

DEA NA PRÁTICA: DIFICULDADES DE USO

WORKSHOP DE EFICIÊNCIA PRODUTIVA

DATA ENVELOPMENT ANALYSIS
MODELAGENS MATEMÁTICAS

CARLOS MARTINHON (UFF) JOÃO SOARES DE MELLO (UFF)

28 DE NOVEMBRO 18H30 SALA D1-A DO CTEC (MINHOÇÃO) - UFRN INSCRIÇÕES GRATUITAS

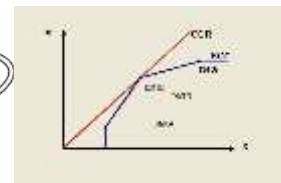
LIGA DE EMPREENDEDORISMO POTIGUAR UFRN SEBRAE



Natal, RN – Novembro 2016

João Carlos Soares de Mello

(Departamento de Engenharia de Produção
Universidade Federal Fluminense)



Razões para não aceitação de DEA

- Entendimento matemático
- Pesos nulos
- O que fazer com os resultados
- **Interpretação dos resultados**
- **MÁ MODELAGEM**
- **NÃO VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS**

Propriedades dos modelos

- Invariância com a escala de medida
- Melhor relação output i e input j é eficiente: obriga haver relação causal
- Maior output ou menor input: eficiente no BCC
- BCC é invariante a translações a output quando é orientado a input e vice-versa: aplicação para valores negativos

Erros na interpretação

- Confundir eficiência com eficácia
- Ignorar eficiências por default
- Ignorar eventuais heterogeneidades
- Comparações inadequadas (variações no tempo, conjuntos diferentes de DMUs, outras medidas de significado diferente)

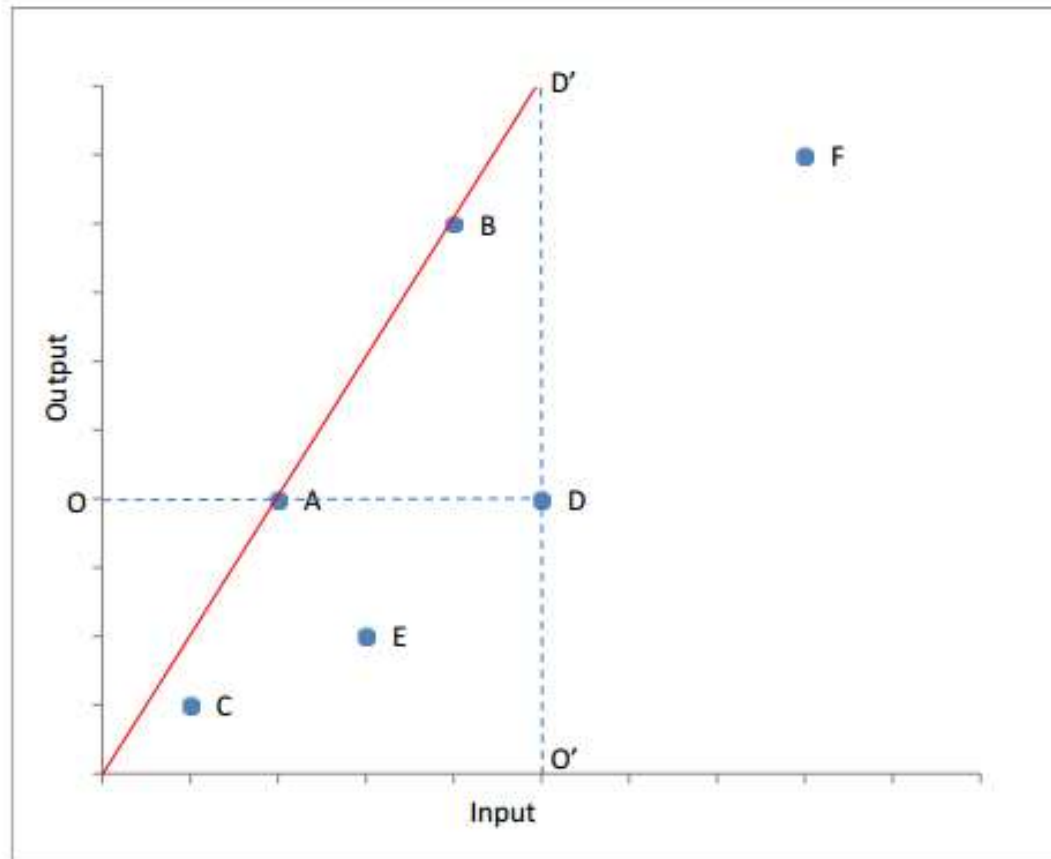
Erros na modelagem em DEA

- Uso em problemas que não são de eficiência
- Presunção da eficiência única
- Fuga da simplicidade
- Profusão de variáveis e falta de causalidade
- Confundir com regressão (eliminar outliers)
- Orientação inadequada
- Modelo inadequado (variáveis limitadas, proporcionalidade)
- Razões e variáveis monetárias
- Uso de outras medidas, estoque e fluxo juntos

