Capítulo 1

Topologia do espaço Euclidiano

1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. O *espaço euclidiano $n-$ dimensional* é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ cópias}}$$

Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as $n-$listas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, cujas *coordenadas* $x_1, \ldots, x_n$ são números reais.

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e um número real λ, definimos a *soma* $x + y$ e o *produto* λx pondo:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \,.$$

Com estas operações, $\mathbb{R}^n$ é um *espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$*, no qual $0 = (0, \ldots, 0)$ é o elemento neutro para a adição e $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ é o simétrico de $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, destaca-se a base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ formada pelos vetores

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \,,\; e_2 = (0, 1, \ldots, 0) \,,\; \ldots \,,\; e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

que tem uma coordenada igual a 1 e as outras nulas. Para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ temos:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \,.$$

- Sejam $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{M}(n \times m)$ o conjunto das matrizes reais $A = (a_{ij})$ com n linhas e m colunas.

- Existe uma bijeção natural entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{M}(n \times m)$.

De fato, dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, seja $A_T = (a_{ij})$ a matriz cuja $j-$ésima coluna é o vetor coluna $(Te_j)^t$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, ou seja, a matriz $A_T = (a_{ij})$ é definida pelas igualdades

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{e_i}\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,,$$

onde $\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, dada $A \in \mathcal{M}(n \times m)$, seja $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ definida por

$$T_A(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj}x_j \right).$$

Como $T_A(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{M}(n \times m) \\ T &\longmapsto A_T \end{aligned}$$

é sobrejetora.

Além disso, Φ é injetora, pois se $\Phi(T) = \Phi(L)$, então $T(e_j) = L(e_j)$, $j = 1, \ldots, m$, e, portanto,

$$T(x) = x_1T(e_1) + \ldots + x_mT(e_m) = x_1L(e_1) + \ldots + x_mL(e_m) = L(x)\,, \;\; \forall\, x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Escrevendo as colunas de uma matriz $A \in \mathcal{M}(n \times m)$ uma após a outra numa linha, podemos identificar A com um ponto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{nm}$.

Assim, $\mathcal{M}(n \times m)$ torna-se um espaço vetorial real de dimensão nm, no qual as matrizes

$$A^{k\ell} = \left(a_{ij}^{k\ell}\right), 1 \le k \le n\,,\; 1 \le \ell \le m, \;\text{ onde }\; a_{ij}^{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (k,\ell)\,, \end{cases}$$

formam uma base natural.

Além disso, como Φ é uma bijeção, podemos induzir em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ uma estrutura de espaço vetorial, para a qual $T^{\ell k}$, $1 \le k \le n$ e $1 \le \ell \le m$, onde $T^{\ell k}(e_\ell) = \overline{e_k}$ e $T^{\ell k}(e_j) = 0$ se $j \neq \ell$, é uma base natural.

Podemos, assim, sempre que for conveniente, substituir $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ora por $\mathcal{M}(n \times m)$, ora por $\mathbb{R}^{nm}$.

• No caso particular em que $n = 1$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial real de dimensão n formado pelos *funcionais lineares* de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$, para o qual $\{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ é uma base, onde

$$\pi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} x_j \pi_i(e_j) = x_i \,,$$

é a *projeção* de $\mathbb{R}^m$ sobre seu $i-$ésimo fator.

O espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^\star$ é chamado o *espaço dual* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$, e a base $\{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ é chamada *base dual* da base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Observe que se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $f(e_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$f(x_1, \ldots, x_m) = a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m \,,$$

e $(a_1 \ \cdots \ a_m)$ é a matriz $1 \times m$ associada ao funcional f.

Definição 1.1. Sejam E, F e G espaços vetoriais reais. Uma aplicação $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ chama-se *bilinear* quando é linear em relação a cada uma de suas variáveis, ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + x', y) &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, \lambda y + y') &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \,, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x, x' \in E$, $y, y' \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 1.1. $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$ quaisquer que sejam $x \in E$ e $y \in F$.

Observação 1.2. Se $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$, temos que

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i \,, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{ij} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) \,,$$

de modo que φ fica inteiramente determinada pelos mn valores $\varphi(e_i, e_j)$ que assume nos pares ordenados de vetores básicos (e_i, e_j), $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Definição 1.2. Uma aplicação bilinear $\varphi : E \times E \longrightarrow G$ é *simétrica* quando

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \,,$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$.

2 Produto interno e norma

Definição 2.1. Seja E um espaço vetorial real. Um *produto interno* em E é uma aplicação $\langle \ \ , \ \ \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(2) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

(3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

(4) $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle > 0$,

para quaisquer $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ou seja, um produto interno sobre E é uma *função real bilinear, simétrica e positiva definida*.

Observação 2.1. $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Exemplo 2.1. O *produto interno canônico* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n \,,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. □

Observação 2.2. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, então a matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, onde $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$, é simétrica e positiva definida, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$ e $xAx^t > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, já que

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = xAy^t \,.$$

Reciprocamente, se $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ é uma matriz simétrica e positiva definida, então

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

O produto interno canônico corresponde a tomar a matriz identidade $I = (\delta_{ij})$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é a *delta de Kronecker*.

Definição 2.2. Dizemos que dois vetores x, y são *ortogonais em relação ao produto interno* $\langle \ , \ \rangle$ se $\langle x, y\rangle = 0$.

Observação 2.3.

- O vetor nulo 0 é ortogonal a todos os vetores do espaço.

- Se $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica, então

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \,,\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Proposição 2.1. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle\ \ ,\ \ \rangle$. Então

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,, \quad \forall\, x, y \in E\,,$$

e a igualdade é válida se, e somente se, x e y são LD, onde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ e $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$.

Prova.

Suponhamos que $y \neq 0$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Como

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

temos que o discriminante

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0\,,$$

ou seja, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Além disso, $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ se, e só se, $\Delta = 0$, ou seja, se, e só se, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + \lambda_0 y = 0$.

Logo $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ se, e só se, x e y são LD. ■

Definição 2.3. Uma *norma* num espaço vetorial real E é uma função real $\|\ \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|\,;$

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,;$

(3) $x \neq 0 \Longrightarrow \|x\| > 0\,,$

para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 2.4. $\|0\| = 0\,.$

Observação 2.5. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0\,.$

Observação 2.6. $\|-x\| = \|x\|\,.$

Observação 2.7. $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|\,.$

De fato, como

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|\,,$$

e

$$\|y\| = \|(x - y) - x\| \leq \|x - y\| + \|x\|\,,$$

temos que

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|\,,$$

ou seja, $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$.

Proposição 2.2. *Se* $\langle\ \ ,\ \ \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um produto interno em* E*, então* $\|\ \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *é uma norma em* E.

Prova.

Sejam $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

(1) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.

(2) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Logo $\|x+y\|^2 \leq (\,\|x\| + \|y\|\,)^2$, ou seja, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(3) $x \neq 0 \Longrightarrow \langle x, x\rangle > 0 \Longrightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} > 0$. ■

Observação 2.8. $\|x\| + \|y\| = \|x+y\| \Longleftrightarrow \exists\,\lambda > 0$ tal que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

De fato, se $y \neq 0$, temos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\| \Longleftrightarrow \exists \lambda > 0\,;\, x = \lambda y$.

Exemplo 2.2. Se $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,,$$

é chamada de *norma euclidiana* do vetor $x \in \mathbb{R}^n$. □

Observação 2.9. Há uma infinidade de normas que podem ser definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dentre elas, temos:

- a *norma do máximo*: $\|x\|_M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$,

e

- a *norma da soma*: $\|x\|_S = |x_1| + \ldots + |x_n|$.

É fácil verificar que $\|\ \ \|_M$ e $\|\ \ \|_S$ realmente definem normas em $\mathbb{R}^n$ (exercício).

Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M\,, \tag{1}$$

onde $\|\ \ \|$ é a norma euclidiana.

De fato, como $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \geq |x_i|$ para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que $\|x\| \geq \|x\|_M$.

E se $\|x\|_M = |x_i|$, então
$$\|x\|_S = |x_1| + \ldots + |x_n| \le n|x_i| = n\|x\|_M .$$

Finalmente,
$$\|x\|_S^2 = (\,|x_1| + \ldots + |x_n|\,)^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |x_i|\,|x_j| \ge |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \|x\|^2 ,$$

ou seja, $\|x\|_S \ge \|x\|$.

Estas desigualdades servirão para mostrar que as três normas acima são equivalentes.

Definição 2.4. Uma *métrica* num conjunto M é uma função real $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$;

(2) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular) ;

(3) $x \ne y \Longrightarrow d(x, y) > 0$,

para quaisquer $x, y, z \in M$. O par (M, d) é dito um *espaço métrico*.

Observação 2.10. Se $(E, \|\ \ \|)$ é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$d(x, y) = \|x - y\| \,,\; x, y \in E$$
é uma métrica em E.

De fato, se $x, y, z \in E$, então:

(1) $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(x, y)$;

(2) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$;

(3) $x \ne y \Longrightarrow x - y \ne 0 \Longrightarrow \|x - y\| > 0 \Longrightarrow d(x, y) > 0$.

Exemplo 2.3. Em $\mathbb{R}^n$,

- $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ é a métrica que provém da norma euclidiana.
- $d_M(x, y) = \max_{1 \le i \le n}\{\,|x_i - y_i|\,\}$ é a métrica que provém da norma do máximo.

e

- $d_S(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$ é a métrica que provém da norma da soma. □

Observação 2.11. Uma norma num espaço vetorial E pode não provir de um produto interno,

ou seja, nem sempre existe um produto interno $\langle \quad , \quad \rangle$ em E tal que
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Com efeito, se a norma $\| \quad \|$ provém de um produto interno $\langle \quad , \quad \rangle$, então vale a *identidade do paralelogramo*:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\left(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\right)\,,$$
que diz que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados de seus quatro lados.

De fato,
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \\ \Longrightarrow\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2\,\left(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\right)\,. \end{aligned}$$
Com isso, podemos provar que as normas $\| \quad \|_M$ e $\| \quad \|_S$ em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, não provêm de um produto interno, pois:

- $\|e_1+e_2\|_M^2 + \|e_1-e_2\|_M^2 = 1+1 = 2 \neq 4 = 2\,\left(\,\|e_1\|_M^2 + \|e_2\|_M^2\,\right)\,,$

e

- $\|e_1+e_2\|_S^2 + \|e_1-e_2\|_S^2 = 4+4 = 8 \neq 4 = 2\,\left(\,\|e_1\|_S^2 + \|e_2\|_S^2\,\right)\,.$

3 Bolas e conjuntos limitados

Num espaço métrico (M, d), definimos os seguintes conjuntos:

- *Bola aberta de centro $a \in M$ e raio $r > 0$*: $B(a, r) = \{x \in M \,|\, d(x, a) < r\}$.
- *Bola fechada de centro $a \in M$ e raio $r > 0$*: $B[a, r] = \{x \in M \,|\, d(x, a) \leq r\}$.
- *Esfera de centro $a \in M$ e raio $r > 0$*: $S[a, r] = \{x \in M \,|\, d(x, a) = r\}$.

Segue-se que $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$.

Se a métrica d provém de uma norma $\| \quad \|$ do espaço vetorial E, temos:
$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in E \,|\, \|x-a\| < r\}; \\ B[a, r] &= \{x \in E \,|\, \|x-a\| \leq r\}; \\ S[a, r] &= \{x \in E \,|\, \|x-a\| = r\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1. No espaço euclidiano $\mathbb{R}$ de dimensão 1, as três normas, definidas anteriormente, coincidem, e: $B(a, r) = (a-r, a+r)$, $\quad B[a, r] = [a-r, a+r]$ e $S[a, r] = \{a-r, a+r\}$. □

Observação 3.1. A forma geométrica das bolas e esferas dependem, em geral, da norma que se usa.

Por exemplo, se consideramos o plano $\mathbb{R}^2$ com a *métrica euclidiana*, teremos:

- $B((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 < r\}$ (disco aberto de centro (a,b) e raio $r > 0$).
- $B[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r\}$ (disco fechado de centro (a,b) e raio $r > 0$).
- $S[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r\}$ (círculo de centro (a,b) e raio $r > 0$).

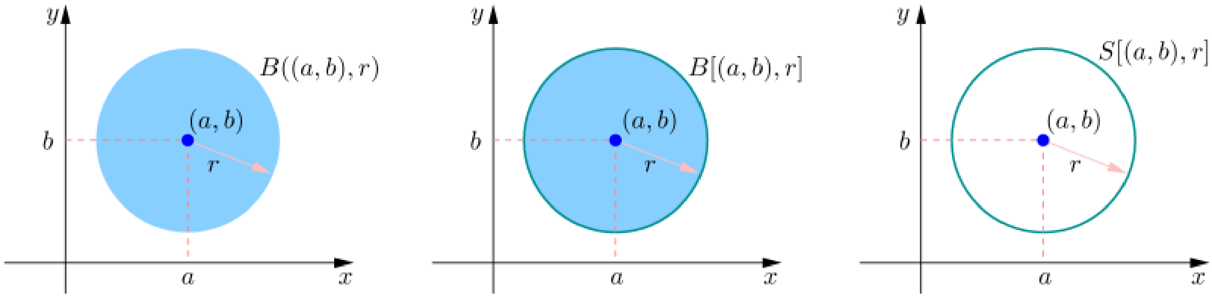

Fig. 1: Bola aberta, bola fechada e esfera no plano em relação à métrica euclidiana

E se consideramos $\mathbb{R}^2$ com a *métrica do máximo*, teremos:

- $B_M((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| < r \text{ e } |y-b| < r\} = (a-r, a+r) \times (b-r, b+r)$.
- $B_M[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| \leq r \text{ e } |y-b| \leq r\} = [a-r, a+r] \times [b-r, b+r]$.
- $S_M[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| \leq r \text{ e } |y-b| = r\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| = r \text{ e } |y-b| \leq r\}$.

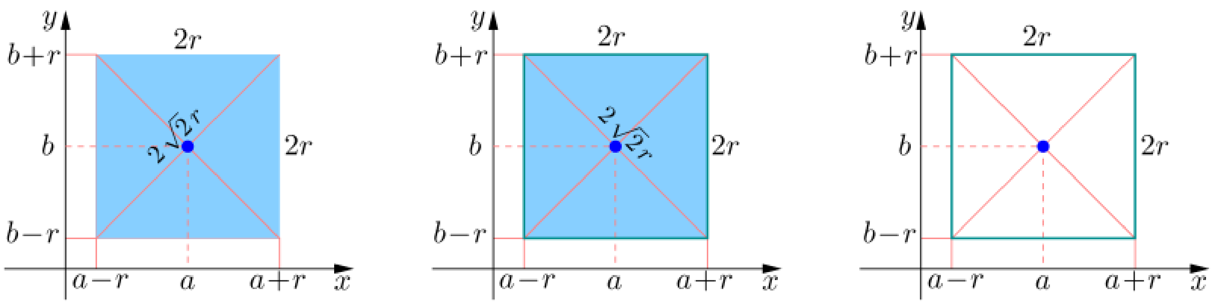

Fig. 2: Bola aberta, bola fechada e esfera no plano em relação à métrica do máximo

Finalmente, se tomarmos $\mathbb{R}^2$ com a *métrica da soma*, teremos:

- $B_S((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| + |y-b| < r\}$,

é a região interior ao quadrado de vértices nos pontos $(a, b+r)$, $(a, b-r)$, $(a-r, b)$, $(a+r, b)$.

- $B_S[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| + |y-b| \leq r\}$,

é a união da região limitada pelo quadrado de vértices nos pontos $(a, b+r)$, $(a, b-r)$, $(a-r, b)$, $(a+r, b)$ com o próprio quadrado.

- $S_S[(a,b),r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x-a| + |y-b| = r\}$

é o quadrado de vértices nos pontos $(a, b+r)$, $(a, b-r)$, $(a-r, b)$, $(a+r, b)$.

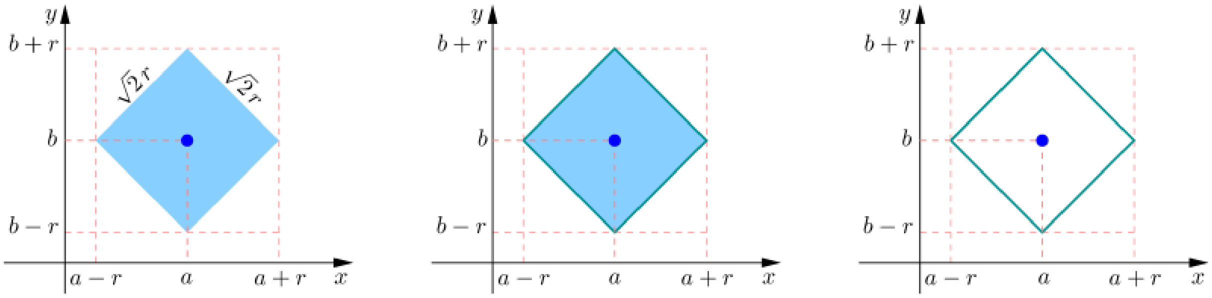

Fig. 3: Bola aberta, bola fechada e esfera no plano em relação à métrica da soma

Então, temos que:

$$B_S((a,b),r) \subset B((a,b),r) \subset B_M((a,b),r)\,.$$

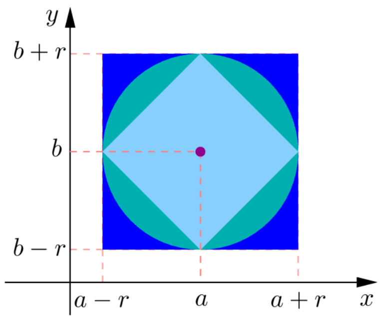

Fig. 4: Relação entre as bolas abertas de mesmo centro e raio em relação às métricas euclidiana, da soma e do máximo

Observação 3.2. De um modo geral, a bola aberta $B_M(a,r) \subset \mathbb{R}^n$, definida pela norma $\|x\|_M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, é o produto cartesiano $(a_1 - r, a_1 + r) \times \ldots \times (a_n - r, a_n + r)$, onde $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

De fato,

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_M(a,r) &\iff |x_1 - a_1| < r\,, \ldots, |x_n - a| < r \\ &\iff x_1 \in (a_1 - r, a_1 + r)\,, \ldots, x_n \in (a_n - r, a_n + r) \\ &\iff (x_1, \ldots, x_n) \in (a_1 - r, a_1 + r) \times \ldots \times (a_n - r, a_n + r)\,. \end{aligned}$$

O fato das bolas de $\mathbb{R}^n$ serem produto cartesiano de intervalos da reta, torna esta métrica, em muitas ocasiões, mais conveniente do que a métrica euclidiana.

- Mostraremos, agora, que as bolas relativas a diferentes normas em $\mathbb{R}^n$ têm em comum o fato de serem convexas.

Definição 3.1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O *segmento de reta de extremos x e y* é o conjunto

$$[x,y] = \{\,(1-t)\,x + t\,y \,|\, t \in [0,1]\,\}\,.$$

Definição 3.2. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *convexo* quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertencem a X, ou seja,

$$x, y \in X \Longrightarrow [x, y] \subset X\,.$$

Exemplo 3.2. Todo subespaço vetorial $E \subset \mathbb{R}^n$ é convexo.$\square$

Exemplo 3.3. Todo subespaço afim $a + E = \{a + x \,|\, x \in E\}$, onde $E \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço, é um conjunto convexo.$\square$

Exemplo 3.4. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos, então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é convexo.$\square$

Exemplo 3.5. O conjunto $X = \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ não é convexo, pois $e_1 \in X$, $-e_1 \in X$, mas $[e_1, -e_1] \not\subset X$, pois $\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}(-e_1) = 0 \notin X$.$\square$

Teorema 3.1. *Toda bola aberta ou fechada de $\mathbb{R}^n$, com respeito a qualquer norma, é um conjunto convexo.*

Prova.

Sejam $x, y \in B(a, r)$. Então $\|x - a\| < r$ e $\|y - a\| < r$. Logo,

$$\|(1-t)x + ty - a\| = \|(1-t)x + ty - (1-t)a - ta\| \le \|(1-t)(x-a)\| + \|t(y-a)\| < (1-t)r + tr = r\,,$$

para todo $t \in [0, 1]$, pois $1 - t \ge 0$ e $t > 0$ ou $1 - t > 0$ e $t \ge 0$.

De modo análogo, podemos provar que a bola fechada é convexa. ■

Definição 3.3. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *limitado* com respeito a uma norma $\|\ \ \|$ em $\mathbb{R}^n$ quando existe $c > 0$ tal que $\|x\| \le c$ para todo $x \in X$, ou seja, quando existe $c > 0$ tal que $X \subset B[0, c]$.

Observação 3.3. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e só se, existe $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tal que $X \subset B[a, r]$.

De fato, se $X \subset B[a, r]$, então $\|x - a\| \le r$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\|x\| = \|x - a + a\| \le \|x - a\| + \|a\| \le r + \|a\|\,,$$

para todo $x \in X$, ou seja, $X \subset B[0, r + \|a\|]$.

Observação 3.4. Como as três normas usuais de $\mathbb{R}^n$ satisfazem as desigualdades

$$\|x\|_M \le \|x\| \le \|x\|_S \le n\|x\|_M\,,$$

temos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação a uma dessas normas se, e só se, é limitado em relação a qualquer das outras duas.

Teorema 3.2. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação à norma euclidiana se, e só se, suas projeções $\pi_1(X), \ldots, \pi_n(X)$ são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.*

Prova.
X é limitado com respeito à norma euclidiana $\| \quad \| \iff X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado com respeito à norma do máximo $\| \quad \|_M \iff \exists\, r > 0$ tal que $X \subset B_M[0,r] = [-r,r] \times \ldots \times [-r,r] \iff \exists\, r > 0$ tal que $\pi_1(X) \subset [-r,r], \ldots, \pi_n(X) \subset [-r,r] \iff \pi_1(X), \ldots, \pi_n(X)$ são limitados em $\mathbb{R}$. ■

Observação 3.5. Mostraremos depois que duas normas quaisquer $\| \quad \|_1$ e $\| \quad \|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, ou seja, existem $d, c > 0$ tais que

$$c\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\,\|x\|_2\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado com respeito a uma norma em $\mathbb{R}^n$, será também limitado em relação a qualquer outra norma em $\mathbb{R}^n$.

4 Sequências no espaço euclidiano

Salvo menção explícita em contrário,estaremos assumindo que a *norma* considerada em $\mathbb{R}^n$ é a *norma euclidiana*.

Definição 4.1. Uma *sequência* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. O valor $x(k)$ é indicado com x_k, e chama-se o $k-$ésimo termo da sequência.

Usaremos a notação (x_k), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ para indicar a sequência cujo $k-$ésimo termo é x_k.

Definição 4.2. Uma *subsequência* de (x_k) é a restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

A subsequência é indicada pelas notações $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$, $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_i}, \ldots)$.

Definição 4.3. Dizemos que uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é *limitada* quando o conjunto formado pelos seus termos é limitado, ou seja, quando existe $c > 0$ tal que $\|x_k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 4.1. Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ equivale a n sequências $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, de números reais, onde $x_{ki} = \pi_i(x_k) = i-$ésima coordenada de x_k, $i = 1, \ldots, n$.

As n sequências $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$ são chamadas as *sequências das coordenadas da sequência* (x_k).

Pelo teorema 3.2, temos, então, que uma sequência (x_k) é limitada se, e só se, cada uma de suas sequências de coordenadas $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, é limitada em $\mathbb{R}$.

Definição 4.4. Dizemos que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o *limite da sequência* (x_k) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Longrightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$

Neste caso, dizemos que (x_k) *converge* para a ou *tende* para a.

