

Avaliação de eficiência com DEA - Fundamentos matemáticos e modelagem de aplicações.

João Carlos Soares de Mello
Lidia Angulo-Meza





Agenda

- Noções fundamentais
- Modelos matemáticos
- Propriedades
- Introdução aos modelos avançados
- Uso de software
- Modelagem de problemas



Data Envelopment Analysis

- Avaliação de desempenho de unidades produtivas que transformam recursos em produtos
- Medidas de desempenho
 - Eficácia → capacidade de a unidade produtiva atingir a produção que tinha como meta
 - Produtividade → quociente entre o que foi produzido (*output*) e o que foi gasto para produzir (*input*)

$$\text{Produtividade} = \frac{\textit{saída}}{\textit{entrada}}$$



Data Envelopment Analysis

- Produtividade

- Quando há múltiplas variáveis, há necessidade de agregá-las em índices únicos

$$p = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_s y_s}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_r x_r}$$

- a_i e b_j são coeficientes de escala
- Podem ser fixos ou pré-determinados, monetários ou não monetários



Data Envelopment Analysis

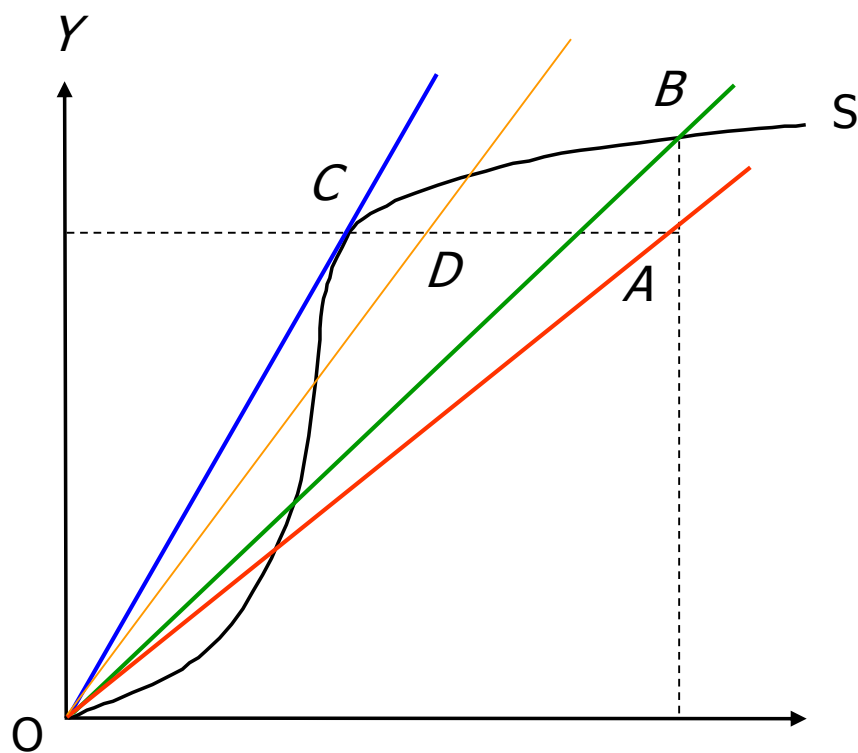
- **Eficiência**

- **Conceito relativo**

- Comparação entre o que foi realizado (produzido/gasto) e o que poderia ter sido realizado por uma unidade de referência

- Formas de determinar a eficiência: métodos paramétricos (regressão, uma função para a fronteira de produção) e não paramétricos (DEA clássico)
- Medida de excelência: não existem “outliers”

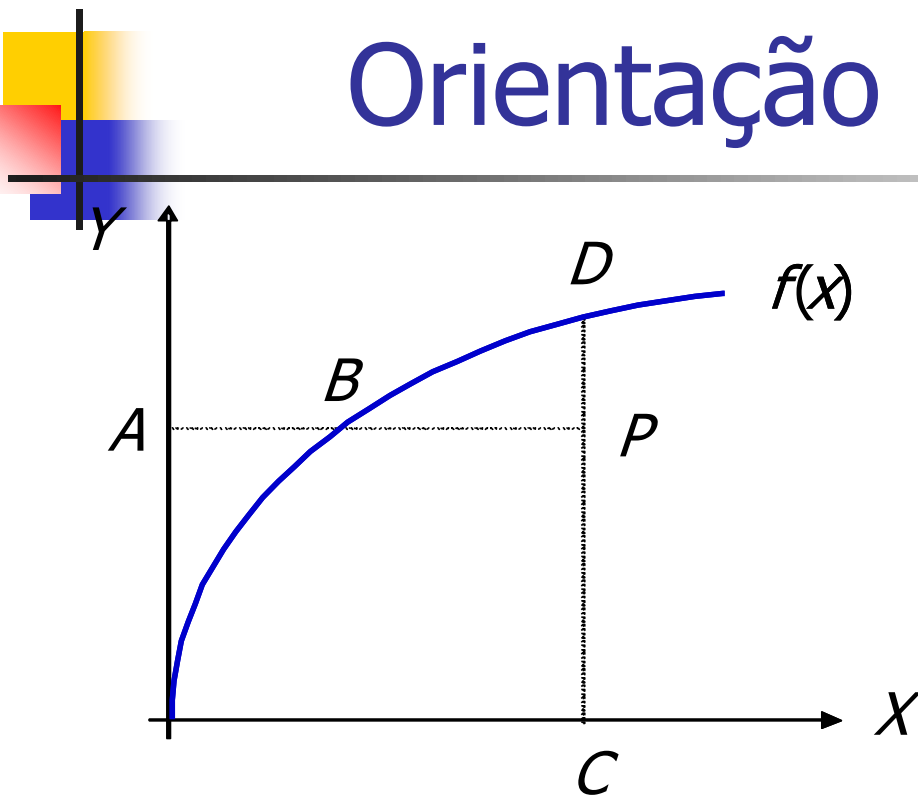
Produtividade x Eficiência



$$\text{Produtividade} = Y/X$$

- $A \rightarrow$ ineficiente
- $C \rightarrow$ tecnicamente eficiente e de maior produtividade \rightarrow
 $\text{Produtividade} = dY/dX$
- $B \rightarrow$ eficiente, mas não é mais produtiva
- $D \rightarrow$ mais produtiva que B , mas não é eficiente

Orientação a recursos



- Em quanto os recursos podem ser reduzidos sem alterar a produção
- Eficiência técnica = AB/AP

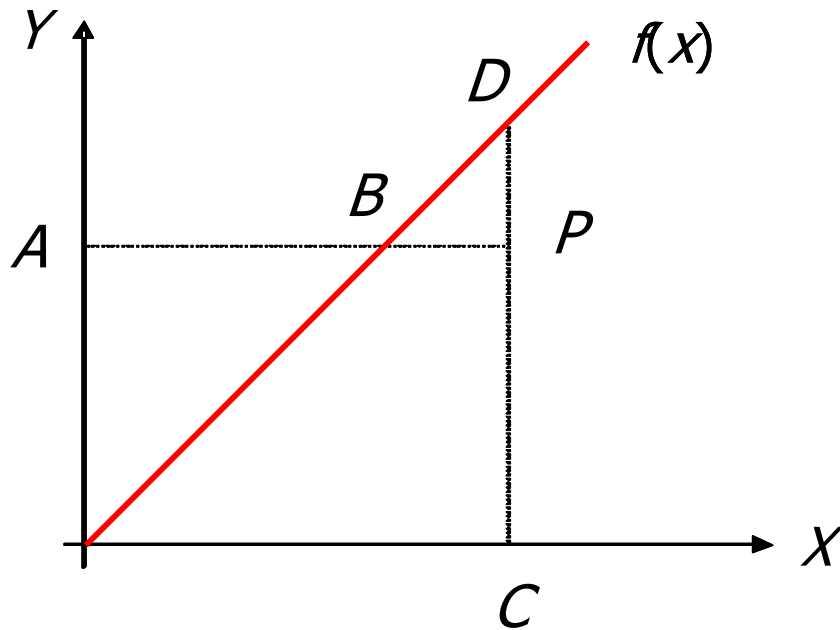
$$P(X_P, Y_P)$$

$$B(X_B, Y_B) \rightarrow X_B = hX_P$$

$$A(0, Y_P)$$

$$h = X_B/X_P = AB/AP$$

Orientação a produtos



- Em quanto os produtos podem ser aumentados sem alterar os recursos
- Eficiência técnica = CP/CD
- Equivalente à anterior somente sob certas condições