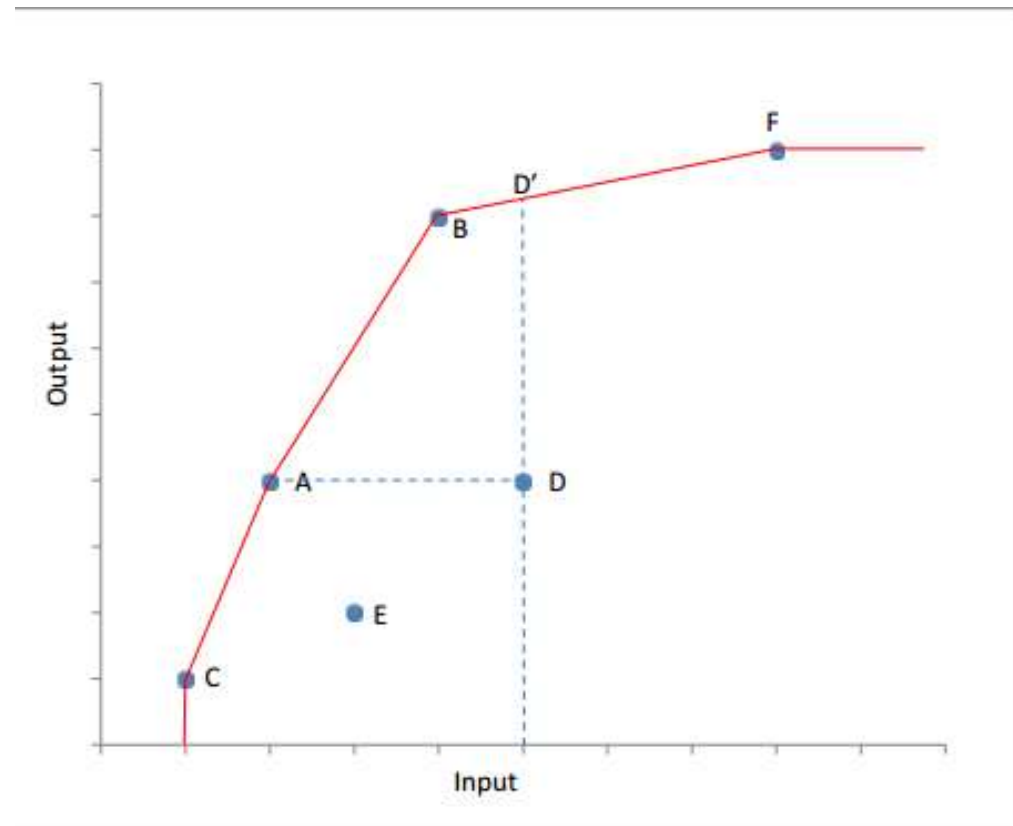
Visualizar resultados

- Imagens e gráficos melhores que palavras e tabelas
- DEA é por natureza multidimensional
- O espaço comum é tridimensional e o papel tem só duas dimensões.
- Um desenho plano só pode representar DEA com duas variáveis.
- Artifícios permitem representar para 3 variáveis no CCR