Notação:

• $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a\,,\ \lim x_k = a\,,\ \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k = a$ ou $x_k \longrightarrow a$ são equivalentes.

• Quando existe o limite $a = \lim x_k$, dizemos que a sequência (x_k) é *convergente*. Caso contrário, dizemos que a sequência (x_k) é *divergente*.

Observação 4.2. O *limite* de uma sequência (x_k) convergente é *único*.

Ou seja, se $a = \lim x_k$ e $b = \lim x_k$, então $a = b$.

De fato, se $\varepsilon = \dfrac{\|a-b\|}{2} > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{k_0} - a\| < \varepsilon$ e $\|x_{k_0} - b\| < \varepsilon$. Logo,

$$\|a-b\| \le \|x_{k_0} - a\| + \|x_{k_0} - b\| < 2\varepsilon = \|a-b\|\,,$$

uma contradição.

Observação 4.3. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$.

Observação 4.4. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,k_0 \in \mathbb{N};\ x_k \in B(a,\varepsilon)\ \ \forall\,k > k_0$, ou seja, qualquer bola aberta de centro a contém todos os termos x_k salvo, possivelmente, um número finito de índices k.

• Com isto, podemos definir o limite e convergência de uma sequência num espaço métrico (M, d) qualquer.

Observação 4.5. Toda sequência convergente é limitada.

De fato, seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente.

Dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - a\| < 1$ para todo $k > k_0$.

Se $r = \max\{\,1, \|x_1 - a\|, \ldots, \|x_{k_0} - a\|\,\} > 0$, então, $\|x_k - a\| \le r$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\} \subset B[a, r]$.

• Mas a recíproca não é verdadeira.

Por exemplo, se $a \neq b$, a sequência $\{a, b, a, b, a, \ldots\}$ é limitada, mas não é convergente.

Observação 4.6. Toda subsequência de uma sequência convergente é convergente e tem o mesmo limite.

Observação 4.7. Como as três normas usuais de $\mathbb{R}^n$ estão relacionadas pelas desigualdades

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M \,,$$

temos que:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - a\|_M = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - a\|_S = 0 \,.$$

ou seja, a afirmação $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ independe de qual das três normas usuais estamos considerando.

Como provaremos depois que duas normas quaisquer de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, a noção de limite de uma sequência em $\mathbb{R}^n$ permanece a mesma seja qual for a norma que considerarmos.

Teorema 4.1. *Uma sequência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^n$ *converge para o ponto* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *se, e só se,* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k\,i} = a_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$.

Prova.
Como $|x_{k\,i} - a_i| \leq \|x_k - a\|_M$, temos que se $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, ou seja, se $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\|_M = 0$, então $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{k\,i} - a_i| = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, e, portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k\,i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Suponhamos, agora, que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k\,i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe, para cada $i = 1, \ldots, n$, um número natural k_i tal que $|x_{k\,i} - a_i| < \varepsilon$ para todo $k > k_i$.

Seja $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Então, $k > k_0 \Longrightarrow \|x_k - a\|_M = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\,|x_{k\,i} - a_i|\,\} < \varepsilon$.

Logo $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

Corolário 4.1. *Se* (x_k), (y_k) *são sequência convergentes em* $\mathbb{R}^n$ *e* (λ_k) *é uma sequência convergente em* $\mathbb{R}$, *com* $a = \lim x_k$, $b = \lim y_k$ *e* $\lambda = \lim \lambda_k$, *então:*

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b \,,$

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k x_k = \lambda a \,,$

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k \rangle = \langle a, b \rangle \,.$

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|a\|.$

Prova.

Pelo teorema 4.1, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = a_i$ e $\lim\limits_{k\to\infty} y_{ki} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Utilizando novamente o teorema 4.1 e os fatos conhecidos sobre limites de somas e de produtos de sequências de números reais, temos que:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{ki} + y_{ki}) = a_i + b_i\,, \quad i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b\,.$

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k x_{ki} = \lambda a_i\,, \quad i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k x_k = \lambda a\,.$

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} (\, x_{k1}y_{k1} + \ldots + x_{kn}y_{kn}\,) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = \langle a, b\rangle\,.$

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\langle x_k, x_k\rangle} = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \|a\|\,.$

Também podemos provar (d) observando que $|\,\|x_k\| - \|a\|\,| \le \|x_k - a\|$, que tem a vantagem de valer para qualquer norma. ■

Teorema 4.2. *(Bolzano-Weierstrass)*

Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.

Prova.

Caso $n = 1$: Seja (x_k) uma sequência limitada de números reais, e sejam $a < b$ tais que $x_k \in [a, b]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos o conjunto:

$$A = \{\, t \in \mathbb{R} \,|\, x_k \ge t \text{ para uma infinidade de índices } k \,\}\,.$$

Temos que $a \in A$ e todo elemento de A é menor ou igual a b. Logo $A \neq \varnothing$ e é limitado superiormente por b. Seja $c = \sup A$.

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon \in A$ tal que $c - \varepsilon < t_\varepsilon$. Assim, existe uma infinidade de índices k tais que $x_k > c - \varepsilon$.

Por outro lado, como $c + \varepsilon \notin A$, $x_k \ge c + \varepsilon$ no máximo para um número finito de índices.

Assim, $c - \varepsilon < x_k < c + \varepsilon$ para uma infinidade de índices k, e, portanto, c é o limite de uma subsequência de (x_k).

Caso geral: Seja (x_k) uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$.

Pelo teorema 3.2, as sequências $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, de coordenadas de (x_k) são sequências limitadas de números reais.

Como $(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito e $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_1} x_{k1} = a_1$. Por sua vez, como a sequência $(x_{k2})_{k\in\mathbb{N}_1}$ de números reais é limitada, existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_2} x_{k2} = a_2$.

Prosseguindo dessa maneira, obtemos n conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \ldots \supset \mathbb{N}_n$ e n números reais $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_i} x_{ki} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Sendo $a = (a_1, \ldots, a_n)$, temos que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}_n} x_k = a$, o que conclui a demonstração. ■

Definição 4.5. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é *valor de aderência* de uma sequência (x_k) de pontos de $\mathbb{R}^n$ quando a é limite de alguma subsequência de (x_k).

Observação 4.8. Uma sequência (x_k) não possui valor de aderência $\Longleftrightarrow$ (x_k) não possui subsequência limitada $\Longleftrightarrow$ para todo número real $A > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Longrightarrow \|x_k\| > A$.

Observação 4.9. $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\Longleftrightarrow$ dados $\varepsilon > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$, existe $k > k_0$ tal que $\|x_k - a\| < \varepsilon$.

Observação 4.10. Uma sequência convergente possui um único valor de aderência, mas a recíproca não vale, pois, por exemplo, a sequência $(1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots)$ possui o 1 como único valor de aderência, mas não converge, já que é ilimitada.

Teorema 4.3. *Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Prova.

($\Longrightarrow$) É imediato.

($\Longleftarrow$) Seja (x_k) uma sequência limitada e seja $a \in \mathbb{R}^n$ o seu único valor de aderência.

Suponhamos, por absurdo, que a sequência (x_k) não converge para a. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $k' > k$ tal que $\|x_{k'} - a\| \geq \varepsilon_0$, ou seja, o conjunto $\mathbb{N}' = \{\, k \in \mathbb{N} \,|\, x_k \notin B(a, \varepsilon_0) \,\}$ é ilimitado e, portanto, infinito.

Como a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ é limitada, existe, pelo teorema 4.2, $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ infinito e $b \in \mathbb{R}^n$ tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}''} x_k = b$.

Sendo $\|x_k - a\| \geq \varepsilon_0 > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}''$, temos que $\|b - a\| \geq \varepsilon_0 > 0$. Logo $b \neq a$ e b é valor de aderência de (x_k), uma contradição, já que (x_k) possui um único valor de aderência. ■

Definição 4.6. Dizemos que uma sequência (x_k) é *de Cauchy* quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, \ell > k_0 \Longrightarrow \|x_k - x_\ell\| < \varepsilon$.

Observação 4.11. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy $\iff$ para cada $i = 1, \ldots, n$, a sequência $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ das suas $i-$ésimas coordenadas é uma sequência de Cauchy de números reais.

Teorema 4.4. *Uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e só se, é convergente.*

Prova.
($\Longleftarrow$) É imediato.

($\Longrightarrow$) Seja (x_k) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$.

Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, a sequência $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ de suas $i-$ésimas coordenadas é de Cauchy e, portanto, convergente. Sendo $a_i = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} x_{ki}$, $i = 1, \ldots, n$, temos, pelo teorema 4.2, que $a = (a_1, \ldots, a_n) = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} x_k$, ou seja, (x_k) é convergente e tem limite a. ■

Definição 4.7. Dizemos que duas normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ em $\mathbb{R}^n$ são *equivalentes* quando existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$\|x\|_1 \le a\|x\|_2 \qquad \text{e} \qquad \|x\|_2 \le b\|x\|_1\,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 4.12. Se, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e todo $r > 0$, $B_1(x_0, r)$ e $B_2(x_0, r)$ indicarem, respectivamente, a bola aberta de centro x_0 e raio r segundo as normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$, as desigualdades acima significam que:

$$B_2(x_0, r) \subset B_1(x_0, ar) \qquad \text{e} \qquad B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, br)\,.$$

Observação 4.13. As três normas usuais em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, pois

$$\|x\|_M \le \|x\| \le \|x\|_S \le n\|x\|_M\,.$$

Observação 4.14. A equivalência entre normas é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Observação 4.15. Se duas normas $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ são equivalentes, então:

- $\lim \|x_k - a\|_1 = 0 \iff \lim \|x_k - a\|_2 = 0$, ou seja, normas equivalentes dão origem à mesma noção de limite em $\mathbb{R}^n$.

- $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação à norma $\|\ \|_1$ se, e só se, $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação à norma $\|\ \|_2$.

Teorema 4.5. *Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Prova.

Por transitividade, basta mostrar que uma norma qualquer $\| \quad \|$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente à norma da soma $\|x\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $a = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Então,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\| \le |x_1|\,\|e_1\| + \ldots + |x_n|\,\|e_n\| \\ &\le a\,(\,|x_1| + \ldots + |x_n|\,) \le a\,\|x\|_S\,, \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Seja $F = \{\,\|x\| \mid \|x\|_S = 1\,\} \subset \mathbb{R}$. Então, $F \neq \varnothing$ e limitado, pois $0 < \|x\| \le a$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_S = 1$.

Seja $b = \inf F$. Então $b \ge 0$.

Suponhamos que $b = 0$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \|x_k\| < \frac{1}{k}$ e $\|x_k\|_S = 1$.

Como a sequência $(x_k)_k \in \mathbb{N}$ é limitada na norma da soma, temos, pelo teorema 4.2, que existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e $c \in \mathbb{R}^n$ tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|x_k - c\|_S = 0$.

Assim, pelo item (d) do corolário 4.1, temos que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|x_k\|_S = \|c\|_S$. Logo $\|c\|_S = 1$, e, portanto, $c \neq 0$.

Como $\|x_k - c\| \le a\|x_k - c\|_S$ para todo $k \in \mathbb{N}'$ e $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|x_k - c\|_S = 0$, temos que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|x_k - c\| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|x_k\| = \|c\|$.

Por outro lado, como $\|x_k\| < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| = 0$, o que é uma contradição, já que $\|c\| \neq 0$.

Logo $\inf F = b > 0$. Assim, $\|x\| \ge b$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_S = 1$.

Então, $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_S} \right\| \ge b$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, ou seja, $\|x\| \ge b\|x\|_S$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Aplicação: Uma sequência de polinômios $p_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + \ldots + a_{kn}t^n$ de grau $\le n$ converge para o polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ uniformemente no intervalo não-degenerado $[\alpha, \beta]$ se, e só se, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, a sequência $(a_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ dos coeficientes de t^i nos polinômios p_k converge para o coeficiente a_i de t^i no polinômio p.

De fato, existe um isomorfismo linear Φ entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$ e o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ dos polinômios reais de grau $\le n$ dado por $\Phi((b_0, b_1, \ldots, b_n)) = p_b(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$.

Seja $\|x\| = \sup\{\,|p_x(t)|\,|\,t \in [\alpha,\beta]\,\}$. É fácil verificar que $\|\ \ \|$ define uma norma em $\mathbb{R}^{n+1}$, pois:

(a) $\|\lambda x\| = \sup\{\,|p_{\lambda x}(t)|\,|\,t \in [\alpha,\beta]\,\} = \sup\{\,|\lambda|\,|p_x(t)|\,|\,t \in [\alpha,\beta]\,\} = |\lambda|\,\|x\|$.

(b) $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \Longrightarrow p_x(t) = 0$ no máximo para n valores distintos de $t \in [\alpha,\beta]$

$\Longrightarrow \exists\, t_0 \in [\alpha,\beta]$ tal que $|p_x(t_0)| > 0 \Longrightarrow \|x\| = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |p_x(t)| \geq |p_x(t_0)| > 0$.

(c) Como $p_{x+y}(t) = p_x(t) + p_y(t)$, temos que

$$|p_{x+y}(s)| \leq |p_x(s)| + |p_y(s)| \leq \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |p_x(t)| + \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |p_y(t)|\,, \text{ para todo } s \in [\alpha,\beta]\,,$$

Logo,

$$|p_{x+y}(s)| \leq \|x\| + \|y\|\,, \text{ para todo } t \in [\alpha,\beta]$$

e, portanto, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Em relação a esta norma, $x_k \longrightarrow a$ em $\mathbb{R}^{n+1} \Longleftrightarrow \|x_k - a\| = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |p_{x_k}(t) - p_a(t)| \longrightarrow 0$ $\Longleftrightarrow p_{x_k} \longrightarrow p_a$ uniformemente em $[\alpha,\beta]$.

Como duas normas quaisquer são equivalentes em $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que $x_{ki} \longrightarrow a_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n \Longleftrightarrow \|x_k - a\|_M \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|x_k - a\| \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow p_{x_k} \longrightarrow p_a$ uniformemente em $[\alpha,\beta]$.

• Na norma $\|\ \ \|$ definida acima, podemos trocar o intervalo $[\alpha,\beta]$ não-degenerado por um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ infinito qualquer. □

5 Pontos de acumulação

Definição 5.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é *ponto de acumulação* de X quando para todo $\varepsilon > 0$ temos que $X \cap (B(a,\varepsilon) - \{a\}) \neq \varnothing$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $0 < \|x - a\| < \varepsilon$.

O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado por X' e chamado o *conjunto derivado* de X.

Exemplo 5.1. $B[a,r] = (B(a,r))'$.

De fato:

(1) $S[a,r] \subset (B(a,r))'$

Seja $b \in S[a,r]$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon < \dfrac{r}{2}$.

Tome $0 < t_0 = \dfrac{\varepsilon}{2r} < \dfrac{1}{4}$. Então:

- $\|b - ((1-t_0)b + t_0 a)\| = \|t_0(b-a)\| = |t_0|\, r = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$

e

- $\|a - ((1-t_0)b + t_0 a)\| = |1-t_0|\,\|b-a\| = (1-t_0)r < r$, pois $0 < 1-t_0 < 1$.

Logo $(1-t_0)a + t_0 b \in B(b,\varepsilon) \cap (B(a,r) - \{a\})$, ou seja, $B(b,\varepsilon) \cap (B(a,r) - \{a\}) \neq \varnothing$.

Então $b \in B(a,r)'$.

(2) $B(a,r) \subset B(a,r)'$.

- Seja $b \in B(a,r)$, $b \neq a$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 < \varepsilon < \|b-a\|$.

Tome $0 < t_0 = \dfrac{\varepsilon}{2\|b-a\|} < \dfrac{1}{2}$. Então:

- $\|(1-t_0)b + t_0 a - b\| = |t_0|\,\|b-a\| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$

e

- $\|(1-t_0)b + t_0 a - a\| = |1-t_0|\,\|b-a\| < r\,$, pois $\|b-a\| < r$ e $|1-t_0| < 1$.

Logo $(1-t_0)a + t_0 b \in B(b,\varepsilon) \cap (B(a,r) - \{a\})$.

Então $b \in B(a,r)'$.

- Para $b = a$ e $0 < \varepsilon < r$, tome $c = a + \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Assim, $\|b-c\| = \|a-c\| = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\|e_1\|}{\|e_1\|} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < r$. Logo $c \in B(a,\varepsilon) \cap (B(a,r) - \{a\})$.

Ou seja, $a \in B(a,r)'$.

(3) $b \notin B[a,r] \Longrightarrow b \notin B(a,r)'$.

Seja $b \notin B[a,r]$, isto é, $\|b-a\| > r$, e seja $\varepsilon_0 = \|b-a\| - r > 0$.

Então, $B(b,\varepsilon_0) \cap B(a,r) = \varnothing$, pois, caso contrário, existiria $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x-b\| < \varepsilon_0$ e $\|x-a\| < r \Longrightarrow \|a-b\| \le \|x-b\| + \|a-x\| < \varepsilon_0 + r = \|b-a\|$, uma contradição.

Logo $b \notin B(a,r)'$. $\square$

Observação 5.1. Como vimos neste exemplo, um ponto de acumulação de um conjunto X pode pertencer ou não a X.

E neste exemplo, todo ponto de X é ponto de acumulação de X, mas isso nem sempre acontece.

Definição 5.2. Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X é chamado *ponto isolado* de X.

Ou seja, $a \in X$ é um ponto isolado de X se, e só se, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_0) \cap X = \{a\}$.

Quando todos os pontos de X são pontos isolados, dizemos que X é um *conjunto discreto*.

Exemplo 5.2. $\mathbb{N}$ é um conjunto discreto. □

Exemplo 5.3. No conjunto $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, os pontos $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ são isolados e $0 \in X'$. □

Teorema 5.1. *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $a \in X'$;

(2) *Existe uma sequência (x_k) de pontos de X com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$;*

(3) *Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Prova.
(1)$\Longrightarrow$(2): Como $a \in X'$, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap (X - \{a\})$, ou seja, $0 < \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$. Logo $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$.

(2)$\Longrightarrow$(3): Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(a, \varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$.

O conjunto $\{x_k \,|\, k \geq k_0\}$ é infinito, porque, caso contrário, (x_k) teria uma subsequência constante, que convergiria para um limite diferente de a, já que $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $X \cap B(a, \varepsilon)$ é um conjunto infinito.

(3)$\Longrightarrow$(1): É evidente. ■

Corolário 5.1. *Se $X' \neq \varnothing$, então X é infinito.*

Observação 5.2. A recíproca do corolário acima é falsa. Por exemplo, $\mathbb{N}$ é infinito, mas $\mathbb{N}' = \varnothing$.

Teorema 5.2. *(Bolzano-Weierstrass)*

Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto infinito e limitado, então $X' \neq \varnothing$.

Prova.
Sendo infinito, X contém um subconjunto infinito enumerável $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Assim, (x_k) é uma sequência limitada de pontos de X tal que $x_k \neq x_\ell$ para $k \neq \ell$.

Pelo teorema 4.4, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} x_k = a$. Como os termos x_k são dois a dois distintos, no máximo um deles é igual a a. Eliminando-o, se necessário, obtemos uma sequência de pontos de X, todos diferentes de a, com limite a.

Então, pelo teorema 5.1, $a \in X'$. ■

6 Aplicações contínuas

Definição 6.1. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é *contínua no ponto $a \in X$* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta$, então $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Ou seja, para toda bola aberta $B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$ em $\mathbb{R}^n$, existe uma bola aberta $B(a, \delta)$ de centro $a \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(X \cap B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em todos os pontos do conjunto X, dizemos que f é uma *aplicação contínua*.

Observação 6.1. Se $a \in Y \subset X$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em a, então $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em a.

Observação 6.2. Se $a \in X$ e $r > 0$ são tais que $f|_{B(a,r) \cap X}$ é contínua em a, então $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em a, pois, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a, r) \cap X \cap B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) .$$

Então, para $\delta' = \min\{r, \delta\} > 0$,

$$f(B(a, \delta') \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon) .$$

Portanto, *a continuidade de uma aplicação* é uma *propriedade local*.

Observação 6.3. Pela definição de continuidade de uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ num ponto $a \in X$, pela definição de normas equivalentes e pelo teorema 4.5, verifica-se, facilmente, que a continuidade (ou descontinuidade) de f num ponto a independe das normas consideradas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.4. Se a é um ponto isolado do conjunto X, então toda aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.

De fato, seja $\delta_0 > 0$ tal que $B(a, \delta_0) \cap X = \{a\}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta_0 > 0$ tal que

$$f(B(a, \delta) \cap X) = \{f(a)\} \subset B(f(a), \varepsilon) .$$

Definição 6.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *lipschitziana* quando existe $K > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \le K\|x - y\|\,,$$

para quaisquer $x, y \in X$.

Observação 6.5. Toda aplicação lipschitziana $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $a \in X$, existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$, tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \le K\|x - a\| < K\,\delta = \varepsilon.$$

Observação 6.6. Ser ou não lipschitziana independe das normas tomadas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.7. Toda transformação linear $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana.

De fato, sejam $\{e_1, \ldots, e_m\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $K = \max\{\|A(e_1)\|, \ldots, \|A(e_m)\|\}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
\|A(x)\| &= \|A(x_1e_1 + \ldots + x_me_m)\| = \|x_1A(e_1) + \ldots + x_mA(e_m)\| \\
&\le |x_1|\,\|A(e_1)\| + \ldots + |x_m|\,\|A(e_m)\| \le K(|x_1| + \ldots + |x_m|) \\
&= K\,\|x\|_S\,.
\end{aligned}$$

Logo $\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \le K\|x - y\|_S$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Observação 6.8. Seja $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear. Então $\varphi|_X$ é lipschitziana, para todo $X \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ limitado.

De fato, se $K = \max\{\|\varphi(e_i, e_j)\| \,|\, i = 1, \ldots, m\,,\ j = 1, \ldots, n\}$, então

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, y)\| &= \left\| \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_ie_i\,, \sum_{j=1}^{n} y_je_j \right) \right\| = \left\| \sum_{i,j} x_iy_j\,\varphi(e_i, e_j) \right\| \\
&\le \sum_{i,j} |x_i|\,|y_j|\,\|\varphi(e_i, e_j)\| \le K \sum_{i,j} |x_i|\,|y_j| \\
&= K\,\|x\|_S\,\|y\|_S\,.
\end{aligned}$$

Se consideramos $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com a norma da soma, temos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| &= \|\varphi(x, y - y') + \varphi(x - x', y')\| \\
&\le \|\varphi(x, y - y')\| + \|\varphi(x - x', y')\| \\
&\le K\,(\,\|x\|_S\,\|y - y'\|_S + \|x - x'\|_S\,\|y'\|_S\,)\,,
\end{aligned}$$

para quaisquer $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Como X é limitado em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que $\|(x, y)\|_S = \|x\|_S + \|y\|_S \le r$ para todo $(x, y) \in X$.

Logo, se $(x, y), (x', y') \in X$, temos que $\|x\|_S \leq r$ e $\|y'\|_S \leq r$ e, portanto,

$$\|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')\| \leq K\, r\ (\ \|x - x'\|_S + \|y - y'\|_S\ ) = K\, r\ (\ \|(x, y) - (x', y')\|_S\ )\ .$$

Portanto, φ cumpre uma condição de Lipschitz, com constante Kr, em cada bola $B_S[0, r]$ do espaço $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.

Em particular, toda aplicação bilinear é contínua.

6.1 Exemplos de aplicações bilineares

(1) A multiplicação de números reais $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x, y) = xy$.

(2) A multiplicação de um escalar por um vetor $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\lambda, x) = \lambda x$.

(3) O produto interno $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(4) A multiplicação de matrizes $\varphi : \mathcal{M}(m \times n) \times \mathcal{M}(n \times p) \longrightarrow \mathcal{M}(m \times p)$, $\varphi(A, B) = A\, B$.