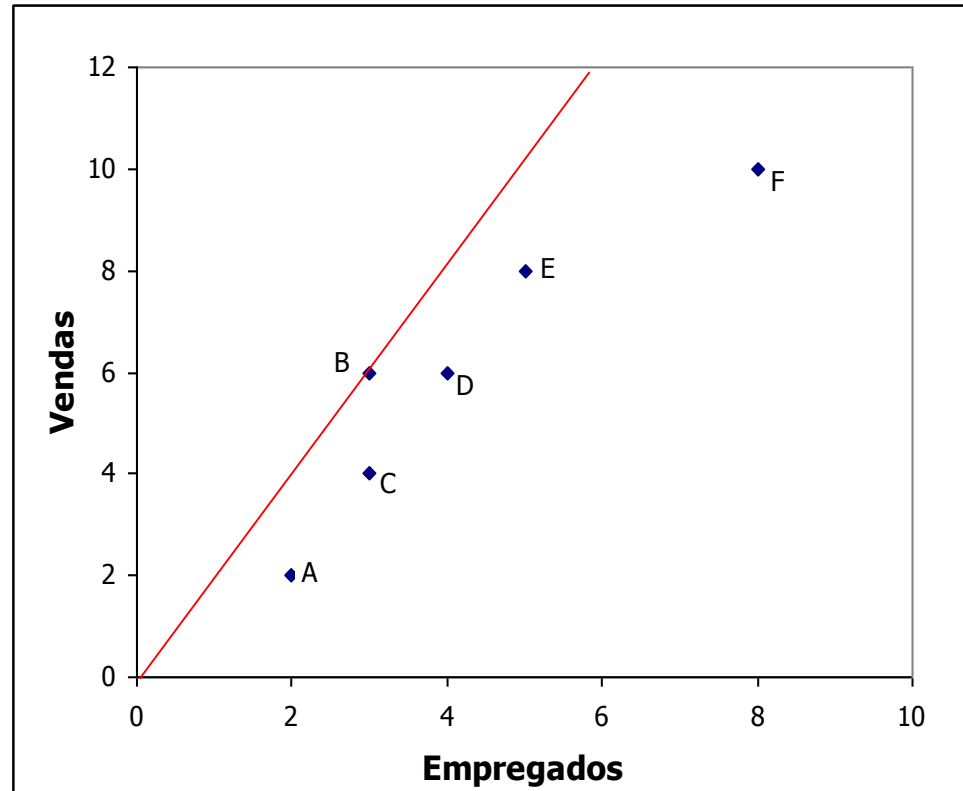
Produtividade x Eficiência

Exemplo:

- Produtividade: Vendas/Empregados

Loja	A	B	C	D	E	F
Empregados	2	3	3	4	5	8
Vendas (R\$100.000)	2	6	4	6	8	10
Produtividade	1	2	1,33333	1,5	1,6	1,25

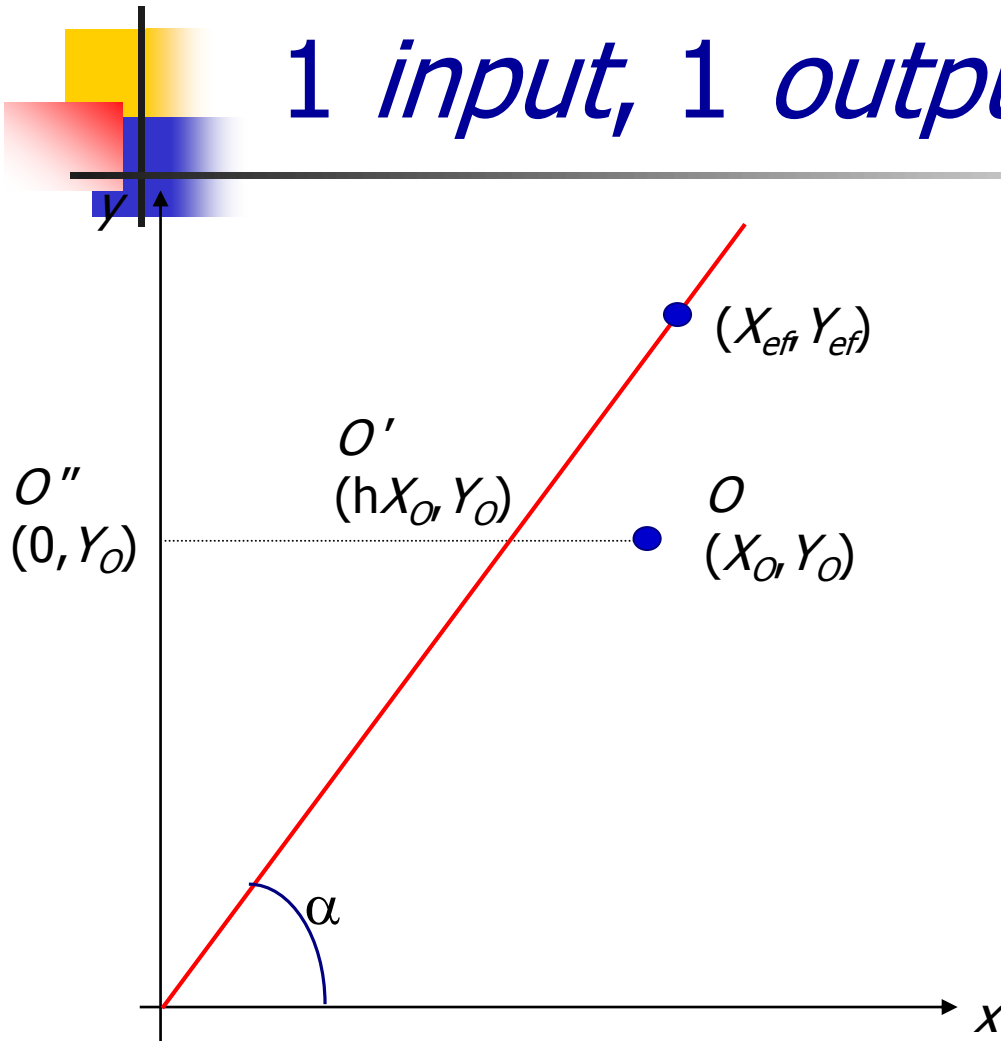
Produtividade x Eficiência



- B eficiente, as outras ineficientes

Loja	A	B	C	D	E	F
Eficiência	0,5	1	0,667	0,75	0,8	0,625

1 input, 1 output



- $Y_{ef} = a X_{ef} \Rightarrow a = Y_{ef} / X_{ef}$
- $a \rightarrow$ produtividade da unidade eficiente = $\text{tg } \alpha$
- Eficiência \rightarrow produtividade de uma unidade comparada a de com uma unidade eficiente
- Modelo CCR do envelope orientado a *input*

$$Ef = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{O''O}} = \frac{X_{ef}}{X_o} = \frac{Y_o / a}{X_o} = \frac{Y_o}{X_o} \frac{1}{a} = \frac{P_o}{P_{ef}}$$



Multidimensional

PPL

$$\text{Max } \frac{u_{1o}Y_{1o} + u_{2o}Y_{2o} + \dots + u_{jo}Y_{jo}}{v_{1o}X_{1o} + v_{2o}X_{2o} + \dots + v_{io}X_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{u_{1o}Y_{1j} + u_{2o}Y_{2j} + \dots + u_{jo}Y_{jk}}{v_{1o}X_{1j} + v_{2o}X_{2j} + \dots + v_{io}X_{ik}} \leq 1, \quad k = 1 \dots n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad i = 1 \dots r, \quad j = 1 \dots s$$

- Função objetivo segue o conceito de Farrell
- Restrições garantem que é uma eficiência
- Será a mesma eficiência anterior?



Interpretação do modelo

- Charnes, Cooper e Rhodes, 1978
- Eficiência relativa é o quociente entre soma ponderada dos *outputs* e soma ponderada dos *inputs*

$$Eficiência_{DMU_k} = \frac{\sum_j u_j y_{jk} \leftarrow \text{output virtual}}{\sum_i v_i x_{ik} \leftarrow \text{input virtual}}$$

- Pesos são dados por um PPL de forma mais benevolente para cada DMU
- Modelo com proporcionalidade → alteração em uma variável produz alteração proporcional em outra variável



Caso particular: 1 *input*, 1 *output*

- PPNL

$$\text{Max } \frac{uY_o}{vX_o}$$

sujeito a

$$\frac{uY_k}{vX_k} \leq 1$$

- Para calcular u/v

$$\frac{uY_{ef}}{vX_{ef}} = 1$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{Y_{ef} / X_{ef}} = \frac{1}{P_{ef}}$$

$$Ef = \frac{P_o}{P_{ef}}$$

- Neste caso particular as duas eficiências coincidem
- Demonstração geral usa dualidade



Modelo CCR

$$\text{Max } Eff_0 = \left(\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{i0}} \right)$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad \forall j, i$$

- Problema de programação fracionária
- Calcula os pesos para os *inputs* e *outputs* (v_i e u_j)
- Unidade 0 \rightarrow unidade em análise
- Problema tem múltiplas soluções ótimas \rightarrow linearização



Modelo DEA CCR

$$\text{Max } Eff_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall j, i$$

- Problema de Programação Linear
- Modelo dos multiplicadores (determina conjunto de pesos e eficiência)
- DMU é CCR eficiente se $Eff^* = 1$ e existe uma solução ótima com v^* e $u^* > 0$



Exemplo

DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8



Exemplo

$$\text{Max } \text{Eff}_A = 2 u_1$$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$

$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$

$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

$$\text{Max } \text{Eff}_B = 5 u_1$$

sujeito a

$$1v_1 + 6v_2 = 1$$

$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$

$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$



Exemplo

Pesos				Eficiência (%)
DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>	
A	0,045	0,273	0,227	45,45
B	0,200	0,133	0,200	100,00
C	0,050	0,300	0,250	100,00
D	0,429	0,286	0,429	42,85
E	0,025	0,150	0,125	100,00
F	0,000	0,200	0,125	100,00