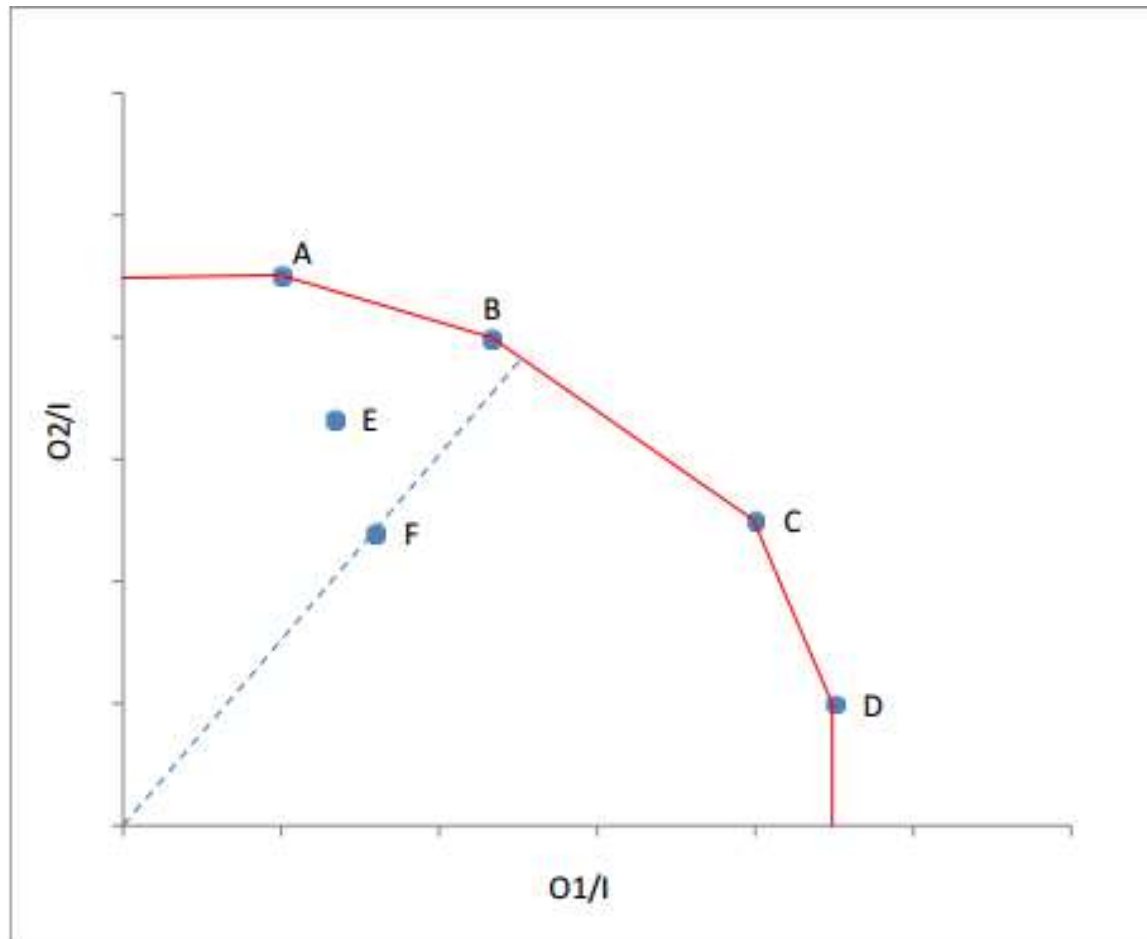
CCR 1 input e 1 output



BCC 1 input e 1 output



CCR 1 input e 2 outputs



E para mais variáveis?

- Eixo horizontal – input virtual; eixo vertical – output virtual
- Output virtual = soma ponderada dos outputs; input virtual = soma ponderada dos inputs
- Problema $\sum_i v_i x_{io} = 1$
- O input virtual ´ sempre 1, o gráfico seria sempre uma linha vertical
- Essa restrição é mesmo necessária?

Outra restrição

- Sim é necessária, ela evita múltiplas soluções em

$$\begin{aligned} & \text{Max } \frac{\sum_r u_r y_{ro}}{\sum_i v_i x_{io}} \\ & \text{s.t.} \\ & \frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i x_{ij}} \leq 1, \forall j \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \forall r, i \end{aligned}$$

- Pode-se usar restrição, por exemplo:

$$\sum_i v_i = 1$$

Outra restrição

- O input virtual deixa de ser unitário
- Pode-se fazer o gráfico output virtual x input virtual
- Problema: O novo modelo não é linear

$$\begin{aligned} & \text{Max } \frac{\sum_r u_r y_{ro}}{\sum_i v_i x_{io}} \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_i v_i = 1 \\ & \frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i x_{ij}} \leq 1, \forall j \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \forall r, i \end{aligned}$$