(5) A avaliação $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(T, x) = T\, x$.

Observação 6.9. Toda aplicação bilinear não-nula $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ não é lipschitziana em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

De fato, seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que existe $K > 0$ tal que $\|\varphi(x, y)\| \leq K\, \|(x, y)\|$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Então $\|\varphi(\lambda x_0, \lambda y_0)\| \leq K\, \|(\lambda x_0, \lambda y_0)\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Logo $\lambda^2\, \|\varphi(x_0, y_0)\| \leq K\, |\lambda|\, \|(x_0, y_0)\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, $|\lambda| \leq \dfrac{K\, \|(x_0, y_0)\|}{\|\varphi(x_0, y_0)\|}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição.

Definição 6.3. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *imersão isométrica* quando $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Observação 6.10. A noção de imersão isométrica *depende das normas* consideradas nos espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.11. Toda imersão isométrica é uma aplicação lipschitziana.

Observação 6.12. Toda imersão isométrica é injetora, pois

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| = 0 \Longrightarrow x = y\,.$$

Exemplo 6.1. Para $m \geq n$ a aplicação $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,,$$

é uma imersão isométrica, se consideramos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ com a norma euclidiana, ou com a norma do máximo ou com a norma da soma, por exemplo. □

Definição 6.4. Uma imersão isométrica $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $f(X) = Y$, chama-se uma *isometria de* X *sobre* Y. Sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é, por sua vez, uma isometria de Y sobre X.

Exemplo 6.2. Dado $a \in \mathbb{R}^n$, a *translação* $T_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T_a(x) = a + x$, é uma isometria de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ sendo $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ a sua inversa.

Observe que T_a é linear se, e somente se, $a = 0$. □

Exemplo 6.3. Consideremos $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria se, e somente se, é ortogonal, ou seja, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

De fato, se $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \langle Tx, Ty \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|Tx + Ty\|^2 - \|Tx - Ty\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y \rangle\,. \end{aligned}$$

E, reciprocamente, se $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\|Tx - Ty\|^2 = \|T(x-y)\|^2 = \langle T(x-y), T(x-y) \rangle = \langle x-y, x-y \rangle = \|x-y\|^2\,,$$

ou seja, $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Uma transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ também se caracteriza pelo fato de ser $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$ uma base ortonormal. Isto equivale a dizer que as colunas da matriz da transformação T em relação à base canônica são duas a duas ortogonais e unitárias. Isto é, $A^t A = A\, A^t = I$. □

Observação 6.13. Consideremos $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana.

Toda isometria $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é obtida fazendo a composição de uma translação com uma transformação ortogonal (ver exercício 7.13).

Definição 6.5. Uma *contração fraca* $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação lipschitziana com constante de Lipschitz $K = 1$. Ou seja, f é uma contração fraca se $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Observação 6.14. Se trocarmos a norma de $\mathbb{R}^m$ ou de $\mathbb{R}^n$, uma contração fraca continua sendo uma aplicação lipschitziana (e, portanto, contínua), mas ela pode deixar de ser uma contração fraca.

Exemplo 6.4. (Contrações fracas)

(a) A soma de vetores $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $s(x, y) = x + y$, é uma contração fraca.

De fato, tomando em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a norma da soma, temos que:

$$\|s(x,y) - s(x',y')\|_S = \|(x+y) - (x'+y')\|_S \le \|x - x'\|_S + \|y - y'\|_S = \|(x,y) - (x',y')\|_S \,.$$

(b) A projeção $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\pi_i(x) = x_i$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, é uma contração fraca.

De fato,

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)| = |x_i - y_i| \le \|x - y\| \,,$$

podendo-se tomar em $\mathbb{R}^n$ qualquer uma das três normas usuais.

(c) A norma $\| \quad \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca.

De fato, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\| \,.$$

(d) A distância $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x,y) = \|x - y\|_S$, também é uma contração fraca se considerarmos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com a norma da soma, pois:

$$\begin{aligned} |d(x,y) - d(x',y')| &= |\,\|x - y\|_S - \|x' - y'\|_S\,| \\ &\le \|(x - y) - (x' - y')\|_S \\ &\le \|x - x'\|_S + \|y - y'\|_S = \|(x,y) - (x',y')\|_S \,, \end{aligned}$$

para quaisquer $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 6.1. *Dados* $X \subset \mathbb{R}^m$*,* $Y \subset \mathbb{R}^n$*,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *contínua no ponto* $a \in X$*, com* $f(X) \subset Y$*, e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *contínua no ponto* $b = f(a) \in Y$*, então* $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *é contínua no ponto* a*.*

Prova.

Sendo g contínua em $b = f(a)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y \,, \ \|y - f(a)\| < \eta \Longrightarrow \|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon \,.$$

Por outro lado, sendo f contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \,, \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \eta \,.$$

Então,

$$x \in X \,, \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|g(f(x)) - g(f(a))\| < \varepsilon \,.$$

Isto é, $g \circ f$ é contínua no ponto a. ■

Observação 6.15. Dada uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, temos que, para todo $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, onde $f_i = \pi_i \circ f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são as *funções coordenadas* de f.

Teorema 6.2. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e só se, cada uma das suas funções coordenadas $f_i = \pi_i \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.*

Prova.
($\Longrightarrow$) Sendo f contínua no ponto a e $\pi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, temos, pelo teorema anterior, que $f_i = \pi_i \circ f$ é contínua no ponto a, $i = 1, \ldots, n$.

($\Longleftarrow$) Se cada função coordenada $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, \ldots, n$, é contínua no ponto a, dado $\varepsilon > 0$, existem números reais $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ tais que

$$x \in X \,, \; \|x - a\| < \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \,.$$

Considerando em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo e tomando $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\} > 0$, temos que

$$x \in X \,, \; \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_M < \varepsilon \,.$$

Logo f é contínua no ponto a. ■

Corolário 6.1. *Dadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, seja $(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ a aplicação definida por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$. Então (f, g) é contínua no ponto a se, e só se, f e g são contínuas no ponto a.*

Prova.
Se $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e $g = (g_1, \ldots, g_n)$, então, as funções coordenadas de (f, g) são

$$f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n \,.$$

Logo, pelo teorema 6.2, a aplicação (f, g) é contínua em $a \Longleftrightarrow$ as funções coordenadas $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots$ são todas contínuas no ponto $a \Longleftrightarrow f$ e g são contínuas no ponto a. ■

O teorema 6.1 e o corolário 6.1 são de grande utilidade para mostrar a continuidade de certas aplicações. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6.5. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicações contínuas. Então são também contínuas as aplicações:

$$\begin{aligned} f + g : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \,, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \,; \\ \lambda f : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \,, \quad (\lambda f)(x) = \lambda(x)\, f(x) \,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle : X &\longrightarrow \mathbb{R}\,, & \langle f, g\rangle(x) &= \langle f(x), g(x)\rangle\,; \\ \frac{1}{\lambda} : X - Z_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R}\,, & \left(\frac{1}{\lambda}\right)(x) &= \frac{1}{\lambda(x)}\,, \end{aligned}$$

onde $Z_\lambda = \{x \in X \,|\, \lambda(x) = 0\}$.

De fato, como as aplicações $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\rho : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $s(x, y) = x + y$, $\varphi(t, x) = t\,x$, $\xi(x, y) = \langle x, y\rangle$ e $\rho(t) = \dfrac{1}{t}$, são aplicações contínuas, e, pelo corolário 6.1, as aplicações (f, g) e (λ, f) são contínuas temos, pelo teorema 6.1, que as aplicações $f + g = s \circ (f, g)$, $\lambda\, f = \varphi \circ (\lambda, f)$, $\langle f, g\rangle = \xi \circ (f, g)$ e $\dfrac{1}{\lambda} = \rho \circ \lambda$ são também contínuas. $\square$

Exemplo 6.6. A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (\text{sen}\, x)\, e^{x^2 + y^3}$ é contínua, pois

$$f = \varphi \circ (\text{sen} \circ \pi_1\,,\ \exp \circ s \circ (\xi \circ \pi_1\,,\ \eta \circ \pi_2))\,,$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são as funções contínuas dadas por: $\varphi(x, y) = x\,y$, $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$, $s(x, y) = x + y$, $\xi(x) = x^2$, $\eta(x) = x^3$ e $\exp(x) = e^x$. $\square$

Teorema 6.3. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e só se, para toda sequência (x_k) de pontos de X com $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Prova.

($\Longrightarrow$) Seja f contínua no ponto a e (x_k) uma sequência de pontos de X com $\lim x_k = a$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Como $\lim x_k = a$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - a\| < \delta$ para todo $k > k_0$. Logo $\|f(x_k) - f(a)\| < \varepsilon$ para todo $k > k_0$. Então $f(x_k) \longrightarrow f(a)$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que f não é contínua no ponto a. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in X$ com $\|x_k - a\| < \dfrac{1}{k}$ e $\|f(x_k) - f(a)\| \geq \varepsilon_0$.

Assim, $x_k \longrightarrow a$, mas $(f(x_k))$ não converge para $f(a)$. $\blacksquare$

Definição 6.6. Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *contínua em relação à variável x_i*, $(i = 1, \ldots, m)$ quando, para cada $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m)$ fixado, a *aplicação parcial* $t \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ é contínua.

• Toda aplicação contínua $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é separadamente contínua em relação a cada uma de suas variáveis, pois suas aplicações parciais são compostas de f com uma aplicação contínua do tipo $t \longmapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Mas a recíproca é falsa.

De fato, a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

é contínua separadamente em relação a x e a y, pois $f(x,b) = \dfrac{bx}{x^2+b^2}$ se $b \neq 0$ e $f(x,0) = 0$, enquanto $f(a,y) = \dfrac{ay}{a^2+y^2}$ se $a \neq 0$ e $f(0,y) = 0$. Mas f não é contínua na origem, pois $f \circ g(t) = \dfrac{1}{2}$ se $t \neq 0$ e $f \circ g(0) = 0$, onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $g(t) = (t,t)$, é uma aplicação contínua em $\mathbb{R}$. Como $f \circ g$ não é contínua em $t = 0$, temos que f não é contínua na origem.

Definição 6.7. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *uniformemente contínua* quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Observação 6.16. A noção de continuidade uniforme independe das normas consideradas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.17. Toda aplicação uniformemente contínua é contínua.

Observação 6.18. Toda aplicação lipschitziana é uniformemente contínua.

De fato, se $\|f(x) - f(y)\| \leq K\,\|x - y\|$ para todos $x, y \in X$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$ tal que

$$x, y \in X\,,\ \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq K\,\|x - y\| < K\,\delta = \varepsilon\,.$$

Em particular,

- toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua;
- se $X \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um subconjunto limitado e $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação bilinear, então $\varphi|_X$ é uniformemente contínua.

Observação 6.19. A função $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, é um exemplo de uma função uniformemente contínua que não é lipschitziana (veja *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima, pag. 244).

Observação 6.20. A composta de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

Observação 6.21. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua $\Longleftrightarrow$ suas funções coordenadas $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas.

Teorema 6.4. *Uma aplicação* $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uniformemente contínua se, e só se, para quaisquer duas sequências* (x_k) *e* (y_k) *em* X *com* $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$*, tem-se*

$$\lim_{k\to\infty} (\, f(x_k) - f(y_k)\,) = 0.$$

Prova.

($\Longrightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Se (x_k) e (y_k) são sequências em X com $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - y_k\| < \delta$ para todo $k > k_0$.

Logo $\|f(x_k) - f(y_k)\| < \varepsilon$ para todo $k > k_0$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} (\, f(x_k) - f(y_k)\,) = 0\,.$

($\Longleftarrow$) Suponhamos que f não é uniformemente contínua. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos obter um par de pontos $x_k, y_k \in X$ com $\|x_k - y_k\| < \dfrac{1}{k}$ e $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0$.

Logo $(x_k - y_k) \longrightarrow 0$, mas $(\, f(x_k) - f(y_k)\,) \not\longrightarrow 0$. ■

Exemplo 6.7. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x^2)$ não é uniformemente contínua.

De fato, se $x_k = \sqrt{(k+1)\,\pi}$ e $y_k = \sqrt{k\pi}$, então:

$$\begin{aligned}
x_k - y_k &= \frac{\left(\sqrt{(k+1)\,\pi} - \sqrt{k\pi}\right)\left(\sqrt{(k+1)\,\pi} + \sqrt{k\pi}\right)}{\sqrt{(k+1)\,\pi} + \sqrt{k\pi}} \\
&= \frac{(k+1)\,\pi - k\pi}{\sqrt{(k+1)\,\pi} + \sqrt{k\pi}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\,\pi} + \sqrt{k\pi}} \longrightarrow 0\,.
\end{aligned}$$

Mas, como $\cos(x_k^2) = \cos(\,(k+1)\,\pi\,) = \pm 1$ e $\cos(y_k^2) = \cos(k\pi) = \mp 1$, temos que $\|f(x_k) - f(y_k)\| = 2$ para todo k, e, portanto, $(\, f(x_k) - f(y_k)\,) \not\longrightarrow 0$. □

7 Homeomorfismos

Definição 7.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Um *homeomorfismo entre X e Y* é uma bijeção contínua $f : X \longrightarrow Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ também é contínua.

Dizemos que os conjuntos X e Y são *homeomorfos* se existe um homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Exemplo 7.1. Toda aplicação linear invertível $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre si próprio, pois sua inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e, portanto, contínua. □

Observação 7.1. A aplicação composta de dois homeomorfismos é um homeomorfismo, e o inverso de um homeomorfismo é um homeomorfismo.

Observação 7.2. Já sabemos (veja *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima, pag. 237) que se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua injetora definida num intervalo I, então $f(I) = J$ é um intervalo e $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, ou seja, $f : I \longrightarrow J$ é um homeomorfismo.

Mas, em geral, uma bijeção $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ pode ser contínua sem que sua inversa o seja.

Exemplo 7.2. Seja $f : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Pelo teorema 6.2, f é contínua. Além disso, f é uma bijeção. Mas sua inversa $f^{-1} : S^1 \longrightarrow [0, 2\pi)$ é descontínua no ponto $p = (1, 0)$.

De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam $t_k = 2\pi - \dfrac{1}{k}$ e $z_k = f(t_k)$. Então $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_k) = \lim\limits_{k\to\infty} z_k = p$, mas $\lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} t_k = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(p)$.

- No entanto, $f : (0, 2\pi) \longrightarrow S^1 - \{p\}$ é um homeomorfismo.

De fato, seja (z_k) uma sequência de pontos de $S^1 - \{p\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = q \in S^1 - \{p\}$.

Como f é uma bijeção, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um único $t_k \in (0, 2\pi)$ tal que $f(t_k) = z_k$.

Afirmação: A sequência (t_k) é convergente e seu limite b pertence ao intervalo $(0, 2\pi)$.

Com efeito, sendo (t_k) uma sequência limitada, ela possui pelo menos um valor de aderência, e todos os seus valores de aderência pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência convergente e seja $b = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} t_k$.

Então $f(b) = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} f(t_k) = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} z_k = q \in S^1 - \{p\}$. Logo $b \in (0, 2\pi)$ e, pela injetividade, $b = f^{-1}(q)$.

Portanto, $b = f^{-1}(q)$ é o único valor de aderência da sequência limitada (t_k).

Pelo teorema 4.3, (t_k) é convergente e $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} t_k = f^{-1}(q)$, ou seja, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(z_k) = f^{-1}(q)$.

Assim, do teorema 6.3, obtemos que $f^{-1} : S^1 - \{p\} \longrightarrow (0, 2\pi)$ é contínua e, portanto, $f : (0, 2\pi) \longrightarrow S^1 - \{p\}$ é um homeomorfismo.

- De modo análogo, podemos provar que a aplicação $f : (a, a + 2\pi) \longrightarrow S^1 - \{q\}$, onde $q = (\cos a, \operatorname{sen} a)$, é um homeomorfismo. □

Observação 7.3. Os homeomorfismos desempenham na Topologia um papel análogo aos movimentos rígidos na Geometria Euclidiana: dois conjuntos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista topológico.

Vejamos, agora, outros exemplos de homeomorfismos.

Exemplo 7.3. As translações $T_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T_a(x) = a + x$, são homeomorfismos, pois T_a e $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ são isometrias e, portanto, são contínuas. □

Exemplo 7.4. As *homotetias* $H_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $H_\lambda(x) = \lambda x$, com $\lambda \neq 0$, são homeomorfismos, pois cada H_λ é uma transformação linear invertível com $(H_\lambda)^{-1} = H_{\lambda^{-1}}$. □

Exemplo 7.5. Duas bolas abertas ou duas bolas fechadas ou duas esferas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas.

De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, $s > 0$ números reais, temos que a aplicação $\varphi = T_b \circ H_{s/r} \circ T_{-a} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo tal que:

$$\varphi(B(a,r)) = B(b,s)\,, \quad \varphi(B[a,r]) = B[b,s] \quad \text{e} \quad \varphi(S[a,r)] = S[b,s]\,,$$

pois, como $\varphi(x) = \frac{s}{r}(x-a) + b$, então $\|\varphi(x) - b\| = \frac{s}{r}\|x - a\|$ e, portanto:

$$\|\varphi(x) - b\| < s \Longleftrightarrow \|x - a\| < r\,;$$

$$\|\varphi(x) - b\| \leq s \Longleftrightarrow \|x - a\| \leq r\,;$$

$$\|\varphi(x) - b\| = s \Longleftrightarrow \|x - a\| = r\,. \;\square$$

Exemplo 7.6. Toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Como duas bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ são homeomorfas, basta mostrar que $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo à bola aberta $B(0,1)$ de centro na origem 0 e raio 1.

Para isso, considere as aplicações $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow B(0,1)$ e $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por: $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$, portanto $\|f(x)\| < 1$, e $g(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$.

Então f e g são contínuas,

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x}{1+\|x\|}\right) = \frac{x/(1+\|x\|)}{1 - \|x\|/(1+\|x\|)} = x\,,$$

e

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y}{1-\|y\|}\right) = \frac{y/(1-\|y\|)}{1 + \|y\|/(1-\|y\|)} = y\,, \text{ pois } 1 - \|y\| > 0.$$

Logo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow B(0,1)$ é uma bijeção contínua, cuja inversa é a aplicação contínua $g : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Portanto, f e g são homeomorfismos. □

Exemplo 7.7. Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Seu *gráfico* é o conjunto

$$G = \text{Graf}(f) = \{\,(x, f(x)) \,|\, x \in X\,\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}\,.$$

Afirmação: O domínio X e o gráfico G da aplicação contínua f são homeomorfos.

Considere a aplicação $\overline{f} : X \longrightarrow G$, definida por $\overline{f}(x) = (x, f(x))$.

Como f e a aplicação identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são contínuas, temos, pelo corolário 6.1, que $\overline{f}$ é uma bijeção contínua. Sua inversa $g : G \longrightarrow X$, dada por $g((x, f(x))) = x$, é contínua, pois $g = \pi_1|_G$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção $\pi_1(x, y) = x$.

- Em particular, $\mathbb{R} - \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\} = \left\{ \left(x, \tfrac{1}{x}\right) \,|\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\},$$

pois $\mathcal{H}$ é o gráfico da função contínua $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Também, usando o resultado acima, podemos provar que o hemisfério norte

$$S^m_+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, \|x\| = 1 \text{ e } x_{m+1} > 0 \right\}$$

da esfera $m-$dimensional é homeomorfo à bola aberta $B(0, 1) = \{ x \in \mathbb{R}^m \,|\, \|x\| < 1 \} \subset \mathbb{R}^m$.

De fato, $S^m_+ = \{ (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \,|\, x \in B(0, 1) \}$ e, portanto, S^m_+ é o gráfico da aplicação contínua $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$. $\square$

Exemplo 7.8. (Projeção estereográfica)

Seja $S^m = \{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, \langle x, x \rangle = 1 \}$ a esfera $m-$dimensional de centro na origem e raio 1 e $p = (0, \ldots, 0, 1) \in S^m$ seu pólo norte.

A *projeção estereográfica* é a aplicação $\varphi : S^m - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, onde $\varphi(x)$ é o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{px} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ corta o hiperplano $x_{m+1} = 0$, o qual identificamos com $\mathbb{R}^m$.

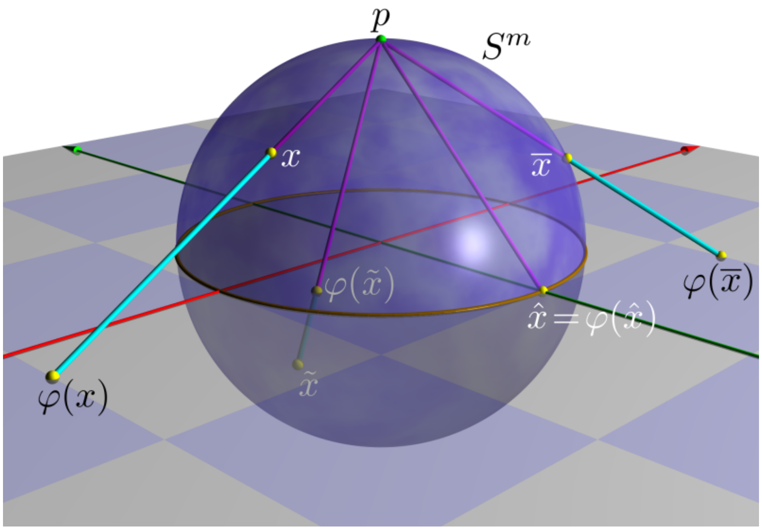

Fig. 5: Projeção estereográfica

Como $\overrightarrow{px} = \{ (1-t)p + tx \,|\, t > 0 \} = \{ p + t(x-p) \,|\, t > 0 \}$, temos que um ponto $y = (1-t)p + tx \in \overrightarrow{px}$ pertence ao hiperplano $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ se, e só se,

$$y_{m+1} = \pi_{m+1}(p + t(x-p)) = p_{m+1} + t(x_{m+1} - p_{m+1}) = 1 + t(x_{m+1} - 1) = 0\,.$$

Logo $y = (1-t)p + tx \in \overrightarrow{p\,x} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ se, e somente se, $t = \dfrac{1}{1-x_{m+1}}$ e, portanto,

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = \frac{x'}{1-x_{m+1}}\,, \text{ sendo } x' = (x_1, \ldots, x_m)\,.$$

Assim, $\varphi : S^m - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação contínua.

Seja agora a aplicação $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow S^m - \{p\}$ definida pelo processo inverso, ou seja, $\xi(x)$ é a intersecção de $S^m - \{p\}$ com a semi-reta $\overrightarrow{p\,x^\star}$, onde $x^\star = (x, 0)$.

Então $\xi(x) = p + t(x^\star - p)$, onde $t > 0$ e $\|p + t(x^\star - p)\| = 1$. Assim,

$$\|(tx_1, \ldots, tx_m, (1-t))\|^2 = 1 \iff t^2(x_1^2 + \ldots + x_m^2) + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$\iff t^2(1 + \|x\|^2) - 2t + 1 = 1 \iff t((1+\|x\|^2)t - 2) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{1+\|x\|^2}\,.$$

Logo $t = \dfrac{2}{1+\|x\|^2}$ e $\xi(x) = \left(\dfrac{2x}{1+\|x\|^2}, \dfrac{\|x\|^2 - 1}{1+\|x\|^2} \right)$.