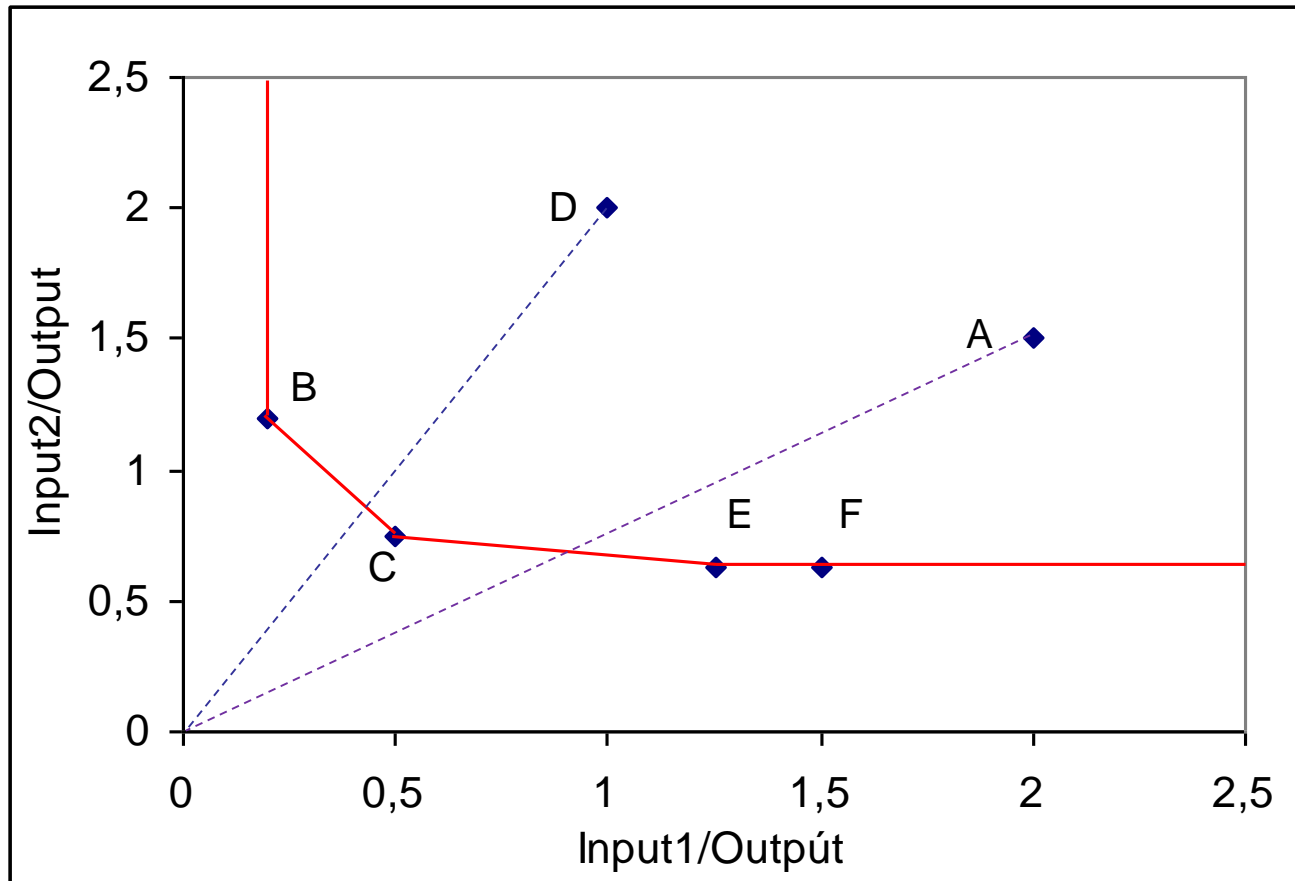


Exemplo: invariância com escala

DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
A	40	3	2
B	10	6	5
C	20	3	4
D	10	2	1
E	100	5	8
F	120	5	8

Pesos				
DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>	Eficiência (%)
A	0,0045	0,273	0,227	45,45
B	0,0200	0,133	0,200	100,00
C	0,0050	0,300	0,250	100,00
D	0,0429	0,286	0,429	42,85
E	0,0025	0,150	0,125	100,00
F	0,0000	0,200	0,125	100,00

Representação gráfica



A e D ineficientes; B, C e E eficientes;
F parece eficiente, mas menos eficiente que E;
só consegue eficiência com um peso zero



Análise de resultados

- B, C e E Pareto eficientes
- F fracamente eficiente ou não Pareto eficiente
- Qualquer DMU em região da fronteira paralela aos eixos tem a mesma designação
- B e E admitem outro esquema de pesos
 - DMU E: 0 para o *input* 1 e 0,2 para o *input* 2
- Propriedade é válida para todos os vértices da fronteira, chamados de DMUs extremo eficientes



Modelo do Envelope

- Baseado na redução do *input*, como visto anteriormente
- Caso haja mais de um *input*, aplica-se a redução de Debreu, ou seja, redução equiproporcional
- Admite-se que se é possível produzir de forma eficiente também é possível produzir de forma ineficiente (aumento de *inputs* ou redução de *outputs*)
- Admite-se que não há restrição quanto à escala de operação (raio ilimitado)



Modelo do Envelope

- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor Y de *outputs* com um vetor X de *inputs*, então é possível produzir de forma eficiente um vetor kY de *outputs* com um vetor kX de *inputs*
- Se é possível produzir de forma eficiente um vetor Y_1 e Y_2 de *outputs* com, respectivamente, vetores X_1 e X_2 de *inputs*, é possível produzir de forma eficiente $Y = Y_1 + Y_2$ *outputs* com $X = X_1 + X_2$ *inputs*
- A combinação linear de um conjunto de DMUs viáveis é uma DMU viável



Modelo do Envelope: orientação a *inputs*

Min h

sujeito a

$$h\bar{X}_o \geq \lambda_1 \bar{X}_1 + \lambda_2 \bar{X}_2 + \dots + \lambda_k \bar{X}_k + \dots + \lambda_n \bar{X}_n$$

$$\bar{Y}_o \leq \lambda_1 \bar{Y}_1 + \lambda_2 \bar{Y}_2 + \dots + \lambda_k \bar{Y}_k + \dots + \lambda_n \bar{Y}_n$$

$$\lambda_k \geq 0$$

- h é a eficiência - Será a mesma do modelo dos multiplicadores?
- Quanto menor h , mais distante a DMU está da fronteira
- $1/h$ é um indicativo da distância da DMU da fronteira, chamada distância de Shephard (apesar de não ser uma métrica)



Exemplo

DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8



Exemplo

Min h_A

sujeito a

$$4h_A \geq 4\lambda_A + \lambda_B + 2\lambda_C + \lambda_D + 10\lambda_E + 12\lambda_F$$

$$3h_A \geq 3\lambda_A + 6\lambda_B + 3\lambda_C + 2\lambda_D + 5\lambda_E + 5\lambda_F$$

$$2 \leq 2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F$$

$$\lambda_i \geq 0$$



Exemplo

DMUs	Eficiência h	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,4545	0	0	0,2273	0	0,1364	0	$S_2=2$

- DMU A é ineficiente; alvo é uma combinação linear das DMUs C e E que são os seus *benchmarks*
- Soma dos lambdas pode não ser igual a 1



Dualidade

$$\text{Max } Eff_A = 2 u_1$$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$

$$2u_1 - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$5u_1 - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$

$$4u_1 - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$1u_1 - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$8u_1 - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

