Conjuntos Finitos e Infinitos

Jaime Utria

Atenção: Este é um material em preparação, portanto erros podem aparecer.

1 Números naturais

O conjunto dos número naturais $\mathbb{N}$ é caracterizado pelos Axiomas de Peano:

(P1) Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $s(n)$ é chama-se *sucessor* de n.

(P2) Existe um único número natural $1 \neq s(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(P3) Se $X \subseteq \mathbb{N}$, tal que $1 \in X$, e $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$ então $X = \mathbb{N}$

Em palavras:

- O axioma (P1) diz que qualquer número natural tem um sucessor natural e que dois números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
- O axioma (P2) diz que o 1 não é sucessor de nenhum número natural.
- O axioma (P3) é o chamado de *princípio de indução*, ele diz que se um subconjunto dos números naturais contém o 1, e se todo sucessor de um elemento em X também está em X, então esse conjunto é o conjunto dos números naturais.

1.1 Adição e Multiplicação em $\mathbb{N}$

Podemos definir duas operações básicas em $\mathbb{N}$: a adição e multiplicação, elas são caracterizadas pelas seguintes igualdades:

i. $m + 1 = s(m)$

ii. $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

iii. $m \cdot 1 = m$

iv. $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Dados dois números $m, n \in \mathbb{N}$, a adição atribuí sua *soma* $m + n$ e a multiplicação atribui seu *produto* $m \cdot n$.

2 Conjuntos Finitos

Seja $I_n = \{1, \ldots, n\}$ o conjunto dos primeiros n números naturais. O conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ diz-se *finito* quando é vazio ou se, existe uma bijeção $f : I_n \to A$ para algum $n \in \mathbb{N}$, a função f é dita uma *contagem* de A e dizemos ainda que o cardinal (número de elementos) de A é igual a n. Assim, podemos escrever $A = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Denotamos por $|A|$ o cardinal de A.

Definição 2.1. Um conjunto A diz-se *limitado* se existe um número natural k tal que $a \leq k$ para quaisquer $a \in A$.

2.1 Alguns resultados úteis

Teorema 2.1. *A finito se, e somente se, A é limitado.*

Teorema 2.2. *Seja B um conjunto finito. Se $A \subseteq B$, então A é finito.*

Corolário 2.1. *Se $A \subseteq B$, então $|A| \leq |B|$.*

Teorema 2.3 (Princípio da boa ordenação (PBO))**.** *Todo subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

2.2 Príncipio das casas dos Pombos (PCP)

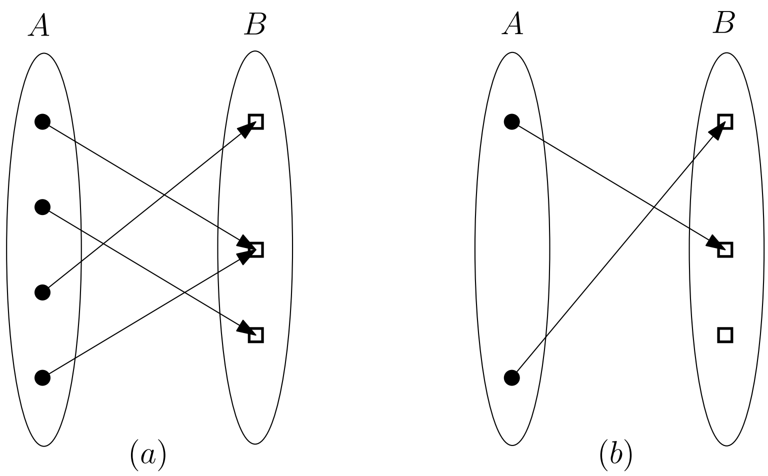
Em sala de aula, enunciamos e provamos o PCP como segue: Se $m > n$ não existe função injetiva $f : I_m \to I_n$. A continuação, apresentamos uma forma alternativa desse princípio:

Suponha que A e B são conjuntos finitos e $f : A \to B$ é uma função qualquer.

(a) Se $|A| > |B|$, então f não é injetiva.

(b) Se $|A| < |B|$, então f não é sobrejetiva.

Imagine que temos um conjunto A de pombos e um conjunto B de casas, e querermos alocar todos os pombos nas casas. Você pode pensar que o processo de alocação é descrito por uma função $f : A \to B$, em que um pombo $a \in A$ é alocado na casa $f(a) \in B$. Então, alguma dessas duas situações acontece:



Na situação (a), temos mais pombos que casas, então pelo menos uma das casas deve conter mais de um pombo (a função não é injetiva). Já na situação (b) temos mais casas que pombos então, pelo menos uma das casas deve ficar vazia (a função é sobrejetiva).

3 Conjuntos infinitos

Um conjunto A diz-se infinito se não for finito, isto é, se não for vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \to A$.