Como $\xi : \mathbb{R}^m \longrightarrow S^m - \{p\}$ é contínua,

$$\varphi \circ \xi(x) = \frac{2x}{1+\|x\|^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}} = x\,,$$

e

$$\xi \circ \varphi(x) = \xi\left(\frac{x'}{1-x_{m+1}} \right) = \left(\frac{\dfrac{2x'}{1-x_{m+1}}}{1 + \dfrac{1+x_{m+1}}{1-x_{m+1}}}\,,\ \frac{\dfrac{1+x_{m+1}}{1-x_{m+1}} - 1}{\dfrac{1+x_{m+1}}{1-x_{m+1}} + 1} \right) = (x'\,,\ x_{m+1}) = x\,,$$

pois,

$$\left\| \frac{x'}{1-x_{m+1}} \right\|^2 = \frac{\|x'\|^2}{(1-x_{m+1})^2} = \frac{1-x_{m+1}^2}{(1-x_{m+1})^2} = \frac{1+x_{m+1}}{1-x_{m+1}}\,,$$

temos que ξ é a inversa de φ, e, portanto, $\varphi : S^m - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo. □

8 Limites

Definição 8.1. Sejam a aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $a \in X'$. Dizemos que $b \in \mathbb{R}^n$ é o *limite de $f(x)$ quando x tende para a*, e escrevemos

$$b = \lim_{x \to a} f(x)\,,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$x \in X\,,\ 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon\,.$$

Ou seja, $f(\,X \cap (B(a,\delta) - \{a\}\,) \subset B(b,\varepsilon)$.

Observação 8.1. Para que tenha sentido a existência do limite $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, não é necessário que a pertença a X, ou seja, que f esteja definida no ponto a, e mesmo que $a \in X$, o valor $f(a)$ não desempenha papel algum na definição de limite. Importam apenas os valores $f(x)$ para x próximo, porém diferente de a.

Observação 8.2. (Unicidade do limite)

Se $a \in X'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, então $b = c$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - b\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \|f(x) - c\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $a \in X'$, existe $x_\delta \in X$ tal que $0 < \|x_\delta - a\| < \delta$.

Logo,

$$\|b - c\| \leq \|f(x_\delta) - c\| + \|b - f(x_\delta)\| < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Assim, $b = c$.

Observação 8.3. A continuidade se exprime em termos de limite.

Se $a \in X$ é um ponto isolado de X, então toda aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a.

Mas, se $a \in X \cap X'$, $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a se, e só se, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Observação 8.4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff$ para toda sequência (x_k) de pontos de $X - \{a\}$ com $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, tem-se $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$.

Este resultado prova-se de modo análogo ao teorema 6.3.

Teorema 8.1. *Existe* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \iff$ *para toda sequência* (x_k) *de pontos de* $X - \{a\}$ *com* $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, *existe* $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k)$.

Prova.

Pela observação anterior, basta mostrar que se (x_k) e (y_k) são duas sequências em $X - \{a\}$ com $\lim x_k = \lim y_k = a$, então $\lim f(x_k) = \lim f(y_k)$.

Sejam $b = \lim f(x_k)$ e $c = \lim f(y_k)$.

Consideremos a sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots)$, ou seja, $z_{2k-1} = x_k$ e $z_{2k} = y_k$, $k = 1, \ldots, n, \ldots$.

Como $\lim z_{2k} = \lim z_{2k-1} = a$, temos que $\lim z_k = a$. Logo, pela hipótese, a sequência $(f(z_k))$ é convergente. Assim, $b = c$, pois $\lim f(z_{2k-1}) = b$ e $\lim f(z_{2k}) = c$. ∎

Observação 8.5. No caso em que $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de variável real e $a \in X'_-$ (ou $a \in X'_+$) podemos provar que o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$) existe se, e somente se, para toda sequência (x_k) crescente (respectivamente, decrescente) de pontos de $X - \{a\}$ com $\lim x_k = a$, o limite $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k)$ existe.

Observação 8.6. Sejam $a \in X' \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação cujas funções coordenadas são $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_n)$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

A demonstração se faz de modo análogo ao teorema 6.2.

Observação 8.7. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X'$, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ e $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = \lambda_0$. Então:

(1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$;

(2) $\lim\limits_{x \to a} \lambda(x)\, f(x) = \lambda_0\, b$;

(3) $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle b, c \rangle$;

As afirmações decorrem do corolário 4.1 e da caracterização de limite por meio de sequências (ver observação 8.4).

Observação 8.8. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ uma aplicação bilinear. Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^p$ são aplicações com $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $a \in X'$, e g é limitada, então $\lim\limits_{x \to a} \varphi(f(x), g(x)) = 0$.

De fato, basta observar que

$$\|\varphi(f(x), g(x))\| \leq M\, \|f(x)\|\, \|g(x)\|\,,$$

para todo $x \in X$, onde M é uma constante positiva que depende apenas da aplicação bilinear φ e das normas consideradas em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$.

• Como caso particular, temos que $\lim\limits_{x \to a} \langle f(x), g(x) \rangle = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)\, f(x) = 0$ se um dos fatores é limitado e o outro tende para zero.

Exemplo 8.1. Se $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, então $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

De fato, a função $f(x, y)$ é o produto de x por $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, sendo $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} x = 0$ e a aplicação $(x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ limitada, pois, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\,|x|\,|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1\,.$$

□

Observação 8.9. (Relação de limite e composição de aplicações)

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in X'$, $b \in Y'$ e $f(X) \subset Y$. Então:

(1) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ e $x \neq a \Longrightarrow f(x) \neq b$, então $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\mu > 0$ tal que

$$y \in Y \;\text{ e }\; 0 < \|y - b\| < \mu \Longrightarrow \|g(y) - c\| < \varepsilon\,.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $x \neq a \Longrightarrow f(x) \neq b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\text{ e }\; 0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow 0 < \|f(x) - b\| < \mu.$$

Logo $x \in X$ e $0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|g(f(x)) - c\| < \varepsilon$.

(2) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b, então $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$.

A demonstração se faz de modo análogo ao resultado anterior.

• Como consequência de (2), temos que se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ então $\lim\limits_{x \to a} \|f(x)\| = \|b\|$, pois a função norma $\|\;\;\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

• E como consequência de (1), temos que se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, então $\lim\limits_{t \to 0} f(a+tu) = b$, para qualquer vetor $u \neq 0$.

Segue daí que não existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, pois, para $u = (\alpha, \beta)$, o valor do limite $\lim\limits_{t \to 0} f(t\alpha, t\beta) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, que varia com α e β.

Observação 8.10.

Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, então $b \leq c$.

De fato, suponhamos que $b > c$ e seja $\varepsilon = \dfrac{b - c}{2} > 0$.

Então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ e $g(x) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Como $b - \varepsilon = c + \varepsilon$, temos que $g(x) < f(x)$ para todo $x \in \{x \in X \,|\, 0 < \|x - a\| < \delta\} \neq \varnothing$, pois $a \in X'$, uma contradição.

Observação 8.11.

Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação uniformemente contínua e (x_k) é uma sequência de Cauchy de pontos de X, então $(f(x_k))$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Como (x_k) é de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_\ell\| < \delta$ para $k, \ell \geq k_0$.

Logo $\|f(x_k) - f(x_\ell)\| < \varepsilon$ para $k, \ell \geq k_0$.

Teorema 8.2. *Seja* $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação uniformemente contínua. Então, para todo* $a \in X'$, *existe* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Prova.
Seja (x_k) uma sequência de pontos de $X - \{a\}$, com $\lim x_k = a$. Como (x_k) é uma sequência de Cauchy e f é uniformemente contínua, então $(f(x_k))$ é uma sequência de Cauchy e é, portanto, convergente. Então, pelo teorema 8.1, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. ■

Observação 8.12. A função contínua $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não é uniformemente contínua em qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ do qual $(0,0)$ seja um ponto de acumulação, pois não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Corolário 8.1. *Seja* $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação uniformemente contínua e seja* $\overline{X} = X \cup X'$. *Então existe uma única aplicação uniformemente contínua* $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $\overline{f}_X = f$.

Isto é, toda aplicação uniformemente contínua definida em X se estende de modo único a uma aplicação uniformemente contínua em $\overline{X} = X \cup X'$.

Prova.
Para cada $\overline{x} \in X' - X$, faça $\overline{f}(\overline{x}) = \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)$, o qual existe pelo teorema anterior. E se $\overline{x} \in X$, faça $\overline{f}(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

Então $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, assim definida, é uma aplicação que estende f.

Observe que se $\overline{x} \in X' \cap X$, então $\overline{f}(\overline{x}) = f(\overline{x}) = \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)$. Ou seja, $\overline{f}(\overline{x}) = \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)$, para todo $\overline{x} \in X'$.

Afirmação: $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Sejam $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}$ tais que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$. Como $\overline{X} = X \cup X'$, $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = \overline{f}(\overline{x})$, se $\overline{x} \in X'$, e $\lim\limits_{x\to\overline{y}} f(x) = \overline{f}(\overline{y})$, se $\overline{y} \in X'$, existem $0 < \delta_0 < \dfrac{\delta - \|\overline{x} - \overline{y}\|}{2}$ e $x, y \in X$ tais que

$$\|\overline{x} - x\| < \delta_0\,, \quad \|\overline{y} - y\| < \delta_0\,, \quad \|\overline{f}(\overline{x}) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \|\overline{f}(\overline{y}) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Se $\overline{x} \in X$, basta tomar $x = \overline{x}$, e se $\overline{y} \in X$, basta tomar $y = \overline{y}$).

Logo,

$$\|x - y\| \le \|x - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{y}\| + \|\overline{y} - y\| < \delta_0 + \delta_0 + \|\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta - \|\overline{x} - \overline{y}\| + \|\overline{x} - \overline{y}\| = \delta\,,$$

e, portanto,

$$\|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{y})\| \leq \|\overline{f}(\overline{x}) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - \overline{f}(\overline{y})\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Assim, se $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{X}$, $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta \Longrightarrow \|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{y})\| < \varepsilon$.

Unicidade: Seja $g : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua tal que $g|_X = f$.

Então, se $\overline{x} \in X$, $g(\overline{x}) = f(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x})$. E se $\overline{x} \in X' - X$, seja (x_k) uma sequência de pontos de X com $\lim x_k = \overline{x}$.

Logo $g(\overline{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = \overline{f}(\overline{x})\,.$ ■

9 Conjuntos abertos

Definição 9.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ é um *ponto interior a X* se existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset X$.

Observação 9.1. A definição de ponto interior independe da norma considerada em $\mathbb{R}^n$.

Definição 9.2. O *interior de X* é o conjunto $\text{int}\, X$ formado pelos pontos interiores a X.

Observação 9.2. $\text{int}\, X \subset X$

Definição 9.3. Dizemos que um conjunto V é uma *vizinhança* do ponto a quando $a \in \text{int}\, V$.

Definição 9.4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* quando todos os seus pontos são pontos interiores a X, ou seja, quando para todo $a \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset X$.

Assim, X é aberto $\Longleftrightarrow \text{int}\, X = X$.

Observação 9.3. Toda bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

De fato, seja $b \in B(a, r)$, ou seja, $\|b - a\| < r$. Então $\delta = r - \|b - a\| > 0$ e $B(b, \delta) \subset B(a, r)$, pois se $\|x - b\| < \delta \Longrightarrow \|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \delta + \|b - a\| = r$.

Observação 9.4. O complementar $\mathbb{R}^n - B[a, r]$ de uma bola fechada é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

De fato, dado $b \in \mathbb{R}^n - B[a, r]$, então $\|b - a\| > r$. Seja $\delta = \|b - a\| - r > 0$.

Então $B(b, \delta) \subset \mathbb{R}^n - B[a, r]$, pois se $\|x - b\| < \delta \Longrightarrow \|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| < \delta + \|x - a\| \Longrightarrow \|x - a\| > \|b - a\| - \delta = r$.

Observação 9.5. Para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, $\text{int}\, X$ é um conjunto aberto.

De fato, se $a \in \text{int}\, X$, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. Seja $x \in B(a, r)$.

Então, pondo $\delta = r - \|x - a\| > 0$, temos que $B(x, \delta) \subset B(a, r) \subset X$.

Logo, se $x \in B(a, r)$ então $x \in \text{int}\, X$, ou seja, $B(a, r) \subset \text{int}\, X$, o que prova que $\text{int}\, X$ é aberto.

Observação 9.6. Se $X \subset Y$ então $\text{int}\, X \subset \text{int}\, Y$.

De fato, se $x_0 \in \text{int}\, X$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset X$. Logo $B(x_0, r) \subset Y$ e, portanto, $x_0 \in \text{int}\, Y$.

- Com isso, podemos provar a observação 9.5 da seguinte maneira:

Seja $x_0 \in \text{int}\, X$. Então existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset X$.

Logo, pelo provado acima, $\text{int}(B(x_0, r)) \subset \text{int}\, X$, e, portanto, $B(x_0, r) \subset \text{int}\, X$, pois $B(x_0, r)$ é um conjunto aberto.

Observação 9.7. Uma bola fechada $B[a, r] \subset \mathbb{R}^n$ não é um conjunto aberto.

De fato, seja $x_0 \in S[a, r]$. Então, existe $u \in \mathbb{R}^n$ vetor unitário (de norma 1) tal que $x_0 = a + ru$.

Seja $\varepsilon > 0$ e tome $x = a + \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right) u$.

Então $\|x - x_0\| = \|a + ru - a - (r + \varepsilon/2)u\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ e $\|x - a\| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$, ou seja, $x \in B(x_0, \varepsilon)$, mas $x \notin B[a, r]$. Ou seja, se $x_0 \in S[a, r]$ então $x_0 \notin \text{int}\, B[a, r]$.

Portanto, $\text{int}\, B[a, r] = B(a, r)$, uma vez que $B(a, r) = \text{int}\, B(a, r) \subset \text{int}\, B[a, r]$.

Definição 9.5. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que a é *ponto fronteira de* X se, para todo $r > 0$, $B(a, r) \cap X \neq \varnothing$ e $B(a, r) \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \varnothing$.

O conjunto ∂X formado pelos pontos fronteira de X é chamado *fronteira de* X.

Observação 9.8. $\partial X = \partial(\mathbb{R}^n - X)$.

Observação 9.9. Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$, há três possibilidades que se excluem mutuamente:

$$a \in \text{int}\, X\,, \quad \text{ou} \quad x \in \text{int}(\mathbb{R}^n - X) \quad \text{ou} \quad x \in \partial X\,.$$

Ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \text{int}\, X \cup \text{int}(\mathbb{R}^n - X) \cup \partial X\,,$$

sendo $\text{int}\, X$, $\text{int}(\mathbb{R}^n - X)$ e ∂X dois a dois disjuntos.

Exemplo 9.1. Como $\mathbb{R}^n - B[a, r]$ é aberto e $\text{int}\, B[a, r] = B(a, r)$, temos que $\partial B[a, r] = S[a, r]$.

□

Exemplo 9.2. Como $\mathbb{R}^n - B[a,r]$ é aberto e $\mathbb{R}^n - B[a,r] \subset \mathbb{R}^n - B(a,r)$, temos que $\mathbb{R}^n - B[a,r] \subset \text{int}(\mathbb{R}^n - B(a,r))$. Logo,

$$\partial B(a,r) = \mathbb{R}^n - (\text{int}\, B(a,r) \cup \text{int}(\mathbb{R}^n - B(a,r))) = \mathbb{R}^n - (B(a,r) \cup \text{int}(\mathbb{R}^n - B(a,r))) \subset S[a,r]\,.$$

E se $x \in S[a,r]$, ou seja, $x = a + ru$, $\|u\| = 1$, então, para todo $0 < \varepsilon < r$,

$$x \in B(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n - B(a,r)) \quad \text{e} \quad y = a + (r - \varepsilon/2)u \in B(x,\varepsilon) \cap B(a,r),$$

pois $\|y - x\| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ e $\|y - a\| = r - \dfrac{\varepsilon}{2} < r$. Logo, $S[a,r] \subset \partial B(a,r)$. Assim, $\partial B(a,r) = S[a,r]$. □

Observação 9.10. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e só se, nenhum de seus pontos é ponto fronteira de A, ou seja, se, e só se, $A \cap \partial A = \varnothing$.

Teorema 9.1. *Os conjuntos abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ possuem as seguintes propriedades:*

(1) *$\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos;*

(2) *A intersecção $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \ldots, A_k$ é um conjunto aberto.*

(3) *A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.*

Prova.

(1) $\mathbb{R}^n$ é obviamente aberto, e $\varnothing$ é aberto, pois um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior.

(2) Seja $a \in A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$, ou seja, $a \in A_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Como cada A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(a,\delta_i) \subset A_i$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\} > 0$. Então $B(a,\delta) \subset A_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e, portanto, $B(a,\delta) \subset A$. Logo A é aberto.

(3) Seja $a \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subset A_{\lambda_0} \subset A$. Logo A é aberto. ■

Definição 9.6. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $A \subset X$ é *aberto em X* quando, para cada $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \cap X \subset A$.

Observação 9.11. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e só se, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = B \cap X$.

De fato, para cada $a \in A$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B(a,\delta_a) \cap X \subset A$. Tome $B = \displaystyle\bigcup_{a \in A} B(a,\delta_a)$.

Então B é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $B \cap X = A$.

Reciprocamente, se $A = B \cap X$, onde B é aberto em $\mathbb{R}^n$, dado $a \in A = B \cap X$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset B$. Logo $B(a, \delta) \cap X \subset B \cap X = A$. Portanto, A é aberto em X.

Observação 9.12. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $A \subset X$ é aberto em X se, e só se, A é aberto em $\mathbb{R}^n$.

De fato, se A é aberto em X, existe B aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $A = X \cap B$. Como X e B são abertos em $\mathbb{R}^n$, temos que A também é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se A é aberto em $\mathbb{R}^n$, então $A = A \cap X$ é aberto em X.

Exemplo 9.3. $A = (0, 1]$ é aberto em $X = [0, 1]$, pois $A = (0, 2) \cap [0, 1]$, onde $(0, 2)$ é aberto em $\mathbb{R}$. $\square$

Observação 9.13. Um resultado análogo ao do teorema 9.1 vale para os abertos em X:

(1) $\varnothing$ e X são abertos em X, pois $\varnothing = \varnothing \cap X$ e $X = \mathbb{R}^n \cap X$, com $\varnothing$ e X abertos em $\mathbb{R}^n$.

(2) Uma intersecção finita $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ de conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ abertos em X é um conjunto aberto em X, pois, para cada A_i, $i = 1, \ldots, k$, existe B_i aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $A_i = B_i \cap X$. Então $A = (B_1 \cap X) \cap \ldots \cap (B_k \cap X) = (B_1 \cap \ldots \cap B_k) \cap X$, onde $B_1 \cap \ldots \cap B_k$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ é aberto em X.

(3) Uma reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de abertos A_λ em X é um conjunto aberto em X, pois para cada A_λ, $\lambda \in L$, existe B_λ aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $A_\lambda = B_\lambda \cap X$. Então $A = \bigcup_{\lambda \in L} (B_\lambda \cap X) = \left(\bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda\right) \cap X$, onde $\bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto em X.

Teorema 9.2. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e só se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$, de todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, é um aberto em X.*

Prova.

($\Longrightarrow$) Seja $x_0 \in f^{-1}(A)$. Então $f(x_0) \in A$. Como A é aberto em $\mathbb{R}^n$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$, ou seja, $\|y - f(x_0)\| < \varepsilon \Longrightarrow y \in A$.

Sendo f contínua no ponto $x_0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Logo $f(X \cap B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset A$, e, portanto, $X \cap B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$. Provamos, assim, que $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

($\Longleftarrow$) Seja $x_0 \in X$ e seja $\varepsilon > 0$. Então, como por hipótese, $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ é aberto em X, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Logo, se $x \in X$ e $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, ou seja, f é contínua no ponto $x_0 \in X$. Como $x_0 \in X$ é arbitrário, f é contínua. $\blacksquare$

Observação 9.14. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ é contínua se, e só se, para todo conjunto $A \subset Y$ aberto em Y, $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

De fato, se $A \subset Y$ é aberto em Y, existe B aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $A = B \cap Y$. Como $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$ e f é contínua, temos, pelo teorema anterior que $f^{-1}(B) = f^{-1}(A)$ é aberto em X. Reciprocamente, se A é aberto em $\mathbb{R}^n$, então $A \cap Y$ é aberto em Y. Logo, por hipótese, $f^{-1}(A \cap Y) = f^{-1}(A)$ é aberto em X. Assim, pelo teorema anterior, f é contínua.

Observação 9.15. Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) < a\}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, pois $(-\infty, a)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Mais geralmente, se $f_1, \ldots, f_k : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$f_1^{-1}((-\infty, a_1)) \cap f_2^{-1}((-\infty, a_2)) \cap \ldots \cap f_k^{-1}((-\infty, a_k)) = \{\, x \in X \,|\, f_1(x) < a_1, f_2(x) < a_2, \ldots, f_k(x) < a_k \,\}$$

é um conjunto aberto em X, pois cada conjunto $f_i^{-1}\,(\,(-\infty, a_i)\,)$, $i = 1, \ldots, k$, é aberto em X.

Com isso, podemos provar novamente que a bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, pois

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - a\| < r\} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) < r \,\},$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por $f(x) = \|x - a\|$.

Observação 9.16. Se $A_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$ são abertos, então o produto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_k \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k}$ é aberto.

De fato, considerando as projeções $\pi_i : \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, que são aplicações contínuas, temos que

$$\pi_i^{-1}(A_i) = \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_{i-1}} \times A_i \times \mathbb{R}^{n_{i+1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k}\,,\ i = 1, \ldots, k$$

são conjuntos abertos. Logo,

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap \pi_k^{-1}(A_k)$$

é um conjunto aberto.

Definição 9.7. Dados $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é *uma aplicação aberta* quando para cada $A \subset X$ aberto em X, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto em Y.

Observação 9.17. As projeções $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são funções abertas.

De fato, considerando a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$, temos que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $a_i = \pi_i(a)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_M(a, \delta) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta) \subset A\,,$$

e, portanto, $\pi_i(B_M(a, \delta)) = (a_i - \delta, a_i + \delta) \subset \pi_i(A)$. Logo $\pi_i(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

10 Conjuntos fechados

Definição 10.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é *aderente* a X quando a é limite de uma sequência de pontos de X.

Observação 10.1. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X, pois $a = \lim x_k$, com $x_k = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas um ponto a pode ser aderente a X sem pertencer a X. Neste caso, $a \in X'$.

Logo a é aderente a X se, e só se, $a \in X$ ou $a \in X'$, ou seja, $a \in X \cup X'$.

Observação 10.2. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é aderente a $X \Longleftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$.

De fato, se $a \in \mathbb{R}^n$ é aderente a X, existe uma sequência (x_k) de pontos de X tal que $\lim x_k = a$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - a\| < \varepsilon$ para todo $k > k_0$, ou seja $x_k \in B(a, \varepsilon) \cap X$ para todo $k > k_0$. Logo $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing$.

Reciprocamente, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos, por hipótese, que existe $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap X$, ou seja, existe $x_k \in X$ com $\|x_k - a\| < \frac{1}{k}$.

Logo (x_k) é uma sequência de pontos de X que converge para a. Portanto, a é aderente a X.

Definição 10.2. O *fecho de X* é o conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos aderentes a X.

Observação 10.3. $\overline{X} = X \cup X'$ (ver observação 10.1).

Observação 10.4. $b \notin \overline{X} \Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0\,;\ B(b, \delta) \cap X = \varnothing \Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0\,;\ B(b, \delta) \subset \mathbb{R}^n - X \Longleftrightarrow$ $b \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^n - X)$.

Como $\mathbb{R}^n = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^n - X) \cup \partial X$ (união disjunta), temos que $\overline{X} = \operatorname{int} X \cup \partial X$.