$$\text{Min } h_A$$

sujeito a

$$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$

$$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$

$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$



Modelo DEA BCC

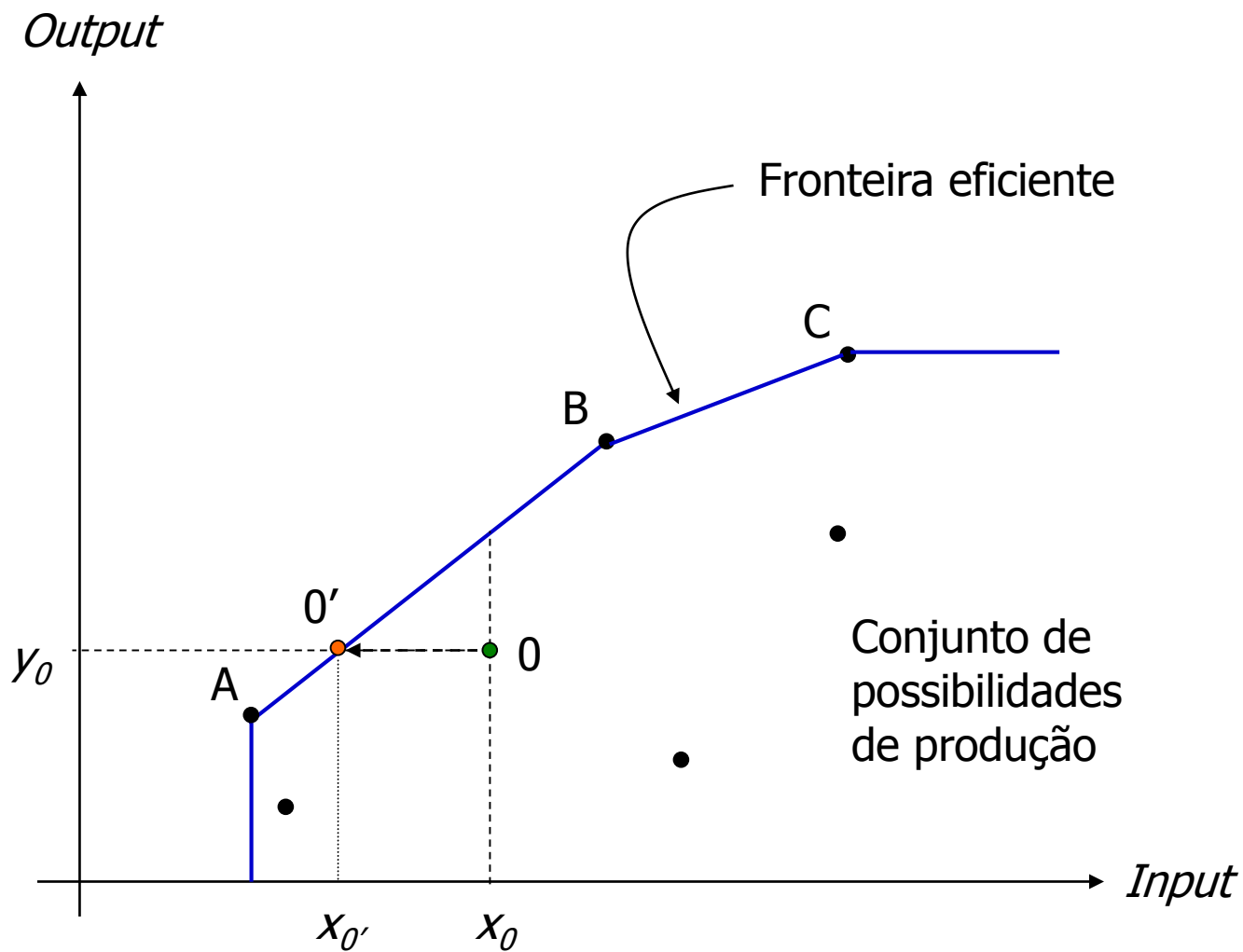
- Modelo CCR

- Retornos constantes de escala
- Válido para unidades operando em escala ótima

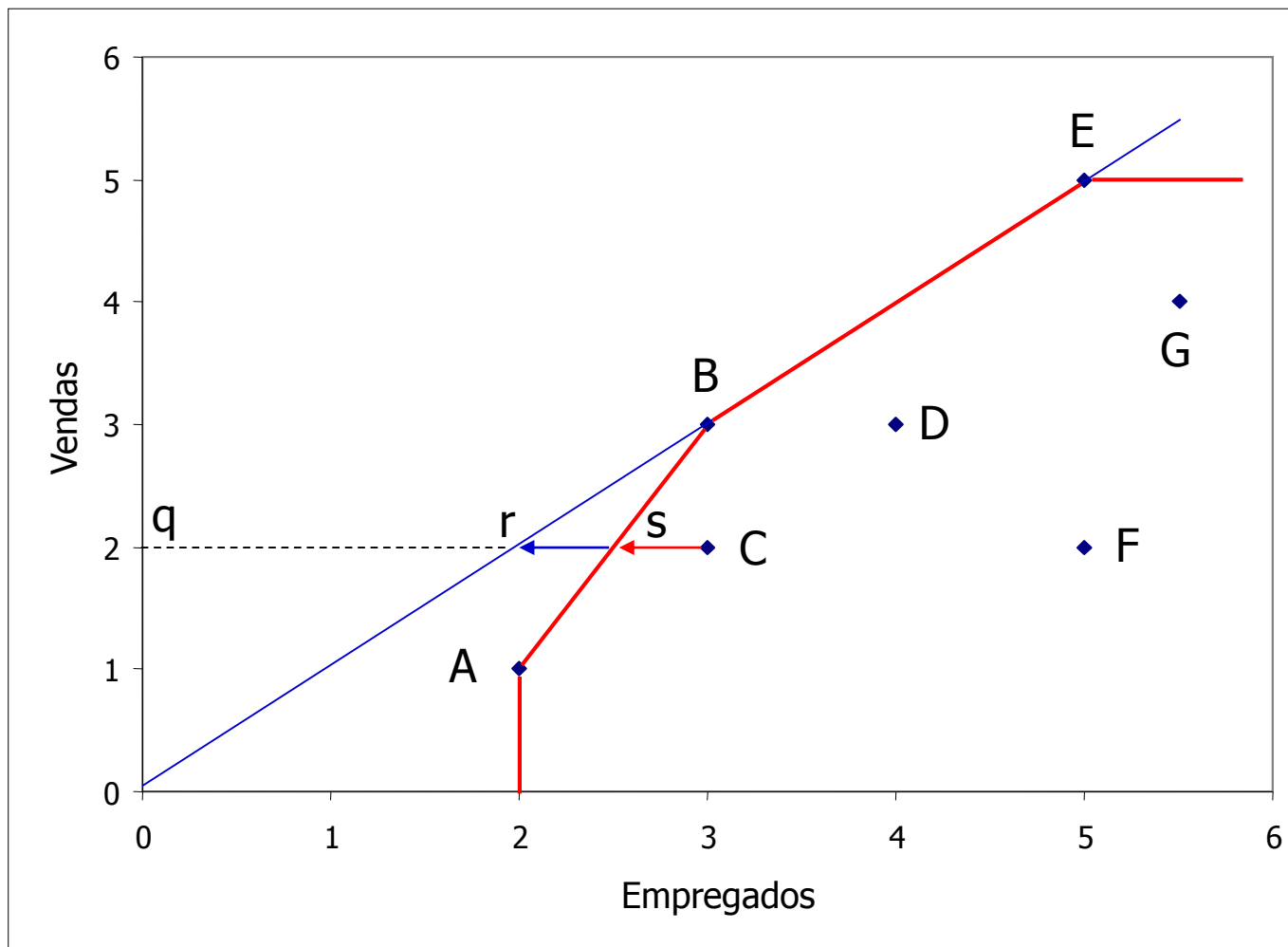
- Modelo BCC ou VRS (Banker, Charnes e Cooper, 1984)

- Substitui o axioma da **proporcionalidade** pelo axioma da **convexidade**, soma dos lambdas igual a 1
- Fronteira côncava e linear por partes (*piece-wise linear*) → impropriamente chamado “retornos variáveis de escala”
- Mais benevolente com as unidades

Modelo DEA BCC



Modelo DEA BCC



Modelo CCR
Eficiência = qr/qC

Modelo BCC
Eficiência = qs/qC



Modelo DEA BCC/I

Modelo CCR/I

Min h_o
sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i \quad \Longrightarrow$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Modelo BCC/I

Min h_o
sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$



Exemplo

DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
A	4	3	2
B	1	6	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8
F	12	5	8



Exemplo

Min h_A

sujeito a

$$4h_A - 4\lambda_A - \lambda_B - 2\lambda_C - \lambda_D - 10\lambda_E - 12\lambda_F \geq 0$$

$$3h_A - 3\lambda_A - 6\lambda_B - 3\lambda_C - 2\lambda_D - 5\lambda_E - 5\lambda_F \geq 0$$

$$2\lambda_A + 5\lambda_B + 4\lambda_C + \lambda_D + 8\lambda_E + 8\lambda_F - 2 \geq 0$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$



Exemplo

DMUs	Eficiência BCC	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	Folga
A	0,7778	0	0	0,3333	0,6667	0	0	$S_1=1,777$

- Eficiências BCC são maiores ou iguais que as eficiências CCR
- Observar somatório dos lambdas igual 1



Modelo DEA BCC/I

Envelope

$$\begin{aligned} &\text{Min } h_o \\ &\text{sujeito a} \\ &h_o x_{io} - \sum_k x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i \\ &-y_{jo} + \sum_k y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j \\ &\boxed{\sum_k \lambda_k = 1} \\ &\lambda_k \geq 0, \forall k \end{aligned}$$

Multiplicadores

$$\begin{aligned} &\text{Max } Eff_o = \sum_j u_j y_{jo} + \boxed{u_*} \\ &\text{sujeito a} \\ &\sum_i v_i x_{io} = 1 \\ &-\sum_i v_i x_{ik} + \sum_j u_j y_{jk} + \boxed{u_*} \leq 0, \forall k \\ &u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i \\ &\boxed{u_*} \in \Re \end{aligned}$$



Exemplo

$$\text{Max } \text{Eff}_A = 2 u_1 + u_*$$

sujeito a

$$4v_1 + 3v_2 = 1$$

$$2u_1 + u_* - 4v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$5u_1 + u_* - 1v_1 - 6v_2 \leq 0$$

$$4u_1 + u_* - 2v_1 - 3v_2 \leq 0$$

$$1u_1 + u_* - 1v_1 - 2v_2 \leq 0$$

$$8u_1 + u_* - 10v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$8u_1 + u_* - 12v_1 - 5v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

$$u_* \in \mathbb{R}$$

DMU A	0,7778
v	0,0000
u_1	0,3333
u_2	0,1111
u_*	0,5556



Modelo DEA BCC/I

$$\text{Max } Eff_o = \frac{\sum_j u_j y_{jo} + u_*}{\sum_i v_i x_{io}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_j u_j y_{jk} + u_*}{\sum_i v_i x_{ik}} \leq 1, \forall k$$