Outra restrição

- O novo modelo e o modelo original devem dar a mesma eficiência.
- Então, pode-se resolver o DEA original e, por proporções, obter o resultado do novo modelo

$$S_j = \sum_i v_{ij}$$

$$v'_{ij} = \frac{v_{ij}}{S_j}$$

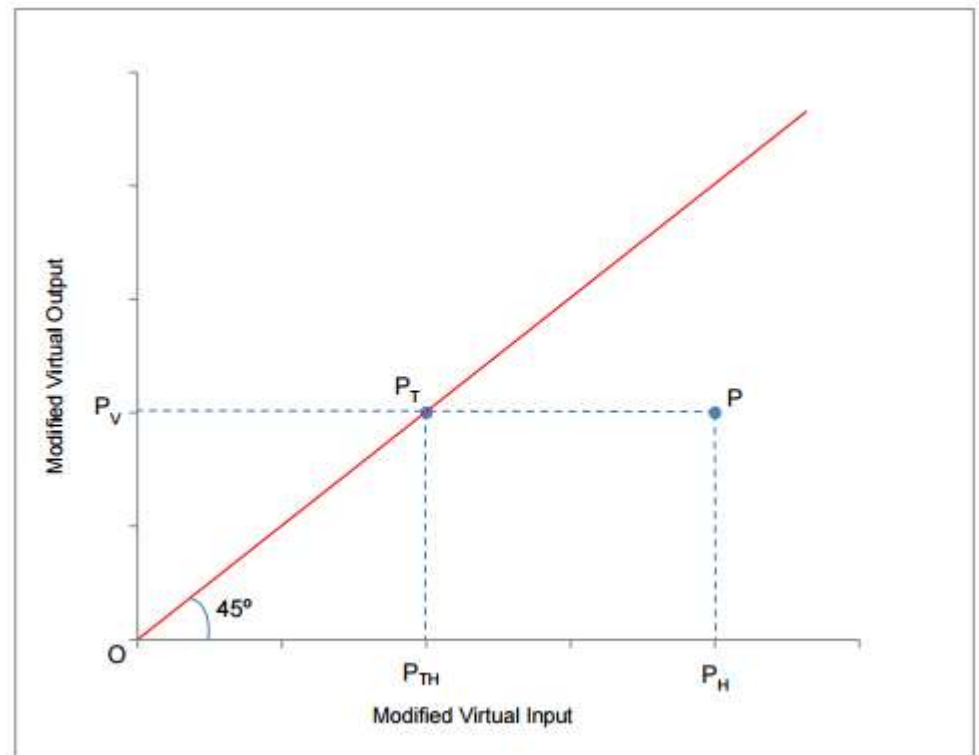
$$u'_{rj} = \frac{u_{rj}}{S_j}$$

$$I'_j = \sum_i v'_{ij} x_{ij}$$

$$O'_j = \sum_i u'_{rj} y_{rj}$$

Nova representação gráfica

- Faz-se a representação de $O' \times I'$, ou seja no eixo vertical o novo output virtual e no horizontal o novo input virtual.



Os 2 modelos são mesmo equivalentes?

