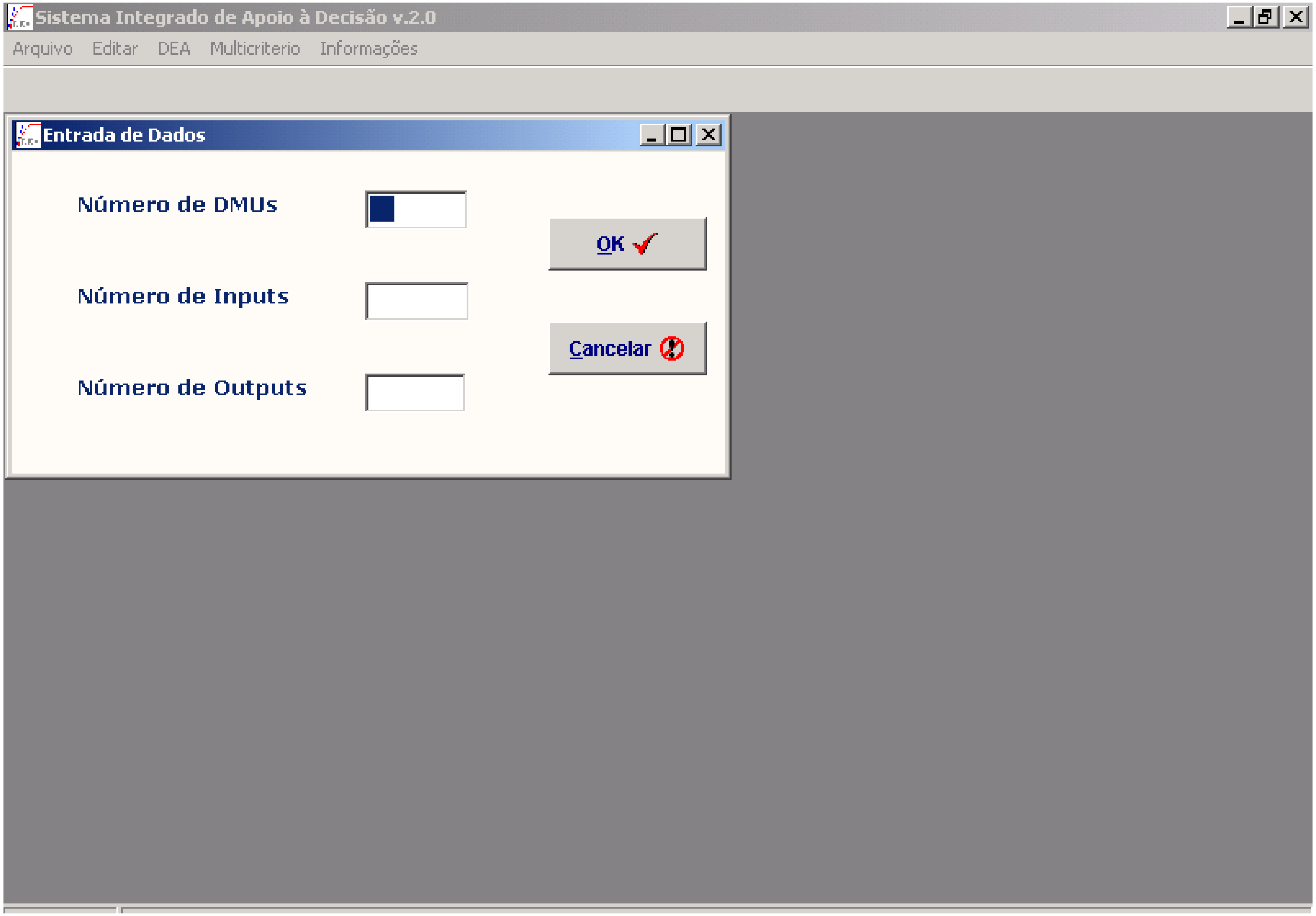
- SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão (http://www.uff.br/decisao)
- EMS (http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/ems/)
- DEAP (http://www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.htm)
- Frontier Analyst (http://www.banxia.com)
- IDEAL (http://pepserv.pep.ufrj.br/~dea/)