$$u_j \geq 0, v_i \geq 0, \forall j, i$$

$$u_* \in \Re$$

Possibilidade de eficiências negativas ocultas devido a u_*



Orientação a *outputs*

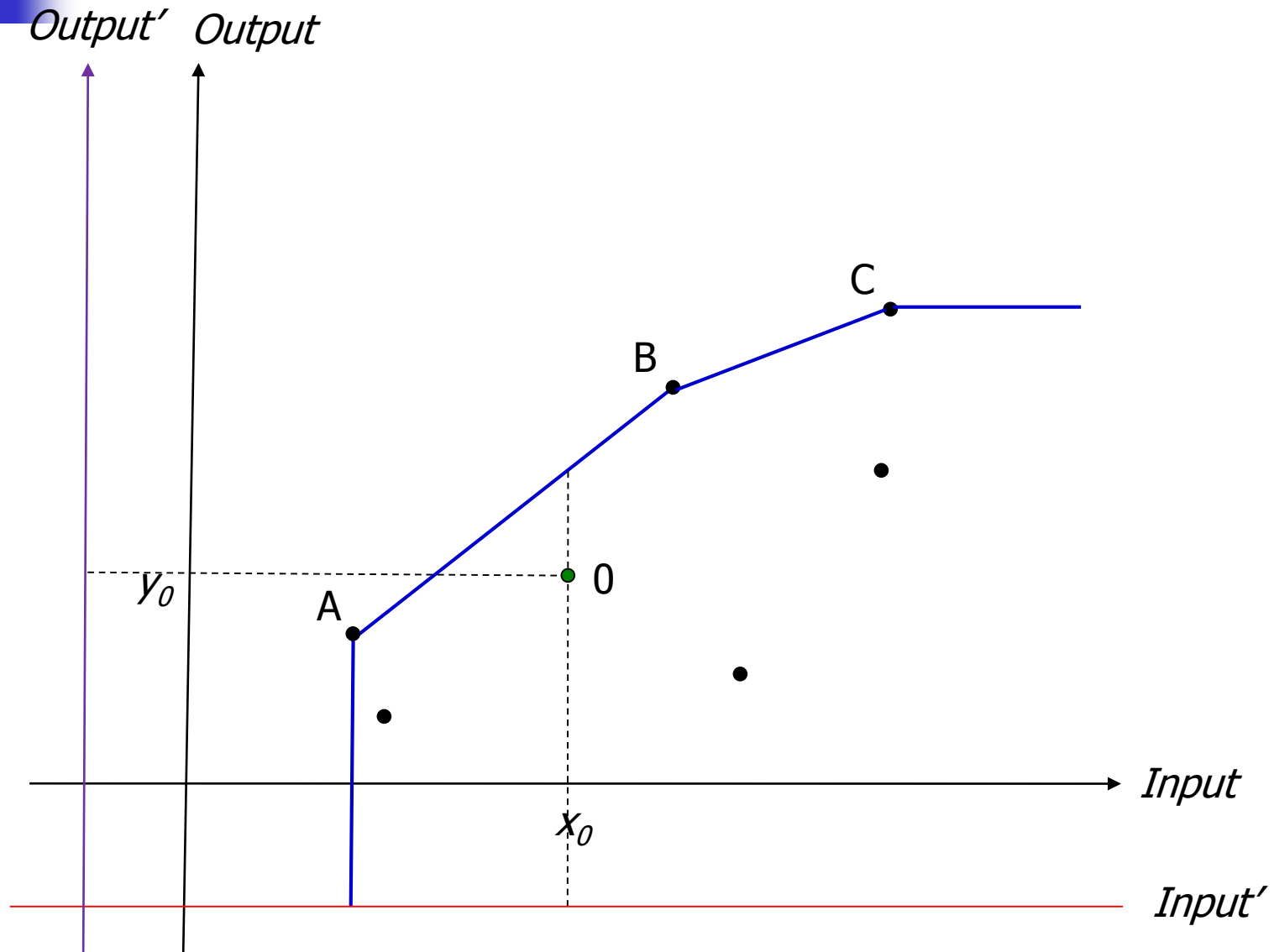
- É possível atingir a eficiência mantendo os *inputs* constantes e multiplicando os *outputs* por um número h maior ou igual a 1
- Neste caso, a eficiência é dada por $1/h$
- A dedução é feita no Modelo do Envelope
- Obtém-se o Modelo dos Multiplicadores por Dualidade
- No modelo CCR as eficiências independem da orientação; os outros resultados de DEA dependem da orientação
- No modelo BCC todos os resultados de DEA dependem da orientação



Propriedades dos modelos

- Invariância com a escala de medida
- Melhor relação output i e input j é eficiente: obriga haver relação causal
- Maior output ou menor input: eficiente no BCC
- BCC é invariante a translações a output quando é orientado a input e vice-versa: aplicação para valores negativos

Invariância do BCC com translações





Introdução aos modelos avançados

- Fronteira invertida
- Restrições aos pesos
- Avaliação Cruzada
- Input unitário
- Network DEA
- Modelos multiobjetivo
- Outputs indesejáveis
- Representação bi-dimensional para múltiplos inputs e outputs
- Outros



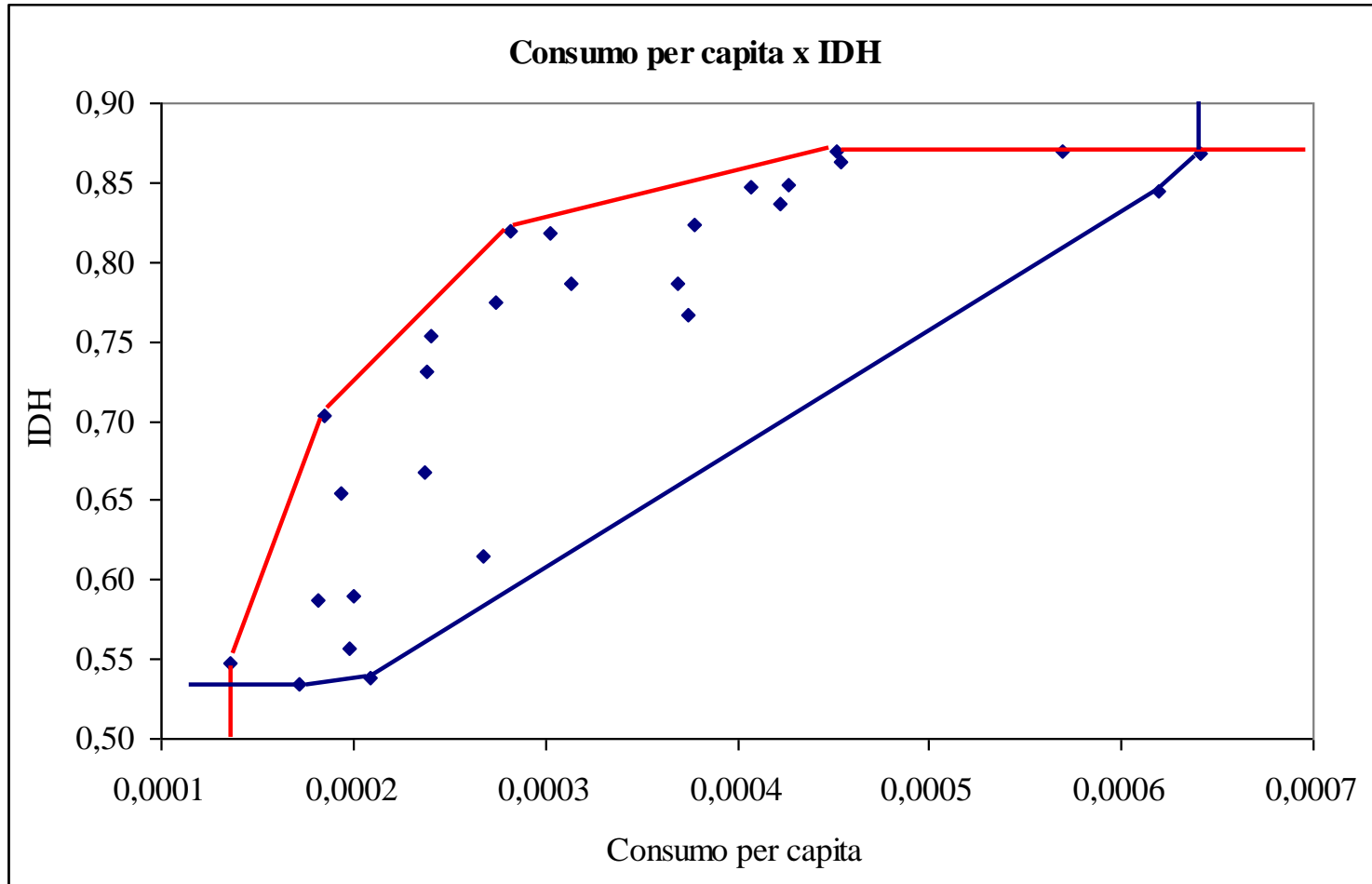
Modelos DEA avançados

■ **Fronteira Invertida**

- Inversão dos *inputs* com os *outputs*
- Inversão da orientação
- Duas interpretações:
 - Representa uma visão pessimista em oposição a uma visão otimista do DEA clássico, identificação das piores práticas gerencias
 - Pontos de vista ou óticas opostas (Ex: apartamento para venda, mesmas variáveis, ótica do comprador e do vendedor)

Fronteira Invertida

■ Modelo BCC





Modelos DEA avançados

■ Fronteira Invertida

- Índice de eficiência da fronteira invertida é um índice de ineficiência para a fronteira padrão
- Índice geral, eficiência composta é a média entre eficiência padrão e o complemento da eficiência invertida

$$eficiencia\ composta = \frac{[eficiencia\ padrao + (1 - eficiencia\ invertida)]}{2}$$

- Bom índice significa que “a DMU é bem avaliada no que é melhor e não é mal avaliada no que é pior”
- Não permitimos especialização de uma DMU