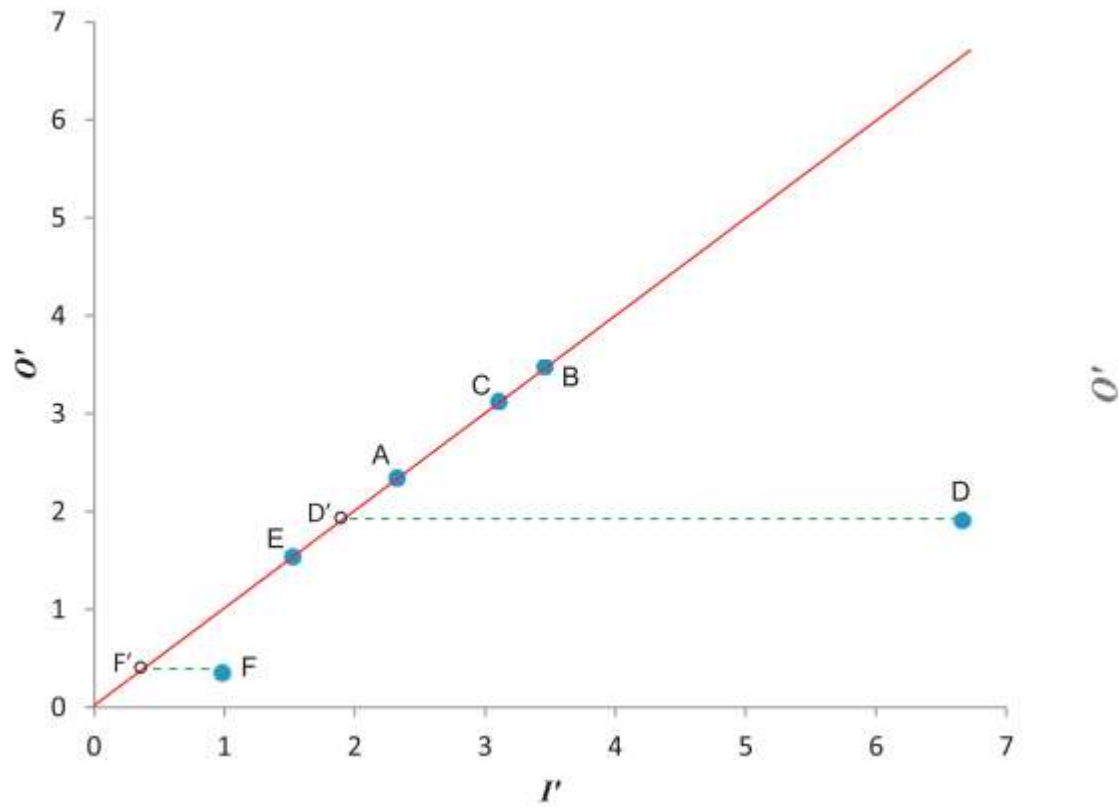
$$Eff_o = \frac{O_o}{I_o} = \frac{\sum_r u_{ro} y_{ro}}{\sum_i v_{io} x_{io}} = \frac{\frac{\sum_r u_{ro} y_{ro}}{S_o}}{\frac{\sum_i v_{io} x_{io}}{S_o}} = \frac{\sum_r \frac{u_{ro}}{S_o} y_{ro}}{\sum_i \frac{v_{io}}{S_o} x_{io}} = \frac{\sum_r u'_{ro} y_{ro}}{\sum_i v'_{io} x_{io}} = \frac{O'_o}{I'_o}$$

Exemplo

DMU	Variables				Efficiency index	Weights			
	x_1	x_2	y_1	y_2		v_1	v_2	u_1	u_2
A	1	4	2	6	1.0000	0.2381	0.1905	0.0000	0.1667
B	3	4	9	5	1.0000	0.1556	0.1333	0.1111	0.0000
C	4	2	3	8	1.0000	0.1786	0.1429	0.0000	0.1250
D	6	8	5	3	0.2862	0.1014	0.0489	0.0344	0.0380
E	2	1	4	3	1.0000	0.3500	0.3000	0.2500	0.0000
F	1	9	1	1	0.3636	1.0000	0.0000	0.2955	0.0682

DMU	S_j	Modified weights				Modified virtual input and output		Efficiency index
		v'_1	v'_2	u'_1	u'_2	I'	O'	
A	0.4286	0.5556	0.4444	0.0000	0.3889	2.3333	2.3333	1.0000
B	0.2889	0.5385	0.4615	0.3846	0.0000	3.4615	3.4615	1.0000
C	0.3214	0.5556	0.4444	0.0000	0.3889	3.1111	3.1111	1.0000
D	0.1504	0.6747	0.3253	0.2862	0.2530	6.6506	1.9036	0.2862
E	0.6500	0.5385	0.4615	0.3846	0.0000	1.5385	1.5385	1.0000
F	1.0000	1.0000	0.0000	0.2955	0.0682	1.0000	0.3636	0.3636

Exemplo



Outras questões

- Orientação e escala: Mesma fronteira, muda a posição das DMUs
- Tamanho x posição da DMU
- Múltiplas soluções ótimas: Pontos x segmentos

Referências

- BANA E COSTA, C.A.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. A new approach to the bi-dimensional representation of the DEA efficient frontier with multiple inputs and outputs. *European Journal of Operational Research*, v. 255 (1), p. 175-186, 2016
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. Avaliação de eficiência com DEA – Fundamentos matemáticos e modelagem de aplicações (mini curso). XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO, 2016.

Referências

- BANA E COSTA, C.A.; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. A new approach to the bi-dimensional representation of the DEA efficient frontier with multiple inputs and outputs. *European Journal of Operational Research*, v. 255 (1), p. 175-186, 2016
- SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; ANGULO MEZA, L. Avaliação de eficiência com DEA – Fundamentos matemáticos e modelagem de aplicações. XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO, 2016.