- Em particular

$$\overline{B(a,r)} = \operatorname{int} B(a,r) \cup \partial B(a,r) = B(a,r) \cup S[a,r] = B[a,r]$$

e

$$\overline{B[a,r]} = \operatorname{int} B[a,r] \cup \partial B[a,r] = B(a,r) \cup S[a,r] = B[a,r].$$

Ou seja, $\overline{B(a,r)} = \overline{B[a,r]} = B[a,r]$.

Exemplo 10.1. Se $X = \mathbb{Q}^n$, então $\overline{X} = \mathbb{R}^n$, pois todo número real é o limite de uma sequência de números racionais, e, portanto, todo ponto $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é o limite de uma sequência de pontos de $\mathbb{Q}^n$. □

Observação 10.5. O conceito de ponto aderente a X pode ser reformulado com abertos, em vez de bolas:

- $a \in \overline{X} \iff$ para todo aberto A, contendo a, tem-se $A \cap X \neq \varnothing$.
- $b \notin \overline{X} \iff$ existe um aberto A com $b \in A$ e $A \cap X = \varnothing$.

Para provar a primeira afirmação, basta observar que toda bola aberta é um conjunto aberto, e que todo conjunto aberto A contendo a, contém também uma bola aberta de centro a.

Definição 10.3. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* quando contém todos os seus pontos aderentes, ou seja, quando $X = \overline{X}$.

Observação 10.6. $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\iff$ "se $\lim x_k = a$ e $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N} \implies a \in X$".

Exemplo 10.2. Toda bola fechada $B[a,r]$ é um conjunto fechado, pois, pela observação 10.4, $\overline{B[a,r]} = B[a,r]$.

Ou, mais diretamente, se (x_k) é uma sequência de pontos de $B[a,r]$, e $\lim x_k = b$, então $\|b-a\| \leq r$, pois $\|x_k - a\| \leq r$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\|b-a\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\|$. □

Observação 10.7. $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n \implies \overline{X} \subset \overline{Y}$.

De fato, se $a \in \overline{X}$, existe uma sequência (x_k) de pontos de X tal que $\lim x_k = a$. Como $X \subset Y$, (x_k) é uma sequência de pontos de Y com $\lim x_k = a$. Logo $a \in \overline{Y}$.

Observação 10.8. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $\overline{X}$ é limitado.

De fato, como X é limitado, existe $r > 0$ tal que $X \subset B[0,r]$. Logo $\overline{X} \subset \overline{B[0,r]} = B[0,r]$ e, portanto, $\overline{X}$ é limitado.

Proposição 10.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Então $\mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

Prova.
Seja $b \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$, ou seja, $b \notin \overline{X}$. Então existe $\delta > 0$ tal que $B(b,\delta) \cap X = \varnothing$. Seja $y \in B(b,\delta)$. Como $B(b,\delta)$ é um aberto que contém y tal que $B(b,\delta) \cap X = \varnothing$, temos, pela observação 10.5, que $y \notin \overline{X}$, ou seja, $y \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$. Logo $B(b,\delta) \subset \mathbb{R}^n - \overline{X}$, provando, assim, que $\mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto.
■

Teorema 10.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e só se, $\mathbb{R}^n - X$ é aberto.*

Prova.
($\implies$) Se X é fechado, então $X = \overline{X}$. Logo $\mathbb{R}^n - X = \mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathbb{R}^n - X$ é aberto e seja $a \notin X$, ou seja, $a \in \mathbb{R}^n - X$. Então existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset \mathbb{R}^n - X$. Logo $B(a, \delta) \cap X = \varnothing$, e, portanto, $a \notin \overline{X}$. Assim, todo ponto aderente a X deve pertencer a X. Então X é fechado. ■

Observação 10.9. $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n - A$ é fechado.

Corolário 10.1. *O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado. Ou seja,* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Teorema 10.2. *Os conjuntos fechados do espaço euclidiano possuem as seguintes propriedades:*

(1) $\varnothing$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são conjuntos fechados;*

(2) *A reunião* $F = F_1 \cup \ldots \cup F_k$ *de um número finito de conjuntos fechados* $F_1, \ldots, F_k$ *é um conjunto fechado;*

(3) *A intersecção* $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ *de uma família qualquer* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de conjuntos fechados* F_λ *é um conjunto fechado.*

Prova.

(1) $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos fechados, pois $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n - \varnothing$ e $\varnothing = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos.

(2) Se $F_1, \ldots, F_k$ são conjuntos fechados, então $\mathbb{R}^n - F_1, \ldots, \mathbb{R}^n - F_k$ são conjuntos abertos. Logo $(\mathbb{R}^n - F_1) \cap \ldots \cap (\mathbb{R}^n - F_k)$ é aberto.

Assim, $F = F_1 \cup \ldots \cup F_k$ é um conjunto fechado, pois

$$\mathbb{R}^n - F = \mathbb{R}^n - (F_1 \cup \ldots \cup F_k) = (\mathbb{R}^n - F_1) \cap \ldots \cap (\mathbb{R}^n - F_k)$$

é um conjunto aberto.

(3) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos fechados, então $(\mathbb{R}^n - F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos. Logo $\bigcup\limits_{\lambda \in L} (\mathbb{R}^n - F_\lambda)$ é um conjunto aberto. Assim, $F = \bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado, pois

$$\mathbb{R}^n - F = \mathbb{R}^n - \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R}^n - F_\lambda)$$

é um conjunto aberto. ■

Observação 10.10. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então o conjunto unitário $\{x\}$ é fechado. De fato, se $y \neq x$, $B\left(y, \dfrac{\|x - y\|}{2}\right) \cap \{x\} = \varnothing$ (pois $\|x - y\| > \|x - y\|/2$), ou seja, $B\left(y, \dfrac{\|x - y\|}{2}\right) \subset \mathbb{R}^n - \{x\}$. Logo, $\mathbb{R}^n - \{x\}$ é um conjunto aberto e, portanto, $\{x\}$ é um conjunto fechado.

Observação 10.11. Uma reunião infinita de conjuntos fechados pode ser um conjunto fechado ou não, pois todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é reunião de seus pontos: $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\}$. Como há conjuntos em $\mathbb{R}^n$ que não são fechados, há reuniões infinitas de conjuntos fechados que não são fechados

Observação 10.12. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ então $a \in \partial X$ se, e só se, $a \in \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.

Ou seja, $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$. Em particular, a fronteira de todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.

Definição 10.4. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que um conjunto $F \subset X$ é *fechado em* X quando F contém todos os seus pontos aderentes que pertencem a X, ou seja, quando $F = \overline{F} \cap X$.

Observação 10.13. $F \subset X$ é fechado em $X \iff$ existe $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado tal que $F = G \cap X$.

De fato, se F é fechado em X então $F = \overline{F} \cap X$, onde $G = \overline{F}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se $F = G \cap X$, com $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado, então $F \subset G$ e, portanto, $\overline{F} \subset \overline{G} = G$. Logo $F \subset \overline{F} \cap X \subset G \cap X = F$, ou seja, $F = \overline{F} \cap X$.

Exemplo 10.3. O intervalo $J = (0, 2]$ é fechado no intervalo $I = (0, 3]$, pois $J = [0, 2] \cap (0, 3]$ e $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ é fechado. Mas J não é fechado em $\mathbb{R}$. $\square$

Observação 10.14. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Então $F \subset X$ é fechado em X se, e só se, F é fechado em $\mathbb{R}^n$.

De fato, se F é fechado em X, existe $G \subset \mathbb{R}^n$ fechado tal que $F = G \cap X$. Como G e X são fechados em $\mathbb{R}^n$, temos que F é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se F é fechado em $\mathbb{R}^n$, então F é fechado em X, pois $F = F \cap X$. A recíproca é válida para todo $X \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 10.15. Os conjuntos fechados em X possuem propriedades análogas às demonstradas no teorema 10.2 para os conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$.:

(1) $\varnothing$ e X são fechados em X, pois $\varnothing = \varnothing \cap X$ e $X = \mathbb{R}^n \cap X$, onde $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são fechados em $\mathbb{R}^n$.

(2) Uma reunião finita de conjuntos $F_1, \ldots, F_k$ fechados em X é um conjunto fechado em X, pois, para cada $i = 1, \ldots, k$, $F_i = G_i \cap X$, onde G_i é fechado em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$F_1 \cup \ldots \cup F_k = (G_1 \cap X) \cup \ldots \cup (G_k \cap X) = (G_1 \cup \ldots \cup G_k) \cap X,$$

onde $G_1 \cup \ldots \cup G_k$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

(3) A intersecção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família arbitrária de conjuntos F_λ fechados em X é um conjunto fechado em X, pois, para cada $\lambda \in L$, $F_\lambda = G_\lambda \cap X$, com G_λ fechado em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (G_\lambda \cap X) = \left(\bigcap_{\lambda \in L} G_\lambda \right) \cap X\,,$$

onde $\bigcap_{\lambda \in L} G_\lambda$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Observação 10.16. Seja $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Então F é fechado em X se, e só se, $A = X - F$, o complementar de F em X, é aberto em X.

De fato, se F é fechado em X, então $F = G \cap X$, com G fechado em $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$X - F = X - (G \cap X) = X \cap (\,(\mathbb{R}^n - G) \cup (\mathbb{R}^n - X)\,) = X \cap (\mathbb{R}^n - G)$$

é aberto em X, pois $\mathbb{R}^n - G$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se $X - F$ é aberto em X, $X - F = A \cap X$, onde A é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Logo $F = (\mathbb{R}^n - A) \cap X$. Como $\mathbb{R}^n - A$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, F é fechado em X.

Teorema 10.3. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e só se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado em X.*

Prova.
($\Longrightarrow$) Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado em $\mathbb{R}^n$. Então $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, pelo teorema 9.2, $f^{-1}(A)$ é aberto em X. Mas, como $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^n - F) = X - f^{-1}(F)$, temos, pela observação anterior, que $f^{-1}(F)$ é fechado em X.

($\Longleftarrow$) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto em $\mathbb{R}^n$. Então $F = \mathbb{R}^n - A$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, e, por hipótese, $f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R}^n - A) = X - f^{-1}(A)$ é fechado em X. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em X, e pelo teorema 9.2, f é contínua. ■

Observação 10.17. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ é contínua se, e só se, para todo $F \subset Y$ fechado em Y, o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em X.

De fato, suponhamos f contínua e seja $F \subset Y$ fechado em Y. Então $F = F_0 \cap Y$, com F_0 fechado em $\mathbb{R}^n$. Como $f^{-1}(F) = f^{-1}(F_0)$, temos, pelo teorema 10.3, que $f^{-1}(F)$ é fechado em X.

Reciprocamente, seja $F_0 \subset \mathbb{R}^n$ fechado em $\mathbb{R}^n$. Então $F = F_0 \cap Y$ é fechado em Y e, por hipótese, $f^{-1}(F)$ é fechado em X. Mas, como $f^{-1}(F_0) = f^{-1}(F)$, temos que $f^{-1}(F_0)$ é fechado em X e, portanto, pelo teorema 10.3, f é contínua.

Observação 10.18. Se $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, então o conjunto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f_1(x) \leq a_1, \ldots, f_k(x) \leq a_k\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^n$, pois $F = f_1^{-1}((-\infty, a_1]) \cap \ldots \cap f_k^{-1}((-\infty, a_k])$ e $(-\infty, a_1], \ldots, (-\infty, a_k]$ são conjuntos fechados em $\mathbb{R}$.

Em particular, se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por $f(x) = \|x - a\|$ e r é um número real positivo, então $B[a, r] = f^{-1}((-\infty, r])$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Observação 10.19. Se $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $a_1, \ldots, a_k$ são números reais, então o conjunto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f_1(x) = a_1, \ldots, f_k(x) = a_k\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^n$, pois

$$F = f_1^{-1}(\{a_1\}) \cap \ldots \cap f_k^{-1}(\{a_k\}) \quad \text{e} \quad \{a_1\}, \ldots, \{a_k\}$$

são fechados em $\mathbb{R}$.

Em particular, se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua dada por $f(x) = \|x - a\|$, então $S[a, r] = f^{-1}(\{r\})$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Observação 10.20. Se $F_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, F_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$ são conjuntos fechados, então o produto cartesiano $F_1 \times \ldots \times F_k \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} = \mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_k}$ é fechado.

De fato, como as projeções $\pi_i : \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, dadas por $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$, são contínuas e

$$\pi_i^{-1}(F_i) = \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_{i-1}} \times F_i \times \mathbb{R}^{n_{i+1}} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

temos que $\pi_i^{-1}(F_i)$ é fechado para todo $i = 1, \ldots, k$ e, portanto,

$$F_1 \times \ldots \times F_k = \pi_1^{-1}(F_1) \cap \ldots \cap \pi_k^{-1}(F_k)$$

é fechado em $\mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_k}$.

Observação 10.21. Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então seu gráfico $G = \{\, (x, f(x)) \,|\, x \in X \,\}$ é um subconjunto fechado de $X \times \mathbb{R}^n$, pois, a aplicação $g : X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x, y) = y - f(x)$ é contínua e

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0\}) &= \{\, (x, y) \in X \times \mathbb{R}^n \,|\, g(x, y) = 0 \,\} = \{\, (x, y) \in X \times \mathbb{R}^n \,|\, y = f(x) \,\} \\ &= \{\, (x, f(x)) \,|\, x \in X \,\} = G \,. \end{aligned}$$

Em particular, se $X \subset \mathbb{R}^m$ é fechado, temos que G é fechado em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, pois $X \times \mathbb{R}^n$ é fechado em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Definição 10.5. Dizemos que uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ é *fechada* quando $f(F)$ é fechado em Y para todo $F \subset X$ fechado em X.

Exemplo 10.4. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, é contínua, mas não é fechada, pois $F = (-\infty, 1]$ é fechado em $\mathbb{R}$, mas $f(F) = (0, 1]$ não é fechado em $\mathbb{R}$. □

Exemplo 10.5. A projeção $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ não transforma necessariamente um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ num conjunto fechado $\pi_1(F) \subset \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, a hipérbole $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$, pois $\mathcal{H}$ é a imagem inversa do fechado $\{1\} \subset \mathbb{R}$ pela função contínua $(x, y) \longmapsto xy$, mas sua projeção no eixo das abscissas $\pi_1(\mathcal{H}) = \mathbb{R} - \{0\}$ não é fechada em $\mathbb{R}$. □

Definição 10.6. Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. O *fecho de Y relativamente a X* é o conjunto $\overline{Y}_X = \overline{Y} \cap X$ dos pontos aderentes a Y que pertencem ao conjunto X.

Observação 10.22. $Y \subset X$ é fechado em X se, e só se, $\overline{Y}_X = Y$, ou seja, se, e só se, $Y = \overline{Y} \cap X$.

De fato, se $Y = \overline{Y} \cap X$, temos que Y é fechado em X, pois $\overline{Y}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, se Y é fechado em X, então $Y = G \cap X$, G fechado em $\mathbb{R}^n$. Logo $Y \subset G$ e, portanto, $\overline{Y} \subset \overline{G} = G$. Assim, $Y \subset \overline{Y} \cap X \subset G \cap X = Y$, ou seja, $Y = \overline{Y} \cap X = \overline{Y}_X$.

Definição 10.7. Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que *$Y$ é denso em X* quando $\overline{Y}_X = \overline{Y} \cap X = X$, isto é, quando o fecho de Y relativamente a X é todo o conjunto X.

Observação 10.23. $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ é denso em $X \iff X \subset \overline{Y} \iff$ todo ponto de X é limite de uma sequência de pontos de $Y \iff$ toda bola aberta com centro em algum ponto de X contém pontos de Y.

Proposição 10.2. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas e $Y \subset X$ um subconjunto denso em X. Se $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, ou seja, $f = g$.*

Prova.

Seja $x \in X$. Então existe uma sequência (y_k) de pontos de Y tal que $\lim y_k = x$.

Logo $f(x) = \lim f(y_k) = \lim g(y_k) = g(x)$. ■

Proposição 10.3. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ contém um subconjunto enumerável E denso em X.*

Prova.

A coleção $\mathcal{B}$ das bolas abertas $B(q, r)$ com centro num ponto $q \in \mathbb{Q}^n$ e raio $r > 0$ racional, com $B(q, r) \cap X \neq \varnothing$, é enumerável. Seja $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathcal{B}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto $x_i \in B_i \cap X$. O conjunto E dos pontos x_i, assim obtidos, é um subconjunto enumerável de X.

Para mostrar que E é denso em X, basta verificar que $B(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$ para todo $x_0 \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$.

Seja $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r < \frac{\varepsilon}{2}$, e seja $q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $\|q - x_0\| < r$. Então $x_0 \in B(q,r) \cap X$ e, portanto, $B(q,r) \cap X \neq \varnothing$, ou seja, $B(q,r) = B_i$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Existe, então, $x_i \in B_i \cap E$.

Logo $\|x_i - x_0\| \leq \|x_i - q\| + \|q - x_0\| < 2r < \varepsilon$, ou seja, $x_i \in B(x_0, \varepsilon) \cap E$. ■

Observação 10.24. E é finito $\Longleftrightarrow$ X é finito. Neste caso, $E = X$. De fato, se E é finito, então $\overline{E} = E$ e, portanto, $X = \overline{E_X} = \overline{E} \cap X = E$.

Reciprocamente, se X é finito, então E é finito, pois $E \subset X$.

11 Conjuntos Compactos

Definição 11.1. Dizemos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* quando ele é limitado e fechado.

Exemplo 11.1. As bolas fechadas, as esferas e os conjuntos finitos de $\mathbb{R}^n$ são conjuntos compactos. □

Exemplo 11.2. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, não é compacto, pois não é limitado.□

Observação 11.1. $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\Longleftrightarrow$ toda sequência (x_k) de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

De fato, se K é compacto e (x_k) é uma sequência de pontos de K, então (x_k) é uma sequência limitada, pois K é limitado.

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ converge. Mais ainda, $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} x_k \in K$, pois K é fechado.

Reciprocamente, suponhamos que K não é limitado Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in K$ tal que $\|x_k\| \geq k$. Logo (x_k) é uma sequência de pontos de K que não possui uma subsequência convergente, pois toda subsequência de (x_k) é ilimitada, o que contradiz a hipótese.

Assim, K é limitado.

Suponhamos agora que K não é fechado.

Então existe $\overline{x} \in \overline{K} - K$. Como $\overline{x} \in \overline{K}$, existe uma sequência (x_k) de pontos de K tal que $\lim x_k = \overline{x}$. Logo, (x_k) é uma sequência de pontos de K tal que toda subsequência converge para $\overline{x} \notin K$, o que contradiz a hipótese. Assim, K é fechado.

Observação 11.2. $K_1, \ldots, K_p$ compactos em $\mathbb{R}^n \Longrightarrow K_1 \cup \ldots \cup K_p$ compacto.

Observação 11.3. A intersecção de uma família qualquer de compactos $K_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in L$, é um conjunto compacto.

Observação 11.4. $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, K_p \subset \mathbb{R}^{n_p}$ compactos $\Longrightarrow K_1 \times \ldots \times K_p \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_p}$ é compacto.

De fato, $K_1 \times \ldots \times K_p$ é fechado em $\mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_p}$, pois cada K_i é fechado em $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, p$.

Sendo cada K_i limitado, existe $r_i > 0$ tal que $\|x\|_S \leq r_i$ para todo $x \in K_i$, $i = 1, \ldots, p$.

Logo $\|(x_1, \ldots, x_p)\|_S \leq \|x_1\|_S + \ldots + \|x_p\|_S \leq r_1 + \ldots + r_p$ para todo $(x_1, \ldots, x_p) \in K_1 \times \ldots \times K_p$, ou seja, $K_1 \times \ldots \times K_p$ é limitado.

Teorema 11.1. *(Propriedade de Cantor)*

Se $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_k \supset \ldots$ *é uma sequência decrescente de compactos não-vazios, então a intersecção* $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$ *é um conjunto compacto não-vazio.*

Prova.
Pela observação 11.3, temos que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$ é compacto. Basta, então, mostrar que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k \neq \varnothing$. Para isso, tome $x_k \in K_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como $x_k \in K_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto $x \in K_1$.

Além disso, dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $x_{k_i} \in K_k$ para todo $k_i > k$. Logo $x = \lim_{i \in \mathbb{N}} x_{k_i} \in K_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$. ■

Teorema 11.2. *Seja* $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma aplicação contínua. Se* $K \subset X$ *é compacto então* $f(K)$ *é compacto.*

Prova.
Seja (y_k) uma sequência de pontos de $f(K)$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in K$ tal que $y_k = f(x_k)$.

Como (x_k) é uma sequência de pontos de K e K é compacto, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto $x \in K$.

Assim, sendo f é contínua, temos que $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{k_i}) = f(x)$, ou seja, $(f(x_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de (y_k) que converge para um ponto $f(x) \in f(K)$.

Logo, pela observação 11.1, $f(K)$ é compacto. ■

Observação 11.5.

• Uma aplicação contínua pode transformar um conjunto limitado num conjunto ilimitado.

Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ leva o intervalo limitado $(0, 1)$ no intervalo ilimitado $(1, +\infty)$.

• E, também, uma aplicação contínua pode transformar um conjunto fechado num conjunto que não é fechado.

Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ transforma $\mathbb{R}$, fechado, no intervalo $(0, 1)$ que não é fechado.

Corolário 11.1. *(Weierstrass)*

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Toda função real contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ atinge seu valor máximo e seu valor mínimo em pontos de K, isto é, existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ para todo } x \in K.$$

Prova.

Como f é contínua e K é compacto, $f(K)$ é compacto em $\mathbb{R}$.

Sejam $m = \inf\{f(x) \,|\, x \in K\}$ e $M = \sup\{f(x) \,|\, x \in K\}$. Então existem sequências (x_k) e (y_k) de pontos de K tais que $f(x_k) \longrightarrow m$ e $f(y_k) \longrightarrow M$.

Como K é compacto, existem $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ infinitos, $x_0, x_1 \in K$, tais que $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} x_k = x_0$ e $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}''} y_k = x_1$. Então $m = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} f(x_k) = f(x_0)$ e $M = \lim\limits_{k\in\mathbb{N}''} f(y_k) = f(x_1)$.

Portanto, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$. ■

Exemplo 11.3. A função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, tem imagem $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Portanto, nenhum valor $f(x)$ é menor nem maior do que todos os demais valores de f. Neste exemplo, o domínio $\mathbb{R}$ é fechado mas não é limitado. □

Observação 11.6. Toda aplicação contínua $f : K \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num compacto K é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c$ para todo $x \in K$.

Observação 11.7. Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, então existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$.

Se K não é compacto, pode não existir $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$.

Por exemplo, a função $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é contínua e positiva, mas $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$.

Corolário 11.2. *Toda aplicação contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ é fechada, isto é, $F \subset K$ fechado em $K \Longrightarrow f(F)$ fechado em $\mathbb{R}^n$.*

Prova.
Seja $F \subset K$ fechado em K. Como K é fechado em $\mathbb{R}^n$, temos que F é fechado em $\mathbb{R}^n$. Além disso, como K é limitado e $F \subset K$, temos que F é limitado. Portanto, F é compacto. Logo $f(F)$ é compacto, uma vez que f é contínua. Assim, $f(F)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$. ■

Corolário 11.3. *Toda bijeção contínua $f : K \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^n$ definida num compacto K é um homeomorfismo sobre sua imagem.*

Prova.
Seja $f : K \longrightarrow L$ uma bijeção contínua. Como K é compacto, $f(K) = L$ é compacto.