Modelos DEA avançados

■ **Fronteira Invertida**

- Melhora na discriminação de DMUs eficientes sem incluir julgamentos a priori
- Para uma DMU ter um bom índice composto: ela é bem avaliada no que é melhor (um bom desempenho), mas não pode ter um desempenho fraco naquilo que não se destaca
- Não permitimos especialização de uma DMU



Modelos DEA avançados

- **Restrições aos pesos**

- DEA é extremamente benevolente e pode ter pesos irrealistas
- Incorporação das preferências do decisor e/ou opinião de especialistas
- Tipos
 - Restrições diretas
 - Razões de pesos
 - Restrições à importância relativa



Restrições diretas

$$\text{Max } Eff_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$Li_i \leq v_i \leq Is_i$$

$$Oi_j \leq u_j \leq Os_j$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall j, i$$

- É difícil saber o significado dos limites impostos aos pesos
- Existe grande probabilidade de o modelo ficar inviável
- No modelo do envelope, cada restrição equivale a uma variável extra (multiplicador de Lagrange)
- Restrição direta aos pesos equivale a colocar folgas e excessos na função objetivo do modelo do envelope



Razões dos pesos

$$\text{Max } Eff_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$Ii_i \leq \frac{v_i}{v_j} \leq Is_i$$

$$Oi_i \leq \frac{u_i}{u_j} \leq Os_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall j, i$$

- Restrições adicionais indicam qual peso deve ser maior e por quanto
- Menor problema de inviabilidade
- Faz comparação entre pesos em vez de julgamentos absolutos
- Em alguns casos, a correta interpretação das restrições exige prévia normalização das variáveis



Restrições à importância relativa

$$\text{Max } Eff_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$\varphi_j \leq \frac{u_j y_{j0}}{\sum_{j=1}^s u_j y_{j0}} \leq \rho_j$$

$$a_i \leq \frac{v_i x_{i0}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{i0}} \leq \beta_i$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall j, i$$

- Restrições à importância relativa de cada *output* e de cada *input* na formação do *output* e *input* virtual
- Exige muita informação do decisor
- Inviabilidade: decidir a quem se aplicam as restrições



Avaliação Cruzada

- Avaliação cruzada (Sexton et al, 1986)
- Surgiu para resolver dois problemas em DEA: falta de discriminação e uma melhor distribuição dos pesos das variáveis, atualmente utilizado para rankings
- Útil em situações em que não existe consenso sobre a importância das variáveis
- Faz uma avaliação de conjunto, isto é considera as “opiniões” das outras DMUs
- Cada DMU é avaliada considerando os pesos das outras DMUs do conjunto: avaliação cruzada
- Enfoque semelhante: *common set of weights* (CSW)



Avaliação Cruzada

- Seja

$$E_{ko} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{io}}$$

a eficiência cruzada da DMU O utilizando o conjunto de pesos da DMU k

- u_{rk} é o peso do output r encontrado rodando o PPL da DMU k
- v_{ik} é o peso do input i encontrado rodando o PPL da DMU k



Avaliação Cruzada

- Então, múltiplas soluções ótimas (múltiplos conjuntos de pesos que fornecem a mesma eficiência) precisamos de um segundo PPL para achar o conjunto de pesos mais adequado
- Objetivo do segundo problema: escolher um conjunto de pesos que minimize a eficiência cruzada média das outras DMUs

$$\text{Minimizar } (n-1)A_k = \sum_{j \neq k} E_{kj} = \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}}$$

- Problema não linear, diversas propostas de linearização, dentre elas DEA-Game



Input unitário

$$\text{Max } h_0 = \sum_j u_j y_{j0}$$

subject to

$$\sum_j u_j y_{jk} \leq 1, \forall k$$

$$u_j \geq 0, \forall j$$

$$\text{Min } \sum_k \lambda_k$$

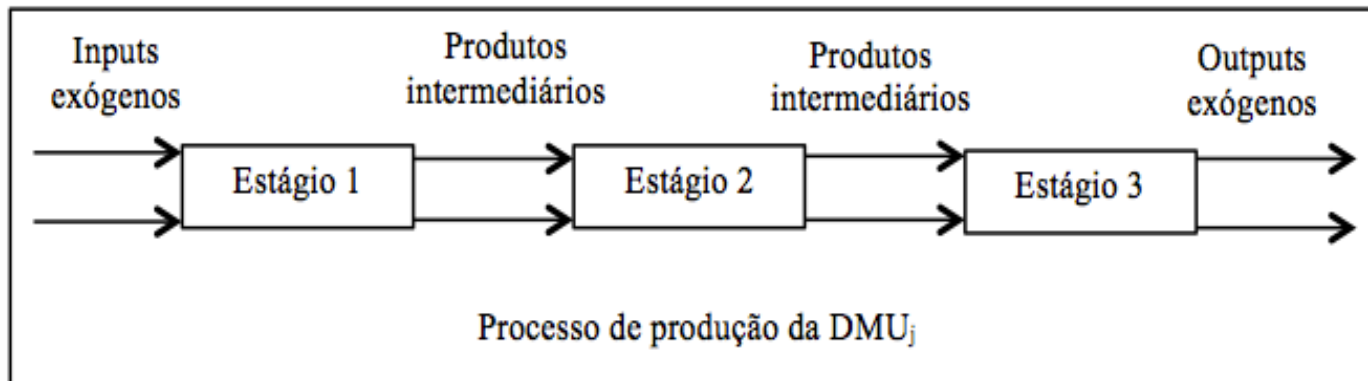
subject to

$$\sum_k y_{jk} \lambda_k \geq y_{j0}, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Network DEA

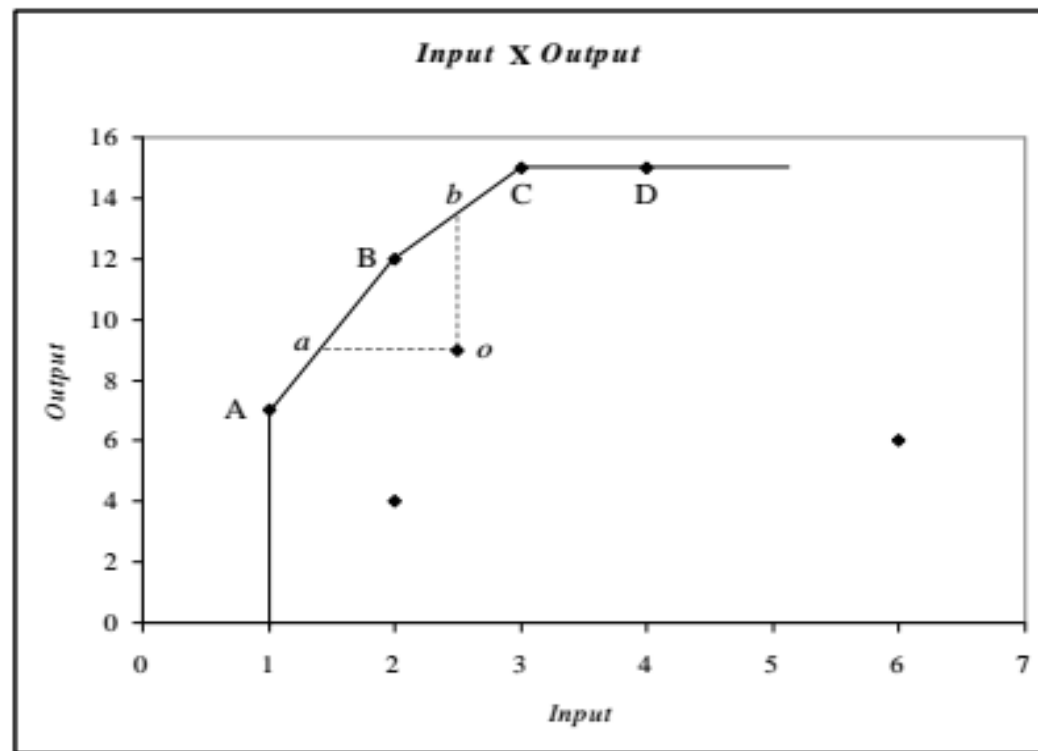
- Abre a “black box” de DEA
- Vários processos: output de um processo é o input do processo seguinte (variável intermediária)
- Modelos mais utilizados: relacional (multiplicativo) e aditivo



- Inputs e outputs exógenos apresentam significado diferente do utilizado em análises estatística