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

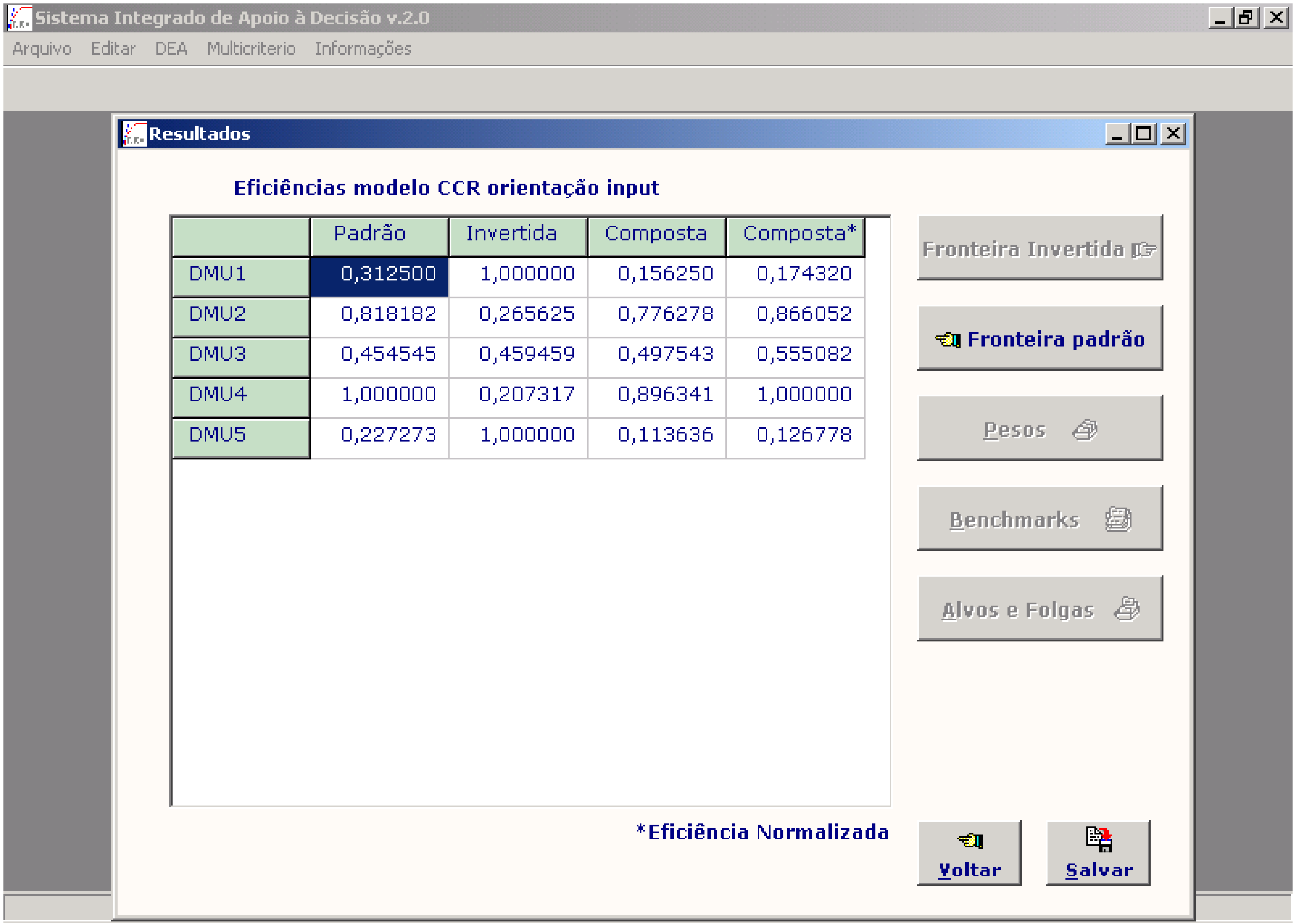
- http://www.uff.br/decisao



SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

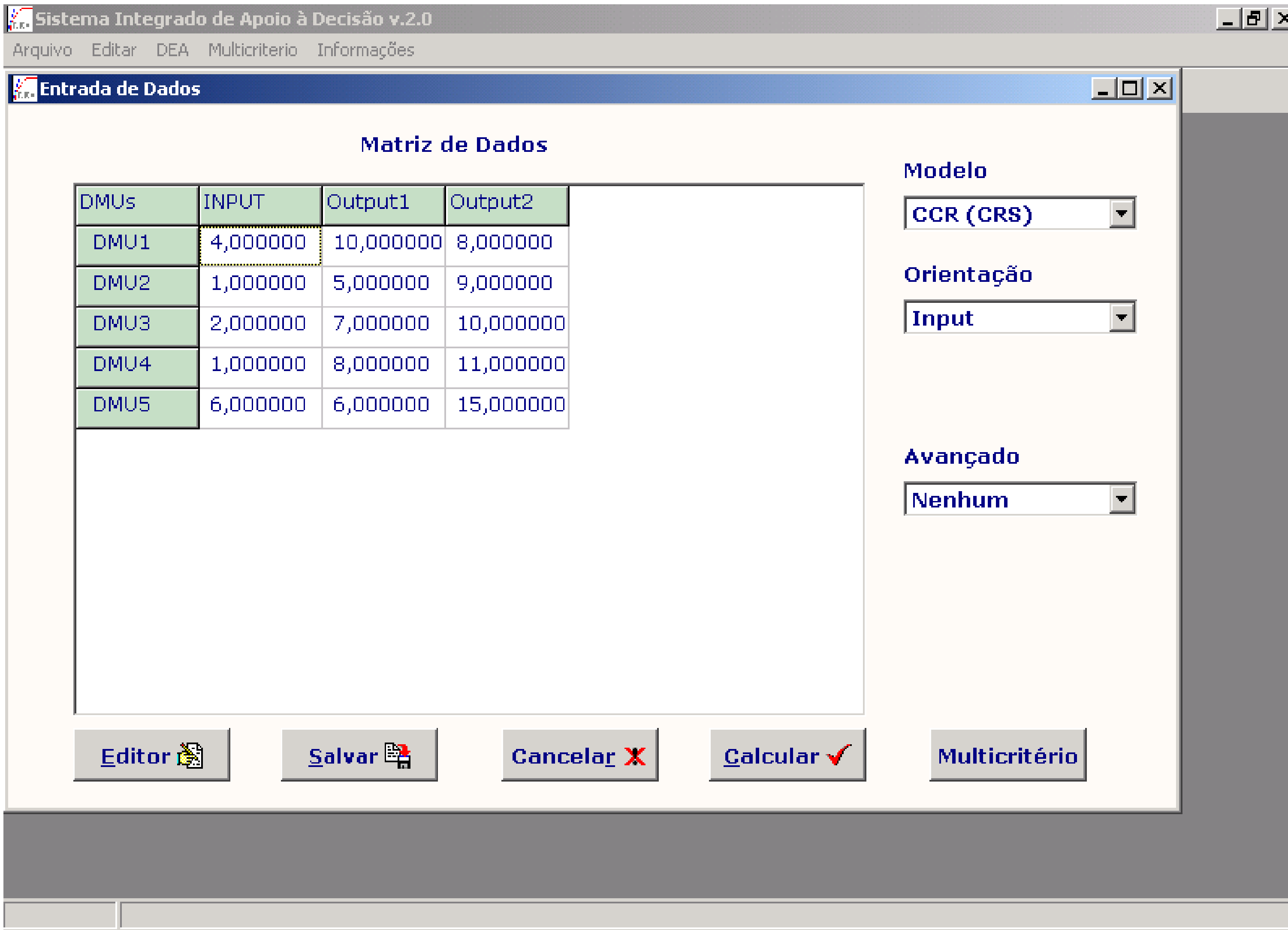


SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão



	Padrão	Invertida	Composta	Composta*
DMU1	0,312500	1,000000	0,156250	0,174320
DMU2	0,818182	0,265625	0,776278	0,866052
DMU3	0,454545	0,459459	0,497543	0,555082
DMU4	1,000000	0,207317	0,896341	1,000000
DMU5	0,227273	1,000000	0,113636	0,126778