3.1 Conjuntos enumeráveis

Definição 3.1. Um conjunto A diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. Neste caso f chama-se uma *enumeração* dos elementos de A. Assim podemos escrever $A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\} = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

3.2 Alguns resultados úteis

Teorema 3.1. *Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é enumerável.*

Corolário 3.1. *Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B é enumerável então A também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Corolário 3.2. *Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se A é enumerável, então B também é enumerável.*

Corolário 3.3. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Corolário 3.4. *A união de uma família de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Em resumo, temos a seguinte

Definição 3.2. Sejam A e B conjuntos.

(a) $|A| = |B|$ significa que existe uma bijeção $f : A \to B$.

(b) $|A| < |B|$ significa que existe uma função injetiva $f : A \to B$, mas não existe bijeção de A em B.

(c) $|A| \leq |B|$ significa que existe uma função injetiva $f : A \to B$.

4 Exemplos e Exercícios

Exemplo 4.1. *Suponha A e B conjuntos finitos, tais que $A \cap B = \emptyset$. Então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Como A e B são finitos existem $m, n \in \mathbb{N}$, f e g bijeções tais que $A = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ e $B = \{g(1), g(2), \dots, g(m)\}$. Logo $A \cup B = \{f(1), \dots, f(n), g(1), \dots, g(m)\}$. Então, devemos mostrar que $|A \cup B| = m + n$, formalmente, temos que provar que existe uma bijeção $h : I_{n+m} \to A \cup B$. Com efeito, definindo

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i = 1, \dots, n \\ g(i-n) & \text{se } i = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Observação. A ideia intuitiva por trás da definição de h é como segue: primeiro contamos os elementos de A com f, e em seguida continuamos a contagem dos elementos de B com g.

Exercício 4.1. *Prove que h como definida anteriormente é uma bijeção. Isto é, que é injetiva e sobrejetiva.*

Exercício 4.2. *Se $A \cap B \neq \emptyset$. Complete a bijeção $\varphi : I_{n+m-k} \to A \cup B$ apresentada em sala de aula (dia 25/09), para mostrar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

$$\varphi(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i = 1, \dots, n-k \\ h(i-(n-k)) & \text{se } i = (n-k)+1, \dots, (n-k)+k \\ g(?) & \text{se } i = n+1, \dots, n+m-k. \end{cases}$$

Lembre que nós escrevemos $A \cup B = \{f(1), \dots, f(n-k), h(1), \dots, h(k), g(1), g(2), \dots, g(m-k)\}$. Também mostre que φ é de fato uma bijeção.

Exemplo 4.2. *Se A é um subconjunto de 10 inteiros entre 1 e 60, então existem dois subconjuntos diferentes $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$, tais que a soma de seus elementos é a mesma. Por exemplo, considere $A = \{9, 60, 43, 1, 10, 55, 30, 23, 18, 26\}$, $B = \{1, 10, 55\}$ e $C = \{43, 23\}$.*

*Note que para quaisquer $X \subseteq A$, temos $|X| \leq |A| = 10$ (pelo Corolário 2.1) e cada elemento em X é um número entre 1 e 60, e portanto a soma de seus elementos é um número estritamente menor que 10 · 60 = 600. Então podemos definir a função $f : \mathscr{P}(A) \to \{1,\ldots,600\}$ do conjunto das partes de A em $\{1,\ldots,600\}$, como $f(X) = \sum_{x \in X} x$, ou seja, para cada subconjunto X de A, a função f atribui a soma de seus elementos, por exemplo, $f(\{60,32,1\}) = 93$. Por outro lado, $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 1024 > |\{1,\ldots,600\}| = 600$. Finalmente, pelo **PCP** f não é injetiva, e portanto existem $B \subseteq A$ e $C \subseteq A$, com $B \neq C$, tais que $f(B) = f(C)$, como queríamos mostrar.*

Exemplo 4.3. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável.*
Para ver isso, note que podemos enumerar os elementos em $\mathbb{Z}$ como segue:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, \ldots$$

isto é, temos uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dada por $f(n) = \frac{n-1}{2}$, se n ímpar ou $f(n) = -\frac{n}{2}$ se n é par.

Exercício 4.3. *Verifique que de fato f é uma bijeção.*

Exemplo 4.4. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Para mostrar isso, considere o conjunto dos inteiros diferentes de 0, $\mathbb{Z}^* = \{z \in \mathbb{Z} : z \neq 0\}$. Desde que $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, temos pelo Corolário 3.1, e o Exemplo 4.3. que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Logo pelo Corolário 3.3 temos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Definindo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ como $f(n,m) = \frac{n}{m}$, temos que f é sobrejetiva. Consequentemente, pelo Corolário 3.2 concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Exercício 4.4. *Verifique que f definida no exemplo anterior é sobrejetiva.*

Exemplo 4.5. *O conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : sen(x) = 1\}$ é enumerável.*

Note que $X = \{2k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, logo podemos definir uma bijeção entre $\mathbb{Z}$ e X justamente por $f(k) = 2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente, desde que $\mathbb{Z}$ é enumerável, pelo Corolário 3.2 , temos que X também é.

Exercício 4.5. *Verifique que f definida no exemplo anterior é bijeção.*