Seja $g = f^{-1} : L \longrightarrow K$ e seja $F \subset K$ fechado em K. Então $g^{-1}(F) = f(F)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ pelo corolário 11.2 e, portanto, $g^{-1}(F)$ é fechado em L. Logo, pela observação 10.17, $g : L \longrightarrow K$ é contínua e, portanto, $f : K \longrightarrow L$ é um homeomorfismo. ■

Corolário 11.4. *Seja $f : K \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow L$ uma aplicação contínua do compacto K sobre o conjunto (necessariamente compacto) $L = f(K)$. Dado $F \subset L$, se sua imagem inversa $f^{-1}(F)$ é fechada, então F é fechado.*

Prova.
Como f é sobrejetora e $F \subset L$, temos que $f(f^{-1}(F)) = F$. Portanto, pelo corolário 11.2, F é fechado. ■

Corolário 11.5. *Seja $\varphi : K \longrightarrow L$ uma aplicação contínua do compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ sobre o compacto $L \subset \mathbb{R}^n$. Então uma aplicação $f : L \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua se, e só se, $f \circ \varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua.*

Prova.
($\Longrightarrow$) É evidente.

($\Longleftarrow$) Suponhamos $f \circ \varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ contínua e seja $F \subset \mathbb{R}^p$ fechado. Então o conjunto $\varphi^{-1}(f^{-1}(F)) = (f \circ \varphi)^{-1}(F)$ é fechado em K. Logo, pelo corolário 11.4, $f^{-1}(F)$ é fechado em L. Assim, pelo teorema 10.3, $f : L \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua. ■

Aplicação: Seja $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua com $g(0) = g(2\pi)$. E seja a aplicação $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(e^{it}) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = g(t)$, que está bem definida, pois $g(0) = g(2\pi)$.

Como a aplicação $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$, dada por $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é contínua do compacto $[0, 2\pi]$ sobre o compacto S^1 e $f \circ \varphi = g$ é contínua, temos, pelo corolário anterior, que a aplicação $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Teorema 11.3. *Se $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $K \subset X$ é compacto, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in X$, $y \in K$, $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Prova.
Suponhamos, por absurdo, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos obter $x_\delta \in X$ e $y_\delta \in K$ tais que $\|x_\delta - y_\delta\| < \delta$ e $\|f(x_\delta) - f(y_\delta)\| > \varepsilon_0$.

Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k \in X$ e $y_k \in K$ tais que $\|x_k - y_k\| < \dfrac{1}{k}$ e $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0$.

Como (y_k) é uma sequência de pontos do compacto K, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ converge para um ponto $x \in K$. Logo $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ converge, também, para x e, portanto, pela continuidade de f, $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} \|f(x_k) - f(y_k)\| = \|f(x) - f(x)\| = 0$, o que é uma contradição, pois $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Observação 11.8. Toda aplicação contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ é uniformemente contínua.

Teorema 11.4. *Seja $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, onde K é compacto, e seja $x_0 \in X$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x, y) - f(x_0, y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in K$.*

Prova.
Suponhamos, por absurdo, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, podemos obter $x_\delta \in X$ e $y_\delta \in K$ tais que $\|x_\delta - x_0\| < \delta$ e $\|f(x_\delta, y_\delta) - f(x_0, y_\delta)\| \geq \varepsilon_0$.

Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k \in X$ e $y_k \in K$ tais que

$$\|x_k - x_0\| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \|f(x_k, y_k) - f(x_0, y_k)\| \geq \varepsilon_0.$$

Como $x_k \longrightarrow x_0$ e (y_k) possui uma subsequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ que converge para um ponto $y_0 \in K$, temos, pela continuidade de f, que $f(x_k, y_k) \underset{k\,\in\,\mathbb{N}'}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$ e $f(x_0, y_k) \underset{k\,\in\,\mathbb{N}'}{\longrightarrow} f(x_0, y_0)$. Logo,

$$\varepsilon_0 \leq \lim_{k\in\mathbb{N}'} \|f(x_k, y_k) - f(x_0, y_k)\| = 0\,,$$

o que é uma contradição. ■

Aplicação: Seja $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Definimos $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $x \in X$, por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt\,.$$

Então φ é contínua em todo ponto $x_0 \in X$. De fato, pelo teorema anterior, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in X$ e $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x, t) - f(x_0, t)\| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ para todo $t \in [a, b]$. Logo,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|\, dt \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \times (b - a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Definição 11.2. Uma *cobertura* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Uma *subcobertura* de uma cobertura $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, para a qual ainda se tem $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Dizemos que a cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ é

- *aberta*, quando os C_λ são todos conjuntos abertos;
- *finita*, se L é um conjunto finito;
- *enumerável*, se L é um conjunto enumerável.

Teorema 11.5. *(Lindelöf)*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ possui uma subcobertura enumerável $X \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k} \cup \ldots$

Prova.

Se $E = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\} \subset X$ é um subconjunto enumerável denso em X e $\mathcal{B}$ é a coleção de todas as bolas abertas $B(x, r)$, com $x \in E$ e $r \in \mathbb{Q}^+$, tais que cada uma delas está contida em algum A_λ, então $\mathcal{B}$ é um conjunto enumerável de bolas abertas.

Afirmação: $X \subset \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$.

Dado $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $r > 0$ racional tal que $B(x, 2r) \subset A_\lambda$, e sendo E denso em X, existe $x_i \in E$ tal que $\|x - x_i\| < r$, ou seja, $x \in B(x_i, r)$.

Se $y \in B(x_i, r)$, temos que $\|y - x_i\| < r \Longrightarrow \|y - x\| \le \|y - x_i\| + \|x_i - x\| < 2r$. Logo $y \in B(x, 2r) \subset A_\lambda$. Ou seja, $B(x_i, r) \in \mathcal{B}$.

Tomando uma enumeração $\{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$ de $\mathcal{B}$, e escolhendo para cada $i \in \mathbb{N}$, um índice $\lambda_i \in L$ tal que $B_i \subset A_{\lambda_i}$, temos que $X \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{\lambda_k}$. ■

Teorema 11.6. *(Borel-Lebesgue)*

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto. Então toda cobertura aberta* $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *possui uma subcobertura finita* $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k}$.

Prova.

Pelo teorema de Lindelöf, podemos obter uma subcobertura enumerável $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k} \cup \ldots$.

Seja $K_i = K \cap (\mathbb{R}^n - (A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_i}))$, $i \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}^n - (A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_i})$ é fechado e K é compacto, temos que cada K_i é compacto. Além disso, $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_k \supset \ldots$ é uma sequência decrescente, pois $\mathbb{R}^n - (A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_{i+1}}) \subset \mathbb{R}^n - (A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_i})$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado $x \in K$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{i_0}$. Logo $x \notin K_j$, para todo $j \geq i_0$. Portanto, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \varnothing$.

Assim, pela propriedade de Cantor, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{j_0} = \varnothing$, ou seja, $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_{j_0}}$. ■

Teorema 11.7. *Se toda cobertura aberta do conjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *possui uma subcobertura finita, então* K *é compacto, ou seja,* K *é limitado e fechado.*

Prova.

As bolas abertas de raio 1 centradas em pontos de K constituem uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$, que, por hipótese, possui uma subcobertura finita $K \subset B(x_1, 1) \cup \ldots \cup B(x_k, 1)$.
Assim, K é limitado por estar contido numa reunião finita de conjuntos limitados.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n - K$. Então, para todo $x \in K$, temos que $r_x = \|x - x_0\| > 0$ e $K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

Por hipótese, existem $x_1, \ldots, x_k \in K$ tais que $K \subset B\left(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(x_k, \frac{r_{x_k}}{2}\right)$.

Seja $r = \min\left\{\frac{r_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{r_{x_k}}{2}\right\} > 0$.

Então $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n - K$, pois se $y \in B(x_0, r) \cap K$, existiria $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $y \in B\left(x_j, \frac{r_{x_j}}{2}\right)$ e, portanto,

$$r_{x_j} = \|x_j - x_0\| \leq \|x_0 - y\| + \|y - x_j\| < r + \frac{r_{x_j}}{2} \leq r_{x_j},$$

ou seja, $r_{x_j} < r_{x_j}$, uma contradição.

Provamos, assim, que se $x_0 \in \mathbb{R}^n - K$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n - K$. Logo $\mathbb{R}^n - K$ é aberto, e, portanto, K é fechado. ■

Observação 11.9. Os teoremas 11.6 e 11.7 mostram que poderíamos ter definido um conjunto compacto K pela condição de que toda cobertura aberta $K \subset \bigcup A_\lambda$ possui uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k}$.

Corolário 11.6. *Se o aberto U contém a intersecção $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ de uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_i \supset \ldots$ de conjuntos compactos, então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{i_0} \subset U$.*

Prova.
Como $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset U$, temos que $\mathbb{R}^n - U \subset \mathbb{R}^n - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n - K_i)$. Logo os abertos $U_i = \mathbb{R}^n - K_i$, juntamente com U, constituem uma cobertura aberta de K_1, da qual podemos extrair uma subcobertura finita $K_1 \subset U \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_p}$.

Seja $i = \max\{i_1, \ldots, i_p\}$. Como $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ temos que $U_i = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_p}$. Logo $K_1 \subset U \cup U_i$ e, portanto, $K_i \subset U \cup U_i$. Mas, como $K_i \cap U_i = \varnothing$, temos que $K_i \subset U$, como queríamos provar. ■

• O nosso objetivo, agora, é demonstrar o *teorema de Baire*. Mas antes precisamos dar algumas definições e provar alguns resultados preliminares.

Definição 11.3. Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x_0 \in Y$ é um *ponto interior de Y em X* quando existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \cap X \subset Y$.

O *interior de Y em X* é o conjunto $\text{int}_X Y$ formado pelos pontos interiores de Y em X.

Observação 11.10. $Y \subset X$ é aberto em $X \iff \text{int}_X Y = Y$.

De fato, se $Y \subset X$ é aberto em X, existe $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $Y = A \cap X$. Logo, dado $y_0 \in Y$, existe $\delta > 0$ tal que $B(y_0, \delta) \subset A$, e, portanto, $B(y_0, \delta) \cap X \subset A \cap X = Y$. Então $x_0 \in \text{int}_X Y$.

Reciprocamente, se $\text{int}_X Y = Y$, dado $y \in Y$, existe $\delta_y > 0$ tal que $B(y, \delta_y) \cap X \subset Y$.

Logo $Y = \left(\bigcup_{y\in Y} B(y, \delta_y) \right) \cap X$, onde $\bigcup_{y\in Y} B(y, \delta_y)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Assim, Y é aberto em X.

Definição 11.4. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *completo* quando toda sequência de Cauchy (x_k) de pontos de X converge para um ponto $x \in X$.

Observação 11.11. $X \subset \mathbb{R}^n$ é completo $\iff$ X é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Definição 11.5. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é *magro* em Y se existe uma sequência $F_1, \ldots, F_k, \ldots$ de subconjuntos de Y fechados com interior vazio em Y tal que $X \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$

Observação 11.12. Todo subconjunto de um conjunto magro em Y é também magro em Y.

Observação 11.13. Toda reunião enumerável de conjuntos magros em Y é ainda um conjunto magro em Y.

Observação 11.14. Nem sempre um conjunto magro em Y tem interior vazio em Y.

Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é magro em $\mathbb{Q}$, pois $\mathbb{Q}$ é a reunião enumerável $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$, onde $\{x\}$ é fechado e $\text{int}_{\mathbb{Q}}\{x\} = \varnothing$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Mas, $\text{int}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

Entretanto, $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$ e $\text{int}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \varnothing$.

Isto ocorre apenas porque $\mathbb{Q}$ não é completo (fechado) em $\mathbb{R}$, conforme resulta do *teorema de Baire* a seguir.

Observação 11.15. O conjunto unitário $\{x\} \subset Y$ tem interior vazio em Y se, e só se, x não é isolado em Y.

De fato,

$$\begin{aligned} \{x\} \text{ tem interior vazio em } Y &\iff x \notin \text{int}_Y\{x\} \iff \forall\,\delta > 0\,,\ B(x,\delta)\cap Y \not\subset \{x\} \\ &\iff \forall\delta > 0\,,\ B(x,\delta)\cap Y \neq \{x\} \iff x \text{ não é isolado em } Y\,. \end{aligned}$$

Observação 11.16. Seja $X \subset Y$. Então $\text{int}_Y X = \varnothing \iff Y - X$ é denso em Y.

De fato, $\text{int}_Y X = \varnothing \iff B(x,\delta)\cap Y \not\subset X$ para todo $x \in X$ e $\delta > 0 \iff B(y,\delta)\cap(Y - X) \neq \varnothing$ para todo $y \in Y$ e $\delta > 0 \iff Y - X$ é denso em Y.

Teorema 11.8. *(Baire)*

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Todo conjunto magro em Y tem interior vazio em Y.

Equivalentemente, se $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, onde F_i é fechado e tem interior vazio em Y, então $\text{int}_Y F = \varnothing$.

Ou então: toda interseção enumerável de abertos densos em Y é um subconjunto denso em Y.

Prova.

Sejam $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ subconjuntos abertos e densos em Y.

Para provar que $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ é denso em Y, basta mostrar que $B(x,\delta)\cap A \neq \varnothing$ para todo $x \in Y$ e todo $\delta > 0$.

Seja $B_1 = B(x,\delta)$ a bola aberta de centro $x \in Y$ e raio $\delta > 0$.

Como A_1 é aberto e denso em Y, $A_1 \cap B_1$ é não-vazio e aberto em Y. Então existe uma bola aberta B_2 de raio $< \frac{1}{2}$ tal que $B_2 \cap Y \neq \varnothing$ e $\overline{B_2} \cap Y \subset A_1 \cap B_1 \quad (\Longrightarrow \overline{B_2} \cap Y \subset \overline{B_1} \cap Y)$.

Por sua vez, sendo A_2 aberto e denso em Y, $A_2 \cap B_2$ é não-vazio e aberto em Y. Logo existe uma bola aberta B_3 de raio $< \frac{1}{3}$ tal que $B_3 \cap Y \neq \varnothing$ e $\overline{B_3} \cap Y \subset A_2 \cap B_2 \quad (\Longrightarrow \overline{B_3} \cap Y \subset \overline{B_2} \cap Y)$.

Prosseguindo desta maneira, obtemos uma sequência de bolas fechadas $\overline{B_i}$ de raio $r_i < \frac{1}{i}$, $i \geq 2$, tais que:

$$\overline{B_1} \cap Y \supset \overline{B_2} \cap Y \supset \ldots \supset \overline{B_i} \cap Y \supset \ldots; \quad \overline{B_{i+1}} \cap Y \subset A_i \cap B_i \text{ e } B_i \cap Y \neq \varnothing \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Sendo a bola fechada um conjunto compacto, temos, pelo teorema 11.1, que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\overline{B_i} \cap Y) \neq \varnothing$.

Como o raio r_i da bola $\overline{B_i}$ é menor do que $\frac{1}{i}$, $i \geq 2$, temos que se $a, b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\overline{B_i} \cap Y)$, então $\|a - b\| \leq \frac{2}{i}$ para todo $i \geq 2$, e, portanto, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\overline{B_i} \cap Y) = \{a\}$ é um conjunto unitário.

Além disso, como $\overline{B_{i+1}} \cap Y \subset A_i \cap B_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $a \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e $a \in B_1$.

Logo $a \in A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e $a \in B_1$, ou seja, $A \cap B_1 \neq \varnothing$, como queríamos provar. ■

Corolário 11.7. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Se $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, onde cada F_i é fechado em F (e, portanto em $\mathbb{R}^n$), então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_F F_{i_0} \neq \varnothing$.*

Prova.

Se $\operatorname{int}_F F_i = \varnothing$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos, pelo teorema de Baire, que $\operatorname{int}_F F = \varnothing$, o que é uma contradição, pois $\operatorname{int}_F F = F$. ■

Corolário 11.8. *Todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado enumerável possui um ponto isolado.*

Prova.

Como $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$, $F = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$, temos que F é uma reunião enumerável de conjuntos fechados. Então, pelo corolário 11.7, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_F \{x_{i_0}\} \neq \varnothing$.

Ou seja, x_{i_0} é um ponto isolado de F. ■

Exemplo 11.4. O espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, não é enumerável. □

Exemplo 11.5. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é uma interseção enumerável $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ de conjuntos abertos da reta, pois, caso contrário, cada A_i seria denso em $\mathbb{R}$. Então, o conjunto

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais seria uma reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ seria magro em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{Q}$ é magro em $\mathbb{R}$, teríamos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ seria magro em $\mathbb{R}$, e, pelo teorema de Baire, teria interior vazio em $\mathbb{R}$, uma contradição. $\square$

Definição 11.6. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *perfeito* quando é fechado e todo ponto de X é ponto de acumulação de X, ou seja, quando X é fechado e não possui pontos isolados.

Observação 11.17. X é perfeito $\Longleftrightarrow X = \overline{X} = X \cup X'$ e $X \subset X' \Longleftrightarrow X' = X$.

Corolário 11.9. *Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ perfeito não-vazio é infinito não-enumerável.*

Exemplo 11.6. O conjunto de Cantor K é fechado, sem pontos isolados e com interior vazio (ver *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima). Logo K é magro e perfeito e, portanto, infinito não-enumerável. $\square$

12 Distância entre dois conjuntos; diâmetro de um conjunto

Definição 12.1. Sejam $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos não-vazios. Definimos a *distância* $d(S,T)$ entre S e T por:

$$d(S,T) = \inf\{\, \|x-y\| \mid x \in S \text{ e } y \in T \,\}$$

Observação 12.1.

- $d(S,T) = d(T,S)$;
- $S \cap T \neq \varnothing \Longrightarrow d(S,T) = 0$;
- $S_1 \subset S_2$ e $T_1 \subset T_2 \Longrightarrow d(S_2,T_2) \leq d(S_1,T_1)$.

Observação 12.2. A distância $d(S,T)$ é caracterizada pelas duas propriedades abaixo:

(1) $d(S,T) \leq \|x-y\|$ para $x \in S$ e $y \in T$ arbitrários;

(2) Dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in S$ e $y \in T$ tais que $\|x-y\| < d(S,T) + \varepsilon$.

Um caso particular de distância entre dois conjuntos ocorre quando um deles consiste de um único ponto.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $T \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio, temos:

$$d(x,T) = \inf\{\, \|x-y\| \mid y \in T \,\}.$$

Observação 12.3.

- $x \in T \Longrightarrow d(x,T) = 0$;
- $T_1 \subset T_2 \Longrightarrow d(x,T_2) \leq d(x,T_1)$;
- A distância $d(x,T)$ é caracterizada pelas propriedades:

  (1) $d(x,T) \leq \|x-y\|$ para todo $y \in T$;

  (2) Dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in T$ tal que $\|x-y\| < d(x,T)+\varepsilon$.

Observação 12.4.

- $d(x,T) = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists y \in T$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon \iff \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists y \in T$ tal que $y \in B(x,\varepsilon) \iff x \in \overline{T}$.
- Em particular, se $T \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, temos que $d(x,T) = 0 \iff x \in T$.

Observação 12.5. Como $\partial T = \overline{T} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - T)}$, $x \in \partial T \iff d(x,T) = d(x,\mathbb{R}^n - T) = 0$.

Teorema 12.1. $d(S,T) = d(\overline{S},\overline{T})$.

Prova.
Como $S \subset \overline{S}$ e $T \subset \overline{T}$, temos que $d(\overline{S},\overline{T}) \leq d(S,T)$.

Sejam $\overline{x} \in \overline{S}$ e $\overline{y} \in \overline{T}$. Então existem sequências (x_k) de pontos de S e (y_k) de pontos de T tais que $\lim x_k = \overline{x}$ e $\lim y_k = \overline{y}$.

Como $\|x_k - y_k\| \longrightarrow \|\overline{x}-\overline{y}\|$ e $d(S,T) \leq \|x_k - y_k\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $d(S,T) \leq \|\overline{x}-\overline{y}\|$.

Logo $d(S,T)$ é uma cota inferior do conjunto $\{\,\|\overline{x}-\overline{y}\| \mid \overline{x} \in \overline{S}$ e $\overline{y} \in \overline{T}\,\}$ e, portanto $d(S,T) \leq d(\overline{S},\overline{T})$.

Assim, $d(S,T) = d(\overline{S},\overline{T})$. ■

Corolário 12.1. $d(x,T) = d(x,\overline{T})$.

Teorema 12.2. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $d(K,F) = \|x_0 - y_0\|$.*

Em particular, $d(K,F) = 0$ se, e só se, $K \cap F \neq \varnothing$.

Prova.
Como $d(K,F) = \inf\{\,\|x-y\| \mid x \in K$ e $y \in F\}$ existem sequências (x_k) de pontos de K e (y_k) de pontos de F tais que $d(K,F) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$.

Como as sequências (x_k) e $(\|x_k - y_k\|)$ são limitadas (pois os seus termos x_k pertencerem ao compacto K e $(\|x_k - y_k\|)$ é uma sequência convergente) resulta da desigualdade

$$\|y_k\| \leq \|y_k - x_k\| + \|x_k\|\,,$$

que a sequência (y_k) também é limitada. Então existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} x_k = x_0$ e $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} y_k = y_0$.

Sendo K e F fechados, temos que $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$.

Assim, $d(K, F) = \lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} \|x_k - y_k\| = \|x_0 - y_0\|$. ■

Corolário 12.2. *Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então existe $y_0 \in F$ tal que $d(x, F) = \|x - y_0\|$.*

Corolário 12.3. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $K \subset U$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in K \Longrightarrow B(x, \delta) \subset U$, para todo $x \in K$. Em particular,*

$$x \in K\,,\ y \in \mathbb{R}^n\,,\ \|x - y\| < \delta \Longrightarrow [x, y] \subset U\,.$$

Prova.

Seja $F = \mathbb{R}^n - U$. Como F é fechado e $F \cap K = \varnothing$, temos, pelo Teorema 12.2, que $d(F, K) = \delta > 0$.

Sejam $x \in K$ e $y \in B(x, \delta)$. Então $\|x - y\| < \delta$, e, portanto, $y \notin F$, ou seja, $y \in U$.

Logo $B(x, \delta) \subset U$ para todo $x \in K$.

Em particular, se $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n$ são tais que $\|x - y\| < \delta$, então, para todo $t \in [0, 1]$, temos:

$$\|(1 - t)x + ty - x\| = \|t(x - y)\| \leq \|x - y\| < \delta\,,$$

ou seja, $(1 - t)x + ty \in B(x, \delta) \subset U$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo $[x, y] \subset U$. ■

Corolário 12.4. *Sejam $S, T \subset \mathbb{R}^n$, com S limitado. Então, existem $x_0 \in \overline{S}$ e $y_0 \in \overline{T}$ tais que $d(S, T) = \|x_0 - y_0\|$.*

Prova.

Como $\overline{S}$ é compacto, $\overline{T}$ é fechado e $d(S, T) = d(\overline{S}, \overline{T})$, temos, pelo teorema 12.2, que existem $x_0 \in \overline{S}$ e $y_0 \in \overline{T}$ tais que $d(S, T) = d(\overline{S}, \overline{T}) = \|x_0 - y_0\|$. ■

Observação 12.6.

- Em geral, dados um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, podem existir muitos pontos de F que estão a uma distância mínima do ponto x. Por exemplo, se $F = S[a, r]$, então $d(a, F) = \|a - x\|$ para todo $x \in F$.

- Mas, quando F é fechado e convexo e a norma de $\mathbb{R}^n$ provém de um produto interno, existe, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, um único $y_0 \in F$ tal que $d(x, F) = \|x - y_0\|$.