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão



Modelos DEA avançados

- **Fronteira Invertida**
  - Inversão dos *inputs* com os *outputs*
  - Representa uma visão pessimista em oposição a uma visão otimista do DEA clássico
  - Índice geral é a média entre eficiência clássica e o complemento da eficiência invertida
  - Bom índice significa que "a DMU é bem avaliada no que é melhor e não é mal avaliada no que é pior"

Modelos DEA avançados

- **Restrições aos pesos**
  - DEA é extremamente benevolente e pode ter pesos irreais
  - Incorporação das preferências do decisor e/ou opinião de especialistas
  - Tipos
    - Restrições diretas
    - Razões de pesos
    - Restrições à importância relativa

Restrições diretas

Max $Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \quad \leq 0, \forall k$$

$$Ii_i \leq v_i \leq Is_i$$

$$Oi_j \leq u_j \quad \leq Os_j$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\ j, i$$

- É difícil saber o significado dos limites impostos aos pesos
- Existe grande probabilidade de o modelo ficar inviável
- No modelo do envelope, cada restrição eqüivale a uma variável extra (multiplicador de Lagrange)
- Restrição direta aos pesos eqüivale a colocar folgas e excessos na função objetivo do modelo do envelope

Razões dos pesos

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \quad \leq 0, \forall k$$

$$Ii_i \leq \frac{v_i}{v_j} \leq Is_i$$

$$Oi_i \leq \frac{u_i}{u_j} \leq Os_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall \; j, i$$

- Restrições adicionais indicam qual peso deve ser maior e por quanto
- Menor problema de inviabilidade
- Faz comparação entre pesos em vez de julgamentos absolutos
- Em alguns casos, a correta interpretação das restrições exige prévia normalização das variáveis

Restrições à importância relativa

$$\text{Max} \quad Eff_0 = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{r} v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

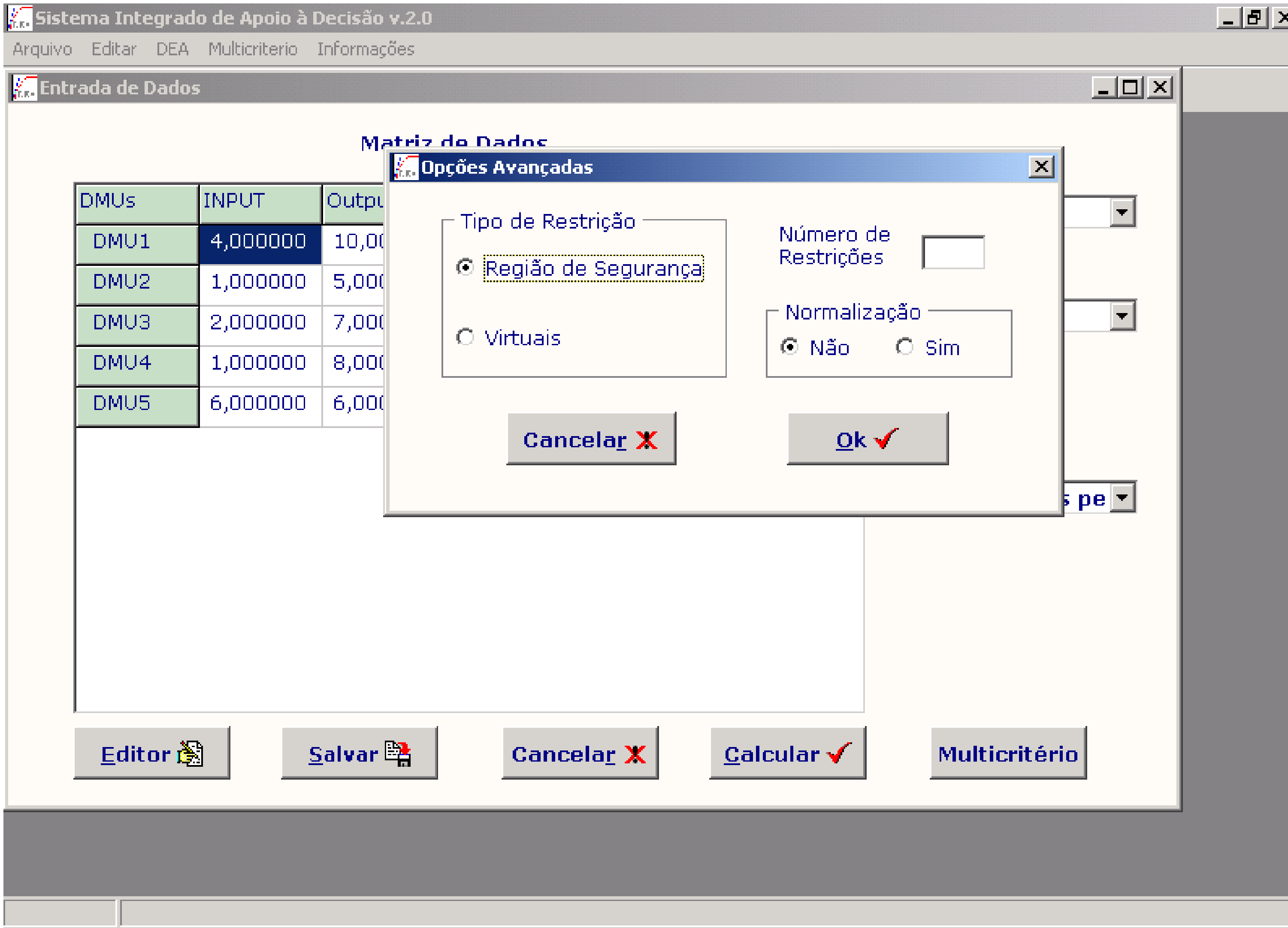
$$\varphi_j \leq \frac{u_j y_{jo}}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}} \leq \rho_j$$