Modelos multiobjetivo

- Modelos MORO: determinam alvos alternativos



Modelos Multiobjetivo

- Modelo MCDEA:
 - Três funções objetivo
 - Com ferramentas adicionais serve para rankings

$$\text{Min } d_0$$

$$\text{Min Max } d_j$$

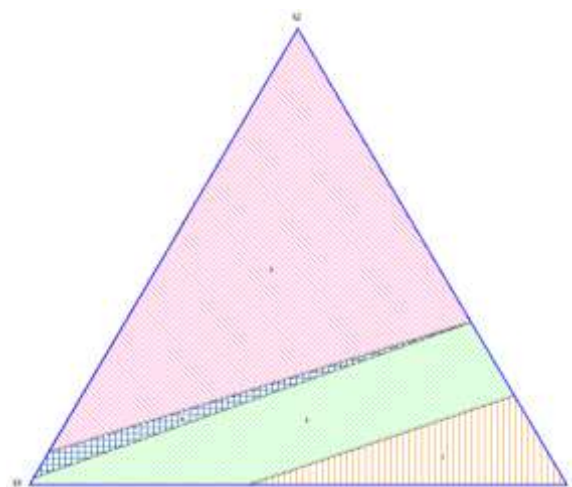
$$\text{Min } \sum_{j=1}^n d_j$$

subject to

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad \forall r, i, j$$



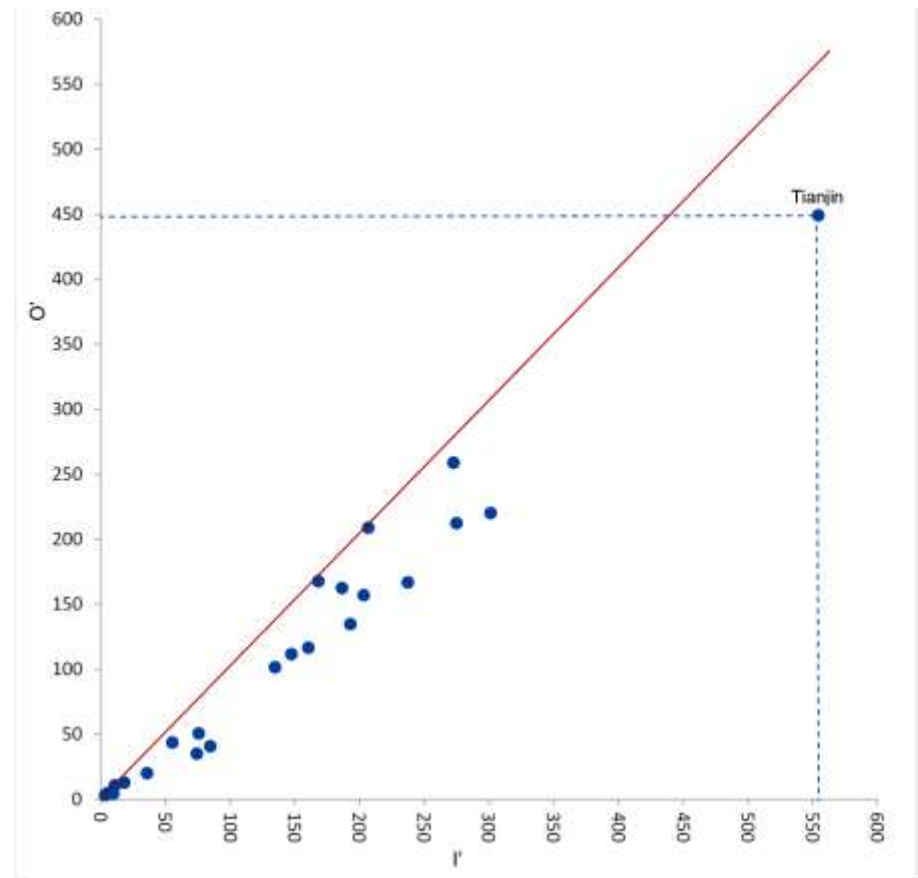


Outputs Indesejáveis

- Resultados do processo produtivo que devem ser minimizados
- Exemplos: atrasos, acidentes, reclamações, poluição
- Várias formas de modelagem:
 - Direta: transformar em input, usar o inverso
 - Indireta: modelos disponibilidade fraca ou forte

Representação bi-dimensional

- Fazer um gráfico de output virtual x input virtual
- Problema: com a linearização usada em DEA o input virtual é sempre 1
- Solução: usar uma restrição de normalização alternativa





SIAD v3.0

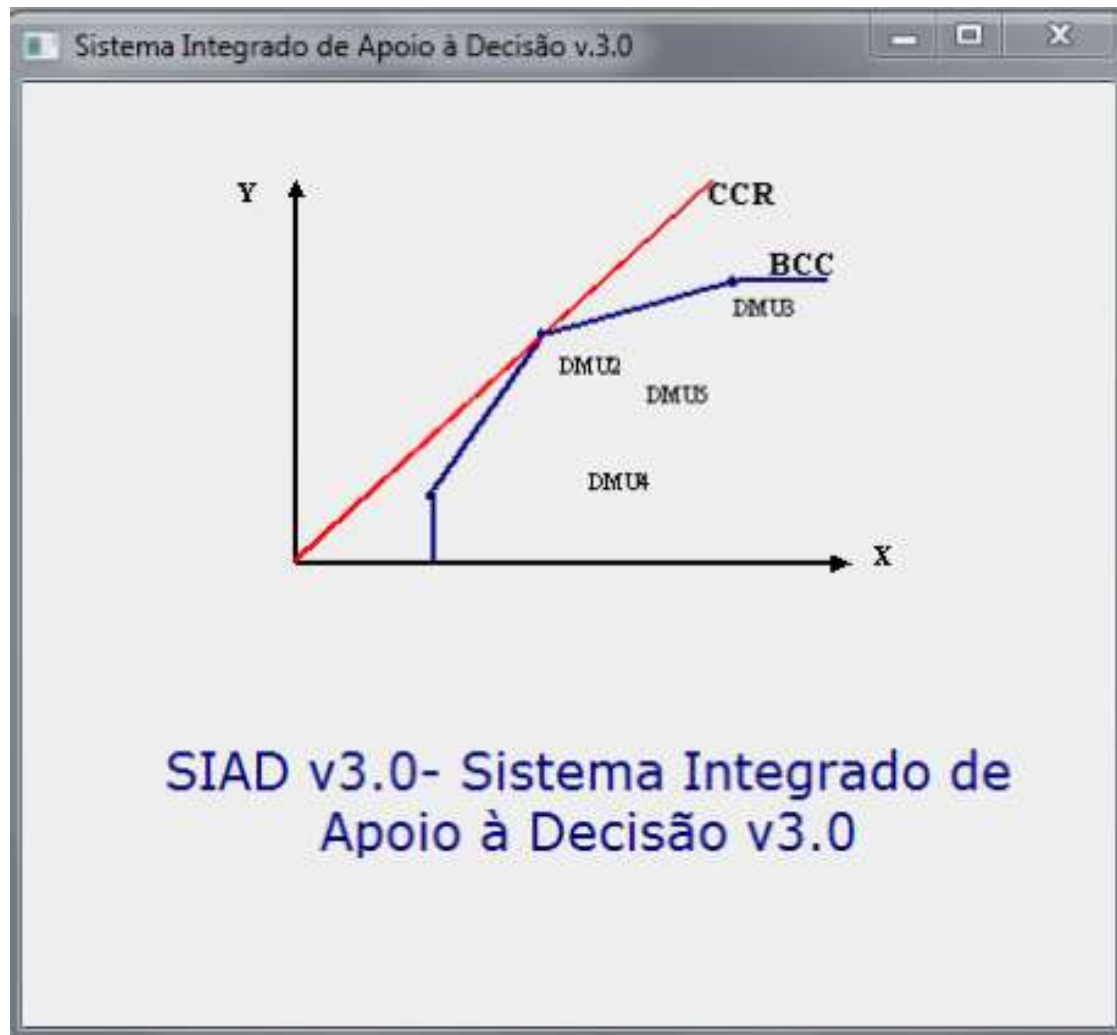
- Disponível em www.uff.br/decisao
- Arquivo ZIP:
 - O SIAD
 - Artigo sobre o programa (como usar)
 - Um exemplo
- Uso livre, mas colocar as referências indicadas no site e no programa



SIAD v.3.0

- Escolha do método: Novo DEA, Novo Multicritério
- Acesso de dados através da grade ou de arquivo txt
- Não aceita copiar e colar
- Opção de salvar resultados
- Editor nomes de DMUs e variáveis
- Modelos básicos e avançados
- Opções dos modelos: retornos de escala e orientação
- Modelos Avançados: fronteira invertida, dois tipos de restrições aos pesos, avaliação cruzada, seleção multicritério de variáveis

SIAD v3.0



SIAD v3.0

Sistema Integrado de Apoio à Decisão v3.0

Arquivo Editar DEA Multicritério Informações

Entrada de Dados

Número de DMUs

Número de Inputs

Número de Outputs

OK ✓

Cancelar ✗

SIAD v3.0

Sistema Integrado de Apoio à Decisão v3.0

Arquivo Editar DEA Multicritério Informações

Entrada de Dados

Matriz de Dados

DMUs	Input_1	Output_1	Output_2
DMU_1			
DMU_2			
DMU_3			
DMU_4			
DMU_5			

Modelo
CCR (CRS)