De fato, sejam $x_0, y_0 \in F$ tais que $d(x,F) = \|x - x_0\| = \|x - y_0\|$. Então, tomando $z_0 = \dfrac{x_0 + y_0}{2}$, temos que $z_0 \in F$, pois F é convexo, e, portanto,

$$d(x,F) \le \|x - z_0\| = \left\| \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x_0}{2} - \frac{y_0}{2} \right\| \le \frac{\|x - x_0\|}{2} + \frac{\|x - y_0\|}{2} = d(x,F)\,,$$

ou seja,

$$d(x,F) = \|x - z_0\| = \frac{\|x - x_0\|}{2} + \frac{\|x - y_0\|}{2}\,.$$

Como a norma considerada em $\mathbb{R}^n$ provém de um produto interno, temos que $x - x_0$ e $x - y_0$ são LD e existe $\lambda \ge 0$ tal que $x - x_0 = \lambda(x - y_0)$. Mas, como $\|x - x_0\| = \|x - y_0\|$, temos que $\lambda = 1$ e, portanto, $x_0 = y_0$

Observação 12.7. Dados dois conjuntos fechados ilimitados $F, G \subset \mathbb{R}^n$, podemos ter $d(F,G) = 0$ com $F \cap G = \varnothing$.

De fato, basta tomar $F = \{(x,0)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$ e $G = \{(x, 1/x)\,|\,x > 0\}$, pois, como

$$\left\| (n,0) - \left(n, \frac{1}{n}\right) \right\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0\,,$$

temos que $d(F,G) = 0$, com $F \cap G = \varnothing$, F e G fechados.

Teorema 12.3. $|d(x,T) - d(y,T)| \le \|x - y\|$.

Prova.

Pelo corolário 12.2, existem $x_0, y_0 \in \overline{T}$ tais que

$$d(x,T) = d(x,\overline{T}) = \|x - x_0\| \quad \text{e} \quad d(y,T) = d(y,\overline{T}) = \|y - y_0\|.$$

Então,

- $d(x,T) = \|x - x_0\| \le \|x - y_0\| \le \|x - y\| + \|y - y_0\| = \|x - y\| + d(y,T)$,

ou seja, $d(x,T) - d(y,T) \le \|x - y\|$;

- $d(y,T) = \|y - y_0\| \le \|y - x_0\| \le \|y - x\| + \|x - x_0\| = \|y - x\| + d(x,T)$,

ou seja, $d(x,T) - d(y,T) \ge -\|x - y\|$.

Logo $-\|x - y\| \le d(x,T) - d(y,T) \le \|x - y\| \quad (\Longleftrightarrow |d(x,T) - d(y,T)| \le \|x - y\|)$. ■

Corolário 12.5. *A função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,T)$ é uma contração fraca. Em particular, f é uniformemente contínua.*

Observação 12.8. Sejam $F, G \subset \mathbb{R}^n$ dois subconjuntos fechados, disjuntos e não-vazios. A *função de Urysohn* do par (F,G) é a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}\,.$$

Observe que f está bem definida, pois $F \cap G = \varnothing \Longrightarrow d(x, F) + d(x, G) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, uma vez que $d(x, F) + d(x, G) = 0 \Longleftrightarrow d(x, G) = d(x, F) = 0 \Longleftrightarrow x \in F \cap G$.

Além disso: f é contínua; $f(x) = 0 \Longleftrightarrow d(x, F) = 0 \Longleftrightarrow x \in F$; $f(x) = 1 \Longleftrightarrow d(x, G) = 0 \Longleftrightarrow x \in G$.

Logo, $A = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ e $B = f^{-1}((1/2, +\infty))$ são dois abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.

Provamos, assim, que dados dois fechados disjuntos $F, G \subset \mathbb{R}^n$, existem sempre dois abertos disjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.

Definição 12.2. Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado não-vazio. O *diâmetro* de T é o número real dado por:

$$\text{diam}(T) = \sup\{\, \|x - y\| \mid x, y \in T \,\}$$

- O diâmetro de um subconjunto $T \subset \mathbb{R}^n$ é caracterizado pelas seguintes propriedades:

  (1) $\text{diam}(T) \geq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in T$.

  (2) Dado $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in T$ tais que $\|x - y\| > \text{diam}(T) - \varepsilon$.

Observação 12.9. Existem $x_0, y_0 \in \overline{T}$ tais que $\text{diam}(T) = \|x_0 - y_0\|$.

De fato, como $\text{diam}(T) = \sup\{\, \|x - y\| \mid x, y \in T \,\}$, existem sequências (x_k), (y_k) de pontos de T tais que $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| = \text{diam}\, T$.

Sendo T limitado, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que as subsequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergem. Então $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} x_k = x_0 \in \overline{T}$, $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} y_k = y_0 \in \overline{T}$ e $\text{diam}(T) = \lim\limits_{k \in \mathbb{N}'} \|x_k - y_k\| = \|x_0 - y_0\|$.

- Quando T é compacto, temos que $x_0, y_0 \in T$, ou seja, o diâmetro de um conjunto compacto é a maior distância entre dois dos seus pontos.

Observação 12.10. $S \subset T \Longrightarrow \text{diam}(S) \leq \text{diam}(T)$.

Observação 12.11. O diâmetro da bola fechada $B[a, r]$ é igual a $2r$.

De fato, $x, y \in B[a, r] \Longrightarrow \|x - a\| \leq r$ e $\|y - a\| \leq r \Longrightarrow \|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq 2r$. Logo $\text{diam}(B[a, r]) \leq 2r$.

Seja $u \in \mathbb{R}^n$ com norma $\|u\| = r$. Então $a + u$ e $a - u$ pertencem a $B[a, r]$ e

$$\|(a + u) - (a - u)\| = \|2\,u\| = 2\,\|u\| = 2r.$$

Logo $\text{diam}(B[a, r]) \geq 2r$. Assim, $\text{diam}(B[a, r]) = 2r$.

Observação 12.12. $T \subset B[a, r] \implies \text{diam}(T) \le 2r$.

Observação 12.13. Se $\text{diam}(T) = r$ e $a \in T$, então $\|x - a\| \le r$ para todo $x \in T$. Logo $T \subset B[a, r]$.

Teorema 12.4. *Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ limitado e não-vazio. Então $\text{diam}(T) = \text{diam}(\overline{T})$.*

Prova.
Como $T \subset \overline{T}$, temos que $\text{diam}(T) \le \text{diam}(\overline{T})$.

Sejam $x_0, y_0 \in \overline{T}$ tais que $\text{diam}(\overline{T}) = \|x_0 - y_0\|$.

Então existem sequências (x_k) e (y_k) de pontos de T tais que $\lim x_k = x_0$ e $\lim y_k = y_0$.

Logo $\text{diam}(T) \ge \|x_k - y_k\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\text{diam}(T) \ge \lim \|x_k - y_k\| = \|x_0 - y_0\| = \text{diam}(\overline{T}),$$

ou seja, $\text{diam}(T) \ge \text{diam}(\overline{T})$. Assim, $\text{diam}(T) = \text{diam}(\overline{T})$. ■

Teorema 12.5. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : K \longrightarrow U$ uma aplicação contínua. Então existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que a imagem $f(T)$ de qualquer subconjunto $T \subset K$ com $\text{diam}(T) < \delta$ está contida em alguma bola aberta $B \subset U$ de raio ε.*

Prova.
Como $f(K)$ é um conjunto compacto contido no aberto U, existe, pelo corolário 12.3, $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset U$ para todo $x \in K$.

E, pela continuidade uniforme de f, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Seja $T \subset K$ um subconjunto com $\text{diam}(T) < \delta$ e tome $x_0 \in T$.

Então $x \in T \implies \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \implies f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) = B$.

Logo $f(T) \subset B \subset U$. ■

Definição 12.3. Dizemos que um número $\delta > 0$ é *número de Lebesgue* de uma cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ quando todo subconjunto de X com diâmetro $< \delta$ está contido em algum C_λ.

Observação 12.14. Uma cobertura, mesmo aberta e finita, pode não ter número de Lebesgue algum.

Por exemplo, $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cobertura aberta e finita de $\mathbb{R} - \{0\}$. Dado $\delta > 0$, o conjunto $\{-\delta/4, \delta/4\}$ tem diâmetro $< \delta$, mas não está contido em $(0, +\infty)$ nem em $(-\infty, 0)$. Logo não existe número de Lebesgue para tal cobertura.

Teorema 12.6. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ possui um número de Lebesgue.*

Prova.
Suponhamos, por absurdo, que para todo $k \in \mathbb{N}$, exista um subconjunto $S_k \subset K$ com $\operatorname{diam} S_k < \frac{1}{k}$ que não está contido em algum A_λ.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $x_k \in S_k$. Como $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ converge para um ponto $a \in K$.

Logo existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Seja $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A_{\lambda_0}$ e seja $k_0 \in \mathbb{N}'$ tal que $\frac{1}{k_0} < \frac{\delta}{2}$ e $\|x_{k_0} - a\| < \frac{\delta}{2}$.

Então $y \in S_{k_0} \Longrightarrow \|y - a\| \leq \|y - x_{k_0}\| + \|x_{k_0} - a\| < \frac{1}{k_0} + \frac{\delta}{2} < \delta \Longrightarrow y \in B(a, \delta) \Longrightarrow y \in A_{\lambda_0}$.

Assim, $S_{k_0} \subset A_{\lambda_0}$, o que é uma contradição. ■

13 Conexidade

Definição 13.1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Uma *cisão* de X é uma decomposição $X = A \cup B$, onde A e B são abertos em X e $A \cap B = \varnothing$.

Observação 13.1. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ possui pelo menos a *cisão trivial* $X = X \cup \varnothing$.

Exemplo 13.1. $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão não-trivial de $\mathbb{R} - \{0\}$. □

Definição 13.2. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo* quando só admite a cisão trivial.

Ou seja, se X é conexo, $X = A \cup B$, com A e B abertos disjuntos em X, então $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.

Exemplo 13.2. $\varnothing$ e $\{x\}$ são conjuntos conexos. □

Exemplo 13.3. Todo intervalo aberto da reta é conexo (ver Teorema 13.2). Em particular, $\mathbb{R}$ é conexo. □

Definição 13.3. Dizemos que X é *desconexo*, quando existir uma cisão não-trivial $X = A \cup B$.

Exemplo 13.4. $\mathbb{R} - \{0\}$ é desconexo. □

Observação 13.2. Todo subconjunto discreto $X \subset \mathbb{R}^n$ com mais de um elemento, é desconexo.

De fato, se $x \in X$, então $\{x\}$ é aberto em X, pois existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \cap X = \{x\}$. Assim, todo subconjunto de X é aberto em X, pois é reunião de seus pontos. Então, se $A \subset X$ e $\varnothing \neq A \neq X$, $X = A \cup (X - B)$ é uma cisão não-trivial de X.

Observação 13.3. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é discreto, mas $X \subset \mathbb{Q}$ é conexo se, e só se, X possui um único elemento.

De fato, seja $X \subset \mathbb{Q}$ tal que $a, b \in X$, $a < b$, e seja ξ um número irracional entre a e b. Então,

$$X = (\,(-\infty, \xi) \cap X\,) \cup (\,(\xi, +\infty) \cap X\,)$$

é uma cisão não-trivial de X.

Observação 13.4. Se $X = A \cup B$ é uma cisão de X, então $B = X - A$ e $A = X - B$, e, portanto, A e B são, também, fechados em X.

Ou seja, se $X = A \cup B$ é uma cisão de X, então A e B são abertos e fechados em X. Assim:

- $X = A \cup B$ é uma cisão de $X \iff A$ e B são disjuntos e fechados em X.

- X é conexo $\iff \varnothing$ e X são os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados em X, pois se A é aberto e fechado em X e $\varnothing \neq A \neq X$, então $X = A \cup (X - A)$ é uma cisão não-trivial.

Teorema 13.1. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Se X é conexo, então $f(X)$ é conexo.*

Prova.
Se $A \subset f(X)$ é aberto e fechado em $f(X)$, então $f^{-1}(A)$ é aberto e fechado em X. Pela conexidade de X temos que $f^{-1}(A) = \varnothing$ ou $f^{-1}(A) = X$, e, portanto, $A = \varnothing$ ou $A = f(X)$. ■

Corolário 13.1. *Todo subconjunto homeomorfo a um conjunto conexo é também conexo.*

Teorema 13.2. *$X \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e só se, X é um intervalo.*

Prova.
($\Longrightarrow$) Seja $X \subset \mathbb{R}$ conexo e sejam $a, b \in X$, $a < b$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, tal que $c \notin X$.

Então $X = (\,(-\infty, c) \cap X\,) \cup (\,(c, +\infty) \cap X\,)$ é uma cisão não-trivial, pois $a \in (-\infty, c) \cap X$ e $b \in (c, +\infty) \cap X$, o que é uma contradição.

($\Longleftarrow$) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.Suponhamos, por absurdo, que existe uma cisão não-trivial $I = A \cup B$ de I.

Sejam $a \in A$, $b \in B$, $a < b$. Então $[a, b] \subset I$ e $[a, b] = (A \cap [a, b]) \cup (B \cap [a, b])$ é uma cisão não-trivial de $[a, b]$.

Como $K = A \cap [a, b]$ e $L = B \cap [a, b]$ são fechados no compacto $[a, b]$, temos que K e L são fechados em $\mathbb{R}$ e, portanto, compactos, pois $K, L \subset [a, b]$.

Logo existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in L$ tais que $d(K, L) = |x_0 - y_0|$.

Seja c o ponto médio do intervalo de extremos x_0 e y_0. Então $c \in [a, b]$.

Mas, como $|x_0 - c| < |x_0 - y_0|$ e $|y_0 - c| < |x_0 - y_0|$, temos que $c \notin K$ e $c \notin L$, e, portanto, $c \notin [a, b]$, uma contradição.

Assim, I só possui a cisão trivial sendo, portanto, conexo. ■

Corolário 13.2. *Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é conexo e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, então $f(X)$ é um intervalo.*

- Uma reformulação do corolário acima é o seguinte teorema.

Teorema 13.3. *(do valor intermediário)*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$ (ou $f(b) < d < f(a)$), então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

Exemplo 13.5. O círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo, pois $f(\mathbb{R}) = S^1$, onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação contínua $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, definida no conjunto conexo $\mathbb{R}$. □

Aplicação: Dada $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, existe $u \in S^1$ tal que $f(u) = f(-u)$.

De fato, seja $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função contínua definida no conexo S^1 por $g(z) = f(z) - f(-z)$.

Como $g(z) = -g(-z)$, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $u \in S^1$ tal que $g(u) = 0$, ou seja, $f(u) = f(-u)$.

Em particular, nenhuma função contínua $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e, portanto, S^1 não é homeomorfo a um subconjunto da reta.

Teorema 13.4. *(da alfândega)*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário e seja $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo. Se $C \cap X \neq \varnothing$ e $C \cap (\mathbb{R} - X) \neq \varnothing$, então C contém algum ponto da fronteira de X.

Prova.
Suponhamos, por absurdo, que $C \cap \partial X = \varnothing$. Então $X \cap C$ é aberto em C, pois $X \cap C = (\operatorname{int} X) \cap C$, e $(\mathbb{R}^n - X) \cap C$ é aberto em C, pois $(\mathbb{R}^n - X) \cap C = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n - X) \cap C$.

Como C é conexo e $C = (C \cap X) \cup (C \cap (\mathbb{R}^n - X))$ é uma cisão de C, temos que $C \cap X = \varnothing$ ou $C \cap (\mathbb{R}^n - X) = \varnothing$, ou seja, $C \subset \mathbb{R}^n - X$ ou $C \subset X$, uma contradição. ■

Observação 13.5. Se $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ e $A \subset Y$ é aberto em Y, então $A \cap X$ é aberto em X.

De fato, como $A \subset Y$ é aberto em Y, existe $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ aberto em $\mathbb{R}^n$ tal que $A = A_0 \cap Y$.

Logo $A \cap X = A_0 \cap Y \cap X = A_0 \cap X$, e, portanto, $A \cap X$ é aberto em X.

Teorema 13.5. *A reunião $C = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ de uma família de conjuntos conexos C_λ, $\lambda \in L$, com um ponto em comum, é um conjunto conexo.*

Prova.
Seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in C_\lambda$ para todo $\lambda \in L$ e seja $C = A \cup B$ uma cisão de C. Sem perda de generalidade podemos supor $a \in A$.

Como A e B são abertos em C e $C_\lambda \subset C$ temos, pela observação 13.5, que $A \cap C_\lambda$ e $B \cap C_\lambda$ são abertos em C_λ para todo $\lambda \in L$.

Logo $C_\lambda = (A \cap C_\lambda) \cup (B \cap C_\lambda)$ é uma cisão de C_λ.

Como C_λ é conexo e $A \cap C_\lambda \neq \varnothing$, temos que $B \cap C_\lambda = \varnothing$ para todo $\lambda \in L$.

Assim, $B = B \cap C = B \cap \left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} (B \cap C_\lambda) = \varnothing$.

Provamos, então, que C só possui a cisão trivial. Portanto, C é conexo. ■

Corolário 13.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e só se, para quaisquer $a, b \in X$, existe um conjunto conexo $C_{ab} \subset X$ tal que $a, b \in C_{ab}$.*

Prova.
($\Longrightarrow$) É evidente.

($\Longleftarrow$) Seja $a \in X$ fixo. Então, para todo $x \in X$ existe um conjunto conexo $C_{ax} \subset X$ tal que $a, x \in C_{ax}$. Logo $X = \bigcup_{x \in X} C_{ax}$.

Como os conjuntos C_{ax} são conexos e têm em comum o ponto a, temos, pelo Teorema 13.5, que C é conexo. ■

Corolário 13.4. *Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, o produto cartesiano $X \times Y$ é conexo se, e só se, X e Y são conexos.*

Prova.
($\Longrightarrow$) Se $X \times Y$ é conexo, temos que X e Y são conexos, pois as projeções $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ são contínuas, $\pi_1(X \times Y) = X$ e $\pi_2(X \times Y) = Y$.

($\Longleftarrow$) Sejam $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in X \times Y$ arbitrários e $C_{ab} = (\{a_1\} \times Y) \cup (X \times \{b_2\})$. Então $a, b \in C_{ab}$. Além disso, como $\{a_1\} \times Y$ é homeomorfo ao conjunto conexo Y, $X \times \{b_2\}$ é homeomorfo ao conjunto conexo X e esses conjuntos tem o ponto (a_1, b_2) em comum, temos, pelo teorema 13.5, que C_{ab} é conexo. Logo, pelo corolário 13.3, $X \times Y$ é conexo. ■

Observação 13.6. O mesmo vale para um produto cartesiano $X_1 \times \ldots \times X_k$ de um número finito de fatores.

Em particular, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ é conexo. Portanto, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que são simultaneamente abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$.

Observação 13.7. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo é conexo.

De fato, seja $x_0 \in X$ fixo. Então, para todo $x \in X$, $[x_0, x]$ é conexo, pois é a imagem da aplicação contínua $\alpha_x : [0, 1] \longrightarrow X$, $\alpha_x(t) = (1 - t)x_0 + tx$, definida no conjunto conexo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Como $X = \bigcup_{x \in X} [x_0, x]$ e os conexos $[x_0, x]$, $x \in X$, possuem em comum o ponto x_0, temos, pelo teorema 13.5, que X é conexo.

Em particular, toda bola aberta e toda bola fechada em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos conexos.

Observação 13.8. A interseção de conjuntos conexos pode não ser um conjunto conexo.

Por exemplo, sejam $G_1 = \{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ e $G_2 = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Como G_1 é o gráfico da função contínua $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$, G_2 é o gráfico da função contínua $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$, e $\mathbb{R}$ é conexo, temos que G_1 e G_2 são conexos, pois G_1 e G_2 são homeomorfos a $\mathbb{R}$.

Mas, $G_1 \cap G_2 = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Logo $G_1 \cap G_2$ é desconexo.

Teorema 13.6. *A interseção $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ de uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_i \supset \ldots$ de conjuntos compactos conexos em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e conexo.*

Prova.
Seja $K = A \cup B$ uma cisão. Como A e B são fechados em K e K é fechado em $\mathbb{R}^n$, temos que A e B são fechados em $\mathbb{R}^n$, e, portanto, compactos disjuntos, pois $A \subset K$, $B \subset K$ e $A \cap B = \varnothing$.

Pela Observação 12.8, existem U e V abertos em $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$.

Logo $K = \bigcap K_i = A \cup B \subset U \cup V$ e, pelo Corolário 11.6, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_{i_0} \subset U \cup V$.

Portanto, $K_{i_0} = (K_{i_0} \cap U) \cup (K_{i_0} \cap V)$ é uma cisão de K_{i_0}. Como K_{i_0} é conexo, temos que $K_{i_0} \cap U = \varnothing$ ou $K_{i_0} \cap V = \varnothing$. Logo $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, pois $A \subset K_{i_0} \cap U$ e $B \subset K_{i_0} \cap V$. Ou seja, K só possui a cisão trivial e, portanto, K é conexo. ■

Observação 13.9. O mesmo não vale para uma sequência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_i \supset \ldots$ de conjuntos fechados conexos.

Por exemplo, os conjuntos $F_i = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} \cup [i, +\infty) \times [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, formam uma sequência decrescente de conjuntos fechados conexos, pois $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\mathbb{R} \times \{1\}$ e $[i, +\infty) \times [0, 1]$ são produtos cartesianos de dois conjuntos conexos da reta, $\mathbb{R} \times \{0\}$ e $[i, +\infty) \times [0, 1]$ possuem um ponto em comum e $\mathbb{R} \times \{0\} \cup [i, +\infty) \times [0, 1]$ e $\mathbb{R} \times \{1\}$ possuem um ponto em comum.

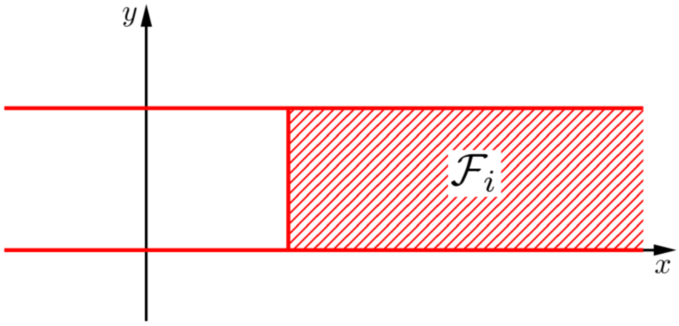

Fig. 6: Conjuntos $\mathcal{F}_i$

Mas, $F = \bigcap F_i = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ não é conexo, pois $F = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ é uma cisão não trivial de F, uma vez que $\mathbb{R} \times \{0\}$ e $\mathbb{R} \times \{1\}$ são fechados disjuntos em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, em F.

Teorema 13.7. *Sejam $X \subset Y \subset \overline{X}$ em $\mathbb{R}^n$. Se X é conexo, então Y é conexo.*

Prova.
Seja $A \subset Y$ aberto não-vazio em Y e seja $a \in A$.

Então existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap Y \subset A$. Como $Y \subset \overline{X}$, temos que $a \in \overline{X}$ e, portanto, $B(a, \delta) \cap X \neq \varnothing$. Logo $A \cap X \neq \varnothing$.

Seja $Y = A \cup B$ uma cisão. Como A e B são abertos em Y e $X \subset Y$, temos que $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$ é uma cisão de X. Logo $X \cap A = \varnothing$ ou $X \cap B = \varnothing$. Assim, pelo provado acima, $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, ou seja, Y só possui a cisão trivial e, portanto, é conexo. ■

Corolário 13.5. *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

Exemplo 13.6. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ é conexa para todo $n \geq 1$.

Primeiro observe que todo ponto $x \in S^n$ é ponto de acumulação de S^n.

De fato, existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, $(n+1 \geq 2)$ tal que x e e_i não são LD.

Portanto, $\dfrac{x + \frac{e_i}{k}}{\left\| x + \frac{e_i}{k} \right\|} \neq x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{x + \frac{e_i}{k}}{\left\| x + \frac{e_i}{k} \right\|} \longrightarrow \dfrac{x}{\|x\|} = x$.