$$a_i \leq \frac{v_i x_{io}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}} \leq \beta_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall\, j,i$$

- Restrições à importância relativa de cada *output* e de cada *input* na formação do *output* e *input* virtual
- Exige muita informação do decisor
- Pode ser usado junto com métodos multicritério, por exemplo, MACBETH
- Inviabilidade: decidir a quem se aplicam as restrições

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão



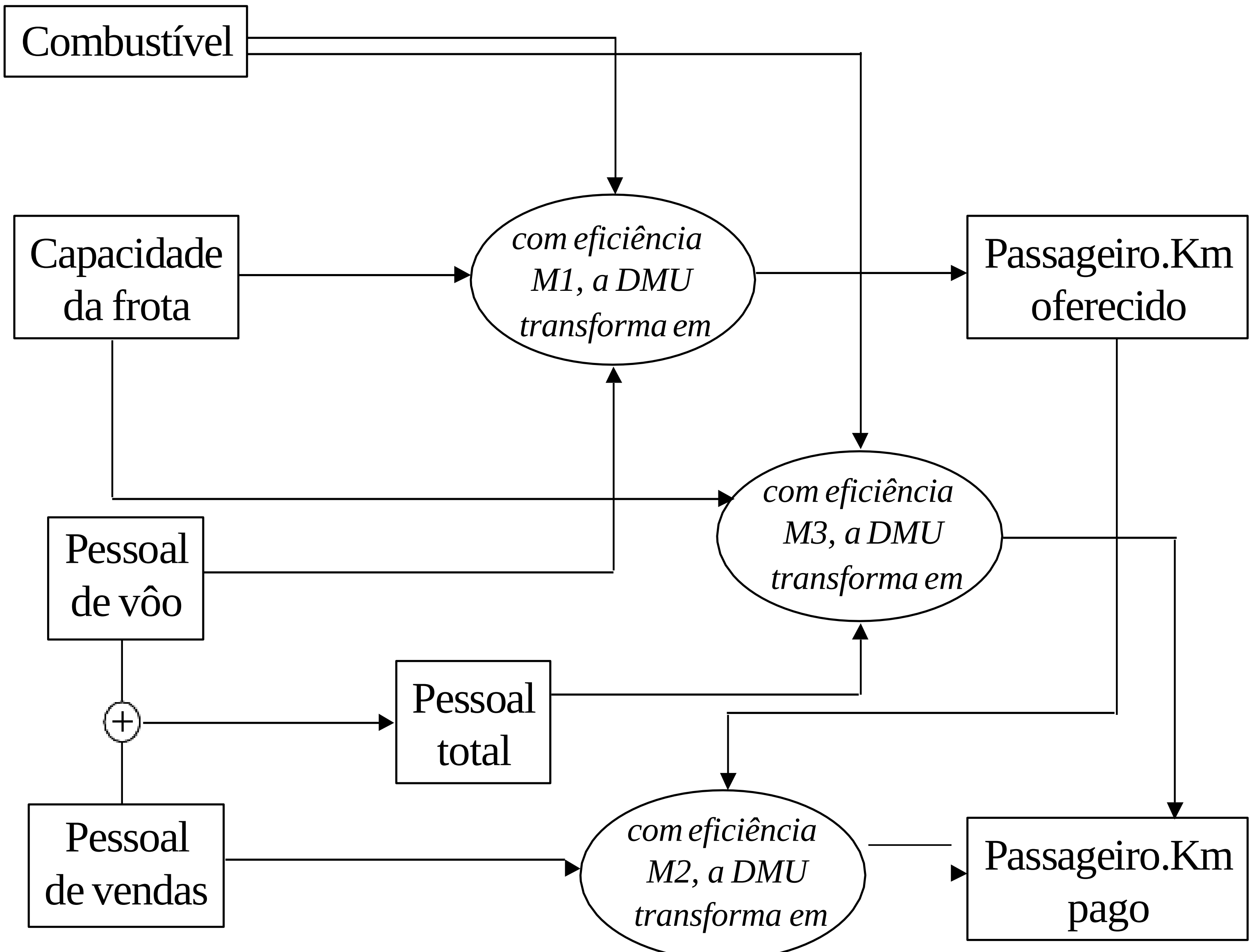
Aplicações

- Descrição do problema
- Escolha do modelo, variáveis, DMUs etc.
- Técnicas usadas para contornar as deficiências de DMU (restrições aos pesos, fronteira invertida etc.)

Exemplo de aplicação I

- Companhias Aéreas (Soares de Mello et al., 2003)
- Problemas
  - Tipo de eficiência a ser medida
  - Uso do modelo BCC colocava a Varig eficiente sem nenhuma avaliação
- Soluções
  - Três modelos distintos: Vendas, Operacional e Global
  - Aumentar o número de DMUs $\rightarrow$ grupos e anos diferentes
- Resultados $\rightarrow$ avaliação temporal e alvos

Exemplo de aplicação I



Exemplo de aplicação II

- Avaliação educacional (Soares de Mello et al., 2003)
- Programas da COPPE: 12 DMUs
- Enfoque de qualidade
- Variáveis
  - *Inputs*: Teses de Mestrado e Teses de Doutorado
  - *Outputs*: Periódicos Nacionais, Periódicos Internacionais, Congressos Nacionais, Congressos Internacionais, Livros, Outros
- Restrições do tipo "Razão dos pesos"

Livros de DEA

- COOPER, W.; SEIFORD, L.M.; ZHU, J. **Handbook on Data Envelopment Analysis** (International Series in Operations Research & Management Science). Boston: Springer, 2004.
- COOPER, W.W.; SEIFORD, L.M.; TONE, K. **Data Envelopment Analysis:** a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver Software. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- LINS, M.P.E.; ANGULO MEZA, L. **Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão**. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, 2000.
- COELLI, T.J.; RAO, D.S.P.; BATTESE, G.E. **An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; LEWIN, A.Y.; SEIFORD, L M. **Data envelopment analysis:** Theory

Referências citadas

- BANKER, R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, p. 429-444, 1978.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L.; GOMES, E.G.; SERAPIÃO, B.P.; LINS, M.P.E. Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. **Pesquisa Operacional**, v. 23, n. 2, p. 325-345, 2003.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G.; ANGULO MEZA, L.; SOARES DE MELLO, M.H.C.. Uma análise da qualidade e da produtividade de Programas de Pós-Graduação em Engenharia. **Ensaio - Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v. 11, n. 39, p. 167-179, 2003.

Obrigado!

http://www.professores.uff.br/joaocsmello/