Orientação
Input

Avançado
Nenhum

Editor **Salvar** **Cancelar** **Calcular** **Multicritério**



Modelagem em DEA

■ Escolha do modelo

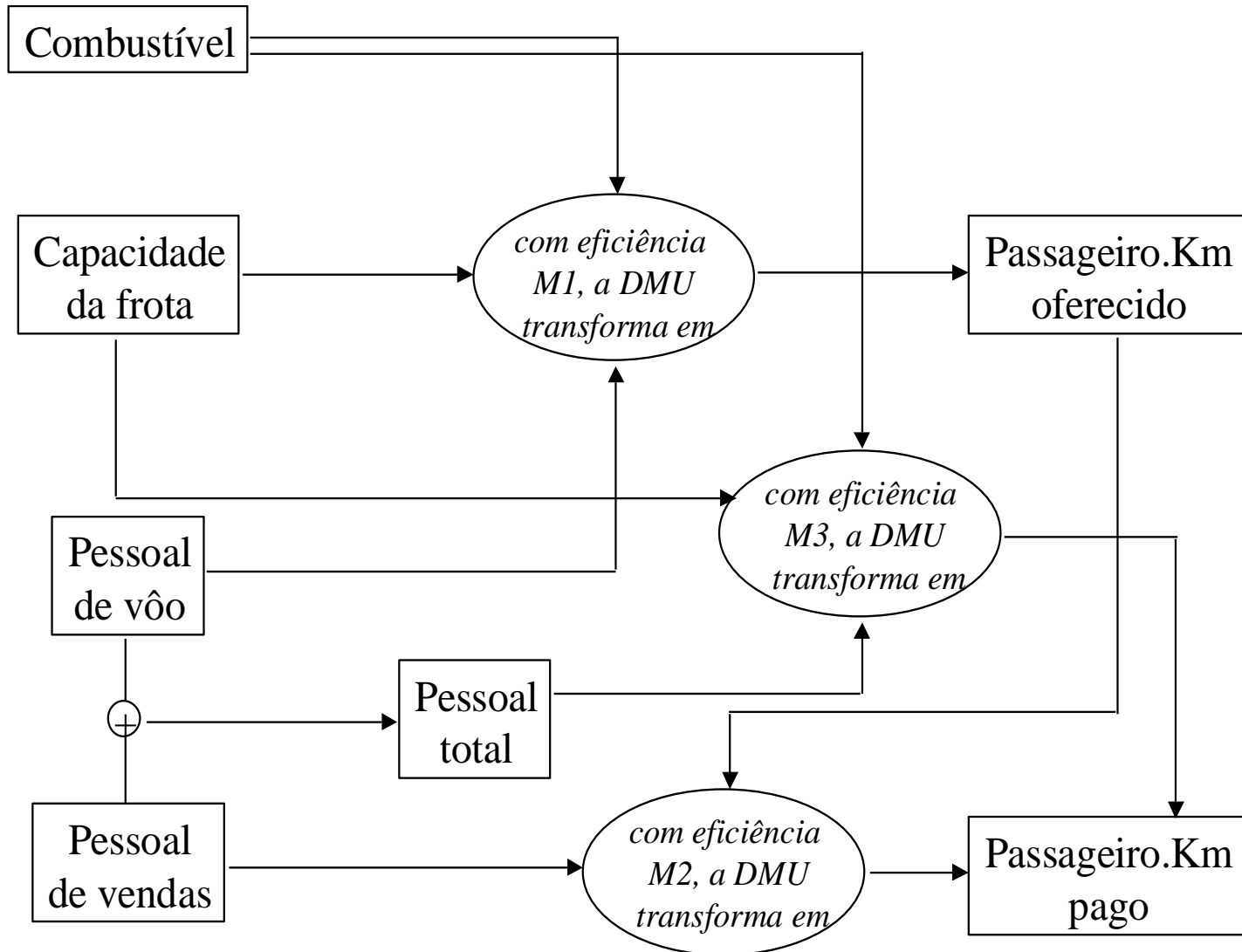
- Comparação de tamanho das DMUs
- Existência ou não de proporcionalidade
- Existência ou não de variáveis negativas
- Verificar cada par output/input
- PROIBIDO USAR RAZÕES EM QUALQUER MODELO
- Manter simplicidade
- Projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMUs ineficientes até a fronteira de eficiência
 - Orientação a *inputs*, a *outputs*, não orientado etc.



Exemplo de aplicação I

- Companhias Aéreas (Soares de Mello et al., 2003)
- Problemas
 - Tipo de eficiência a ser medida
 - Uso do modelo BCC colocava a Varig eficiente sem nenhuma avaliação
- Soluções
 - Três modelos distintos: Vendas, Operacional e Global
 - Aumentar o número de DMUs → grupos e anos diferentes
- Resultados → avaliação temporal e alvos

Exemplo de aplicação I



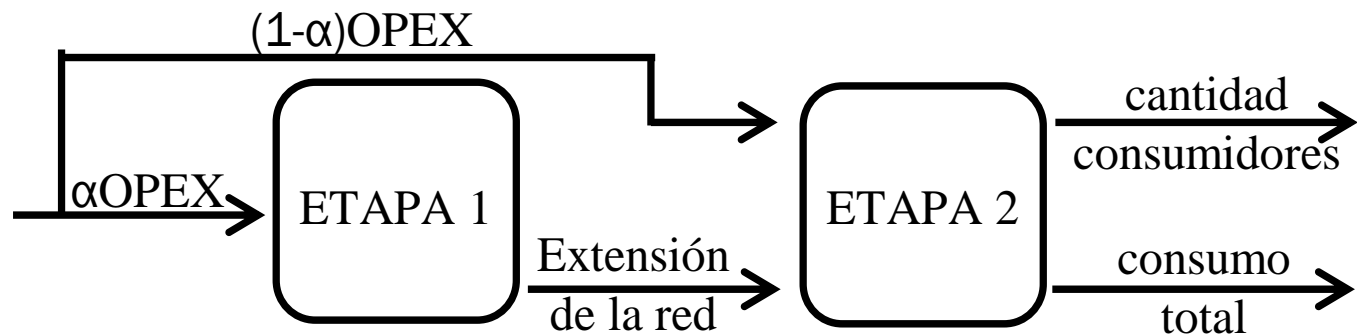


Exemplo de aplicação II

- Avaliação educacional (Soares de Mello et al., 2003)
- Programas da COPPE: 12 DMUs
- Enfoque de qualidade
- Variáveis
 - *Inputs*: Teses de Mestrado e Teses de Doutorado
 - *Outputs*: Periódicos Nacionais, Periódicos Internacionais, Congressos Nacionais, Congressos Internacionais, Livros, Outros
- Restrições do tipo "Razão dos pesos"

Exemplo de aplicação III

- Distribuidoras de energia elétrica: modelo Network DEA com input compartilhado





Exemplo de aplicação IV

- Estudos Olímpicos
 - Rankings puros e relativos
 - Rankings puros: input unitários considerando ou não as diferenças entre as modalidades olímpicas
 - Rankings relativos: medalhas ganhas em relação à população e PIB ou em relação ao tamanho da delegação
 - Restrições aos pesos para as medalhas



Referências

- ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. ISYDS - Integrated System for Decision Support (SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis model. Pesquisa Operacional, v. 25, (3), p. 493-503, 2005
- ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G.; COELHO, P.H.G. Free software for decision analysis: a software package for data envelopment models. In: 7th International Conference on Enterprise Information Systems - ICEIS 2005, v. 2, p. 207-212.
- ANGULO-MEZA, L.; GOMES, Eliane Gonçalves ; BIONDI NETO, L. ; COELHO, Pedro Henrique Gouvêa . Avaliação do ensino nos cursos de Pós-graduação em engenharia: Um enfoque quantitativo de avaliação em conjunto. Engevista, v. 5, n.9, p. 41-49, 2003.



Referências

- BANA E COSTA, C.A. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. ; ANGULO MEZA, L. . A new approach to the bi-dimensional representation of the DEA efficient frontier with multiple inputs and outputs. European Journal of Operational Research, v. 255, p. 175-186, 2016.
- BANKER, R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- CHARNES, A.; COOPER, W.W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. European Journal of Operational Research, v. 2, p. 429-444, 1978.
- COELLI, T.J.; RAO, D.S.P.; O'DONNELL, C. J., BATTESE, G.E. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Springer.
- COOPER, W.W.; SEIFORD, L.M.; TONE, K. Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver Software. Springer, 2007.



Referências

- GOMES, E. G.; LINS, M. P. E. Modelling undesirable outputs with zero sum gains data envelopment analysis models. Journal of the Operational Research Society, v. 59, p. 616-623, 2008.
- LINS, M.P.E.; ANGULO MEZA, L. Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, 2000.
- LINS, M.P.E. ; GOMES, E.G. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. ; SOARES DE MELLO, A.J.R. . Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. European Journal of Operational Research, v. 148, p. 312-322, 2003.
- MORENO, P. ; ANDRADE, G. N. ; ANGULO MEZA, L. ; SOARES DE MELLO, J.C.C.B. . Evaluation of Brazilian electricity distributors using a Network DEA model with shared inputs. Revista IEEE América Latina, v. 13, p. 2209-2216, 2015.



Referências

- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L.; GOMES, E.G.; SERAPIÃO, B.P.; LINS, M.P.E. Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. Pesquisa Operacional, v. 23, n. 2, p. 325-345, 2003.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. ; ANGULO MEZA, L. ; SOARES DE MELLO, M.H.C. ; SOARES DE MELLO, A.J.R. . Engineering post-graduate programmes: a quality and productivity analysis. Studies in Educational Evaluation, v. 32, n.2, p. 136-152, 2006.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; LACERDA, F.G. . A DEA model with a non discretionary variable for Olympic evaluation. Pesquisa Operacional, v. 32, p. 21-29, 2012.
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; BRANCO DA SILVA, B.P. . A ranking for the Olympic Games with unitary input DEA models. IMA Journal of Management Mathematics, v. 20, p. 201-211, 2009.



Referências

- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. ; SILVEIRA, J.Q. ; GOMES, E.G. . About negative efficiencies in cross evaluation BCC input oriented models. European Journal of Operational Research, v. 229, p. 732-737, 2013.
- TSCHAFFON, P. B. ; ANGULO-MEZA, L. . Assessing the Efficiency of the Electric Energy Distribution using Data Envelopment Analysis with undesirable outputs. Revista IEEE América Latina, v. 12, p. 1027-1035, 2014.
- [voltar](#)