Logo, como S^n é fechado, temos que $(S^n)' = S^n$.

Além disso, como $S^n - \{p_N\}$ (onde $p_N = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ é o pólo norte) é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, através da projeção estereográfica, temos que $S^n - \{p_N\}$ é um conjunto conexo. Sendo $\overline{S^n - \{p_N\}} = S^n$, pois $S^n - \{p_N\} \subset \overline{S^n - \{p_N\}} \subset S^n$ e p_N é ponto de acumulação de S^n, temos, pelo corolário 13.5, que a esfera S^n é conexa.

Observe que a esfera $S^n_{\| \|} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1\}$, com respeito a qualquer norma $\| \ \|$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, é também conexa, pois $f : S^n \longrightarrow S^n_{\| \|}$, dada por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ é um homeomorfismo, uma vez que $f^{-1} : S^n_{\| \|} \longrightarrow S^n$, dada por $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\|y\|_0}$, é contínua, onde $\| \ \|_0$ é a norma euclidiana. □

Exemplo 13.7. Seja a função contínua $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$. Como o gráfico de f, $G(f) = \left\{ \left(x, \text{sen}\,\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, x \in (0, 1] \right\}$, é homeomorfo ao intervalo $(0, 1]$, $G(f)$ é conexo.

Temos que $\overline{G(f)} = G(f) \cup I$, onde $I = \{(0, t) \,|\, t \in [-1, 1]\}$.

De fato, $\overline{G(f)} \subset G(f) \cup I$, pois se $(x_0, y_0) \in \overline{G(f)}$, existe uma sequência $\left(x_k, \text{sen}\,\dfrac{1}{x_k}\right)$ de pontos de $G(f)$ que converge a (x_0, y_0).

Logo $x_0 \in [0, 1]$ e $y_0 \in [-1, 1]$. Se $x_0 \in (0, 1]$, temos que $\text{sen}\,\dfrac{1}{x_k} \longrightarrow \text{sen}\,\dfrac{1}{x_0}$, ou seja $(x_0, y_0) = \left(x_0, \text{sen}\,\dfrac{1}{x_0}\right) \in G(f)$ e, se $x_0 = 0$, $(x_0, y_0) \in I$.

Seja, agora, $y_0 \in [-1, 1]$. Então existe $\xi_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $\text{sen}\,\xi_0 = y_0$.

Logo $\left(x_k = \dfrac{1}{\xi_0 + 2\pi k}\right)$ é uma sequência em $(0, 1]$ tal que

$$\left(x_k, \text{sen}\,\frac{1}{x_k}\right) \longrightarrow (0, y_0).$$

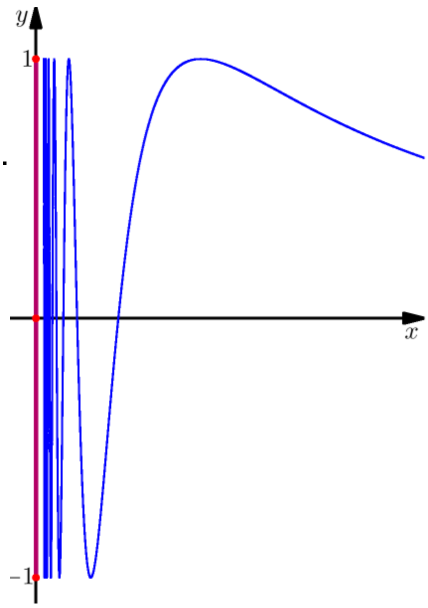

Fig. 7: $G(f)$ se acumulando num segmento

Portanto, $(0, y_0) \in \overline{G(f)}$. Assim, $G(f) \cup I \subset \overline{G(f)}$.

Como $G(f)$ é conexo, temos que $\overline{G(f)}$ é conexo e, também, para todo $T \subset I$, $G(f) \cup T$ é conexo. Em particular, $G(f) \cup \{(0, 0)\}$ é conexo. □

Este exemplo destoa da intuição, que nos sugere um conjunto conexo como aquele formado por ”um só pedaço”. Daremos, por isso, uma noção mais ampla de conexidade.

Definição 13.4. Um *caminho* em $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $f : I \longrightarrow X$ definida no intervalo I.

Exemplo 13.8. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o caminho $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $f(t) = (1-t)x + ty$, é chamado o *caminho retilíneo* que liga x a y. Às vezes, vamos nos referir a ele como o caminho $[x, y]$. □

Definição 13.5. Dizemos que $a, b \in X$ *podem ser ligados por um caminho em* X quando existe um caminho $f : I \longrightarrow X$ tal que $a, b \in f(I)$.

Exemplo 13.9. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, dois pontos quaisquer $a, b \in X$ podem ser ligados pelo caminho retilíneo $[a, b]$. □

Observação 13.10. Se $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho $f : I \longrightarrow X$, então existe um caminho $g : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $g(0) = a$ e $g(1) = b$. Basta tomar $g(t) = f((1-t)\alpha + t\beta)$, onde $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$.

Definição 13.6. Sejam $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ caminhos em X com $f(1) = g(0)$. Definimos o *caminho justaposto* $h = f \vee g : [0,1] \longrightarrow X$, pondo

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Como $f(2t)$ e $g(2t-1)$ definem o mesmo valor para h em $t = \frac{1}{2}$ e $h|_{[0,\frac{1}{2}]}$, $h|_{[\frac{1}{2},1]}$ são contínuas, então h é contínua.

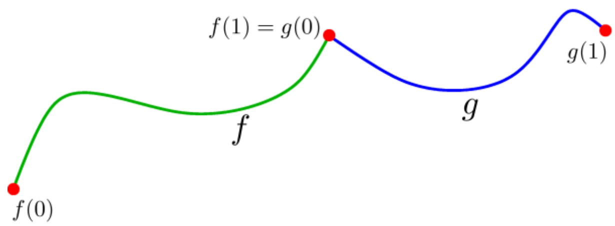

Fig. 8: Caminho h obtido pela justaposição de f com g

Observação 13.11. Sejam $a, b, c \in X \subset \mathbb{R}^n$. Se a e b podem ser ligados por um caminho $f : [0,1] \longrightarrow X$, $f(0) = a$, $f(1) = b$, e os pontos b e c podem ser ligados por um caminho $g : [0,1] \longrightarrow X$, $g(0) = b$, $g(1) = c$, então a e c podem ser ligados pelo caminho $f \vee g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 13.7. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *conexo por caminhos* quando dois pontos quaisquer $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho em X.

Observação 13.12. Todo conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos. Em particular, toda bola aberta e toda bola fechada em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos conexos por caminhos.

Observação 13.13. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1\}$ é conexa por caminhos.

De fato, dados $a, b \in S^n$ pontos não-antípodas, isto é, $a \neq -b$, então $\alpha(t) = (1-t)a + t(b) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$, pois se existisse $t_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha(t_0) = 0$, teríamos $(1-t_0)a = -t_0 b$ e, portanto, $(1-t_0) = (1-t_0)\,\|a\| = t_0 = t_0\,\|b\|$, ou seja, $t_0 = \dfrac{1}{2}$ e $a = -b$, uma contradição.

Logo $f : [0,1] \longrightarrow S^n$ dada por $f(t) = \dfrac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$ é um caminho em S^n que liga $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Agora, se $a = -b$, $a, b \in S^n$, tomamos um ponto $c \in S^n - \{a, -a\}$, ligamos a com c e c com $b = -a$ pelo processo acima. O caminho justaposto ligará, então, o ponto a com seu antípoda $b = -a$.

Observação 13.14. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos, então X é conexo.

De fato, sejam $a, b \in X$. Então existe um caminho $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Como $f([0,1])$ é conexo e $a, b \in f([0,1])$, provamos que dados $a, b \in X$, existe um conjunto conexo $C_{ab} = f([0,1]) \subset X$ tal que $a, b \in C_{ab}$. Logo, pelo corolário 13.3, X é conexo.

- A recíproca é falsa, pois $G(f) \cup \{(0,0)\}$, onde

$$G(f) = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, x \in (0,1] \right\}$$

é o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, é um conjunto conexo que não é conexo por caminhos.

De fato, seja $\lambda : [0,1] \longrightarrow G(f) \cup \{(0,0)\}$ um caminho com $\lambda(0) = (0,0)$. Seja $\alpha(t) = \pi_1(\lambda(t))$, ou seja, $\lambda(t) = (\alpha(t), f(\alpha(t)))$, onde estamos fazendo $f(0) = 0$.

Seja $A = \{t \in [0,1] \,|\, \alpha(t) = 0\}$. Então A é fechado e não-vazio.

Afirmação: A é aberto em $[0,1]$.

Seja $t_0 \in A$, ou seja, $t_0 \in [0,1]$ e $\alpha(t_0) = 0$. Como λ é contínua em t_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in [0,1]$ e $|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |\lambda(t)| = |\lambda(t) - \lambda(t_0)| < 1$.

Seja $J = [0,1] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Então J é um intervalo que contém t_0.

Além disso, J é aberto em $[0,1]$.

Logo $\alpha(J)$ é um intervalo que contém $0 = \alpha(t_0)$. Se $\alpha(J)$ não é degenerado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \in \alpha(J)$ e, portanto, existe $t_n \in J$ tal que $\alpha(t_n) = \xi_n$.

Então $\lambda(t_n) = (\alpha(t_n)\,,\,\text{sen}(\alpha(t_n))) = (\xi_n, \pm 1)$.

Assim, $|\lambda(t_n)| > 1$, uma contradição. Portanto, $\alpha(J) = \{0\}$, ou seja, $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in J$.

Como A é não-vazio, aberto e fechado em $[0,1]$ e $[0,1]$ é conexo, temos que $A = [0,1]$, ou seja, $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, e, portanto, $\lambda(t) = (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$.

Então não existe um caminho em $G(f) \cup \{(0,0\}$ que liga $(0,0)$ a um ponto do gráfico de f.

Definição 13.8. Dizemos que $f : [0,1] \longrightarrow X$ é um *caminho poligonal* em X quando f é a justaposição de um número finito de caminhos retilíneos.

Teorema 13.8. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo, então dois pontos quaisquer de A podem ser ligados por um caminho poligonal contido em A.*

Prova.
Seja $a \in A$ fixo, e seja U o conjunto formado pelos pontos de A que podem ser ligados ao ponto a por um caminho poligonal contido em A.

Então U é não-vazio, pois $a \in U$, já que $f : [0,1] \longrightarrow A$, $f(t) = a$ para todo $t \in [0,1]$, é um caminho em A que liga o ponto a ao ponto a.

Afirmação: U é aberto.

Seja $b \in U$. Então existe um caminho poligonal que liga o ponto a ao ponto b. Como $b \in U \subset A$ e A é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(b,\delta) \subset A$. Dado $y \in B(b,\delta)$, o caminho retilíneo que liga b a y está contido em $B(b,\delta)$, pois $B(b,\delta)$ é convexo. Logo todo ponto $y \in B(b,\delta)$ pode ser ligado ao ponto a por meio de um caminho poligonal em A, ou seja, $B(b,\delta) \subset U$.

Afirmação: $A - U$ é aberto.

Seja $c \in A - U$ e seja $\delta > 0$ tal que $B(c,\delta) \subset A$. Então todo ponto $y \in B(c,\delta)$ não pode ser ligado ao ponto a por meio de um caminho poligonal, pois, caso contrário, c poderia ser ligado ao ponto a, uma vez que o caminho retilíneo que liga y a c está contido em $B(c,\delta)$ e, portanto, em A. Logo $B(c,\delta) \subset A - U$.

Como U é não-vazio, aberto e fechado em A e A é conexo, temos que $U = A$, ou seja, todo ponto de A pode ser ligado ao ponto a por meio de um caminho poligonal contido em A. ■

Observação 13.15. No enunciado acima, podemos trocar caminhos poligonais por caminhos poligonais formados por segmentos paralelos aos eixos coordenados. Para tanto, basta verificar que isso é possível para quaisquer dois pontos $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$ pertencentes à bola aberta $B(a,\delta) = (a_1-\delta, a_1+\delta) \times \ldots \times (a_n-\delta, a_n+\delta)$ de centro $a = (a_1,\ldots,a_n)$

e raio δ, na norma do máximo.

De fato, como $[x_i, y_i] \subset (a_i - \delta, a_i + \delta)$ para todo $i = 1, \ldots n$, temos que o caminho formado pela justaposição dos caminhos retilíneos

$$[(x_1, x_2, \ldots x_n), (y_1, x_2, \ldots, x_n)]\,,\; [(y_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, x_3, \ldots, x_n)]\,,$$
$$\ldots, [(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)]\,,$$

é um caminho poligonal em $B(a, \delta)$, formado por segmentos paralelos aos eixos coordenados, que liga o ponto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ao ponto $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Corolário 13.6. *Um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e só se, é conexo por caminhos.*

Observação 13.16. O problema central da topologia é determinar se dois conjuntos X e Y dados são ou não são homeomorfos.

Para afirmar que X e Y são homeomorfos é necessário definir um homeomorfismo entre eles. Para garantir que X e Y não são homeomorfos, deve-se lançar mão de invariantes topológicos como a compacidade e a conexidade.

Exemplo 13.10. Sejam $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ um círculo, $\mathcal{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ uma elipse, $\mathcal{H} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1\right\}$ uma hipérbole e $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = px^2\}$ uma parábola.

- $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$ são homeomorfos e $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ dada por $h(x, y) = (ax, by)$ é um homeomorfismo entre eles.

- $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$ não são homeomorfos a $\mathcal{H}$ nem a $\mathcal{P}$, pois $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$ são compactos, enquanto que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}$ não são compactos.

- $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}$ não são homeomorfos, pois $\mathcal{H}$ é desconexo e $\mathcal{P}$ é conexo. $\square$

Exemplo 13.11. O intervalo fechado $X = [a, b]$, $a < b$ e a bola fechada $Y = B[c, r] \subset \mathbb{R}^2$ não são homeomorfos, apesar de ambos serem compactos e conexos.

De fato, se $x \in (a, b)$, então $X - \{x\} = (X \cap (-\infty, x)) \cup (X \cap (x, +\infty))$ é desconexo, mas se $y \in B(c, r)$, $B[c, r] - \{y\}$ continua sendo conexo, pois se:

- $y = c$ e $z_0 \in S[c, r]$, então
$$B[c, r] - \{c\} = \bigcup_{s \in (0, r]} (S[c, s] \cup [z_s, z_0])\,,$$

onde $z_s = \left(1 - \frac{s}{r}\right) c + \frac{s}{r} z_0 \in S[c, s]$, é uma reunião de conexos, $S[c, s] \cup [z_s, z_0]$, $s \in (0, r]$, que possuem em comum o ponto z_0

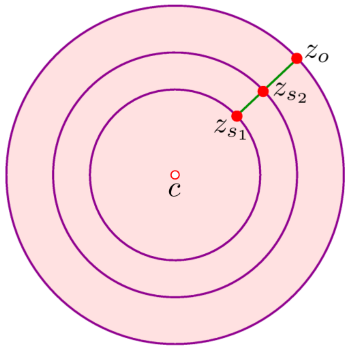

Fig. 9: $B[c, r] - \{c\}$ como reunião de conjuntos conexos com um ponto em comum

- $y \neq c$ e $y_0 = (1 - t_0)c + t_0 y$, $t_0 = -\dfrac{r}{\|y - c\|}$, temos que

$$B[c, r] - \{y\} = \bigcup_{\substack{s \in [0, r] \\ s \neq s_0}} (\, S[c, s] \cup [c, y_0]\,) \cup (\, (S[c, s_0] - \{y\}) \cup [c, y_0]\,)\,,$$

onde $s_0 = \|y - c\|$, é uma reunião de conjuntos conexos que possuem o ponto c em comum.

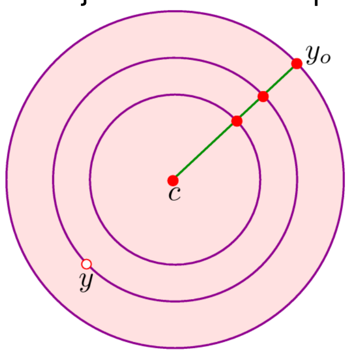

Fig. 10: $B[c, r] - \{y\}$ como reunião de conjuntos conexos com um ponto em comum

Logo, se existisse um homeomorfismo $f : [a, b] \longrightarrow B[c, r]$, teríamos que $[a, b] - \{d\}$, $a < d < b$, e $B[c, r] - \{f(d)\}$ seriam homeomorfos, uma contradição, já que $[a, b] - \{d\}$ é desconexo e $B[c, r] - \{f(d)\}$ é conexo. $\square$

Observação 13.17. Se tentarmos provar, usando um raciocínio análogo ao do exemplo anterior, que a bola $B[a, r] \subset \mathbb{R}^2$ não é homeomorfa à bola $B[b, s] \subset \mathbb{R}^3$, não chegaríamos a nada, pois as bolas $B[a, r]$ e $B[b, s]$ permanecem conexas ao retirar delas um ponto qualquer.

É verdade que uma bola em $\mathbb{R}^m$ só é homeomorfa a uma bola em $\mathbb{R}^n$ quando $m = n$. Mas a demonstração desse fato requer o uso de invariantes topológicos mais elaborados, que são estudados na Topologia Algébrica ou na Topologia Diferencial.

Exemplo 13.12. O conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 = y^2\}$ (um par de retas que se cortam na origem) e a parábola $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$ não são homeomorfos, pois se retirarmos um ponto a de Y, o conjunto $Y - \{a\}$ possui dois ”pedaços” conexos, enquanto a retirada da origem

$(0,0)$ faz com que o conjunto $X - \{(0,0)\}$ tenha quatro ”pedaços” conexos. $\square$

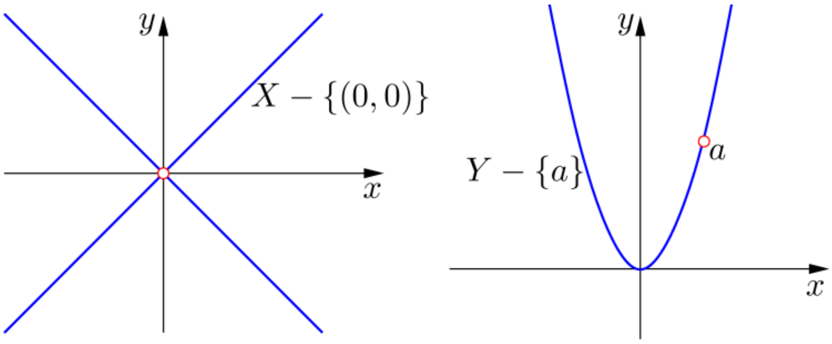

Fig. 11: $X - \{(0,0)\}$ tem 4 pedaços, enquanto $Y - \{a\}$ tem apenas 2 pedaços

Na seguinte definição vamos tornar precisa a idéia de dividir um conjunto em ”pedaços” conexos.

Definição 13.9. Sejam $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. A *componente conexa do ponto x no conjunto X* é a reunião C_x de todos os subconjuntos conexos de X que contém o ponto x.

Exemplo 13.13. Se $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então a componente conexa de qualquer ponto $x \in X$ é $\{x\}$, pois todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ com mais de um elemento é desconexo. $\square$

Exemplo 13.14. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então $C_x = X$ para todo $x \in X$. $\square$

Exemplo 13.15. Se $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, então a componente conexa de -1 em X é $(-\infty, 0)$ e a componente conexa de 1 em X é $(0, +\infty)$, pois qualquer subconjunto de X que contém pontos de $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ é desconexo. $\square$

Observação 13.18. Dados $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, a componente conexa C_x é o maior subconjunto conexo de X que contém o ponto x.

De fato, dado um subconjunto conexo C de X que contém o ponto x, temos que $C \subset C_x$, pois C_x é a reunião de todos os subconjuntos conexos de X que contém x.

Por outro lado, pelo teorema 13.5, C_x é conexo, pois é uma reunião de conjuntos conexos que possuem um ponto em comum.

Em particular, nenhum subconjunto conexo de X pode conter C_x propriamente.

Mais ainda, se $C \subset X$ é conexo e tem algum ponto em comum com C_x então $C \subset C_x$, pois $C \cup C_x$ é um conjunto conexo que contém x e, portanto, $C \cup C_x \subset C_x$, ou seja, $C \subset C_x$.

Observação 13.19. Sejam x e y dois pontos de X. Então suas componentes conexas C_x e C_y ou coincidem ou são disjuntas, pois se $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, então, pela observação anterior, $C_y \subset C_x$ e $C_x \subset C_y$, ou seja, $C_x = C_y$.

Assim, a relação *x e y pertencem a um subconjunto conexo de X* é uma relação de equivalência e as classes de equivalência são as componentes conexas dos pontos de X, ou seja, $[x] = C_x$.

Então x e y pertencem a um subconjunto conexo de $X \iff C_x = C_y$.

Observação 13.20. Toda componente conexa C_x é um conjunto fechado em X.

De fato, como $C_x \subset \overline{C_x} \cap X \subset \overline{C_x}$ e C_x é conexo, temos, pelo Teorema 13.7, que $\overline{C_x} \cap X$ é um subconjunto conexo de X que contém x.

Então, pela Observação 13.18, $C_x = \overline{C_x} \cap X$ e, portanto, C_x é fechado em X.

Observação 13.21. As componentes conexas de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

De fato, sejam $x_0 \in U$ e $y_0 \in C_{x_0}$.

Então existe $\delta > 0$ tal que $B(y_0, \delta) \subset U$. Como $B(y_0, \delta) \cup C_{x_0}$ é conexo e contém o ponto x_0, temos que $B(y_0, \delta) \cup C_{x_0} \subset C_{x_0}$, ou seja, $B(y_0, \delta) \subset C_{x_0}$. Logo C_{x_0} é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Observação 13.22. Seja $h : X \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Se C_x é a componente conexa de x em X, então $h(C_x)$ é a componente conexa de $y = h(x)$ em Y.

De fato, seja D_y a componente conexa de y em Y. Como, pelo Teorema 13.1, $h(C_x)$ é conexo e contém y, temos que $h(C_x) \subset D_y$. Por outro lado, como $h^{-1}(D_y)$ é um conjunto conexo que contém x, então $h^{-1}(D_y) \subset C_x$, ou seja, $D_y \subset h(C_x)$. Logo $D_y = h(C_x)$.

Assim, o homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ estabelece uma bijeção entre as componentes conexas de X e as componentes conexas de Y.

14 A norma de uma transformação linear

Fixemos uma norma $\| \ \|_1$ em $\mathbb{R}^m$ e uma norma $\| \ \|_2$ em $\mathbb{R}^n$. Então, dada uma transformação linear $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existe $c > 0$ tal que $\|Ax\|_2 \leq c\|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Assim, se $x \in \mathbb{R}^m$ e $\|x\|_1 = 1 \Longrightarrow \|Ax\|_2 \leq c$. Ou seja, A transforma a esfera unitária de $\mathbb{R}^m$ num subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$.

- Se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{mn}$, ou seja, se $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear, então

$$\|A\| = \sup\{\, \|A\,x\|_2 \,|\, x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1 \,\}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

De fato: se $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

(1) $$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup\{\,\|(\lambda A)(x)\|_2 \,|\, x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1\,\} = \sup\{\,|\lambda|\,\|A(x)\|_2 \,|\, x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1\,\} \\ &= |\lambda| \sup\{\,\|A(x)\|_2 \,|\, x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1\,\} = |\lambda|\,\|A\|\,. \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \|A+B\| &\le \|A\| + \|B\|\,, \text{ pois: } \|A(x)\|_2 \le \|A\| \text{ e } \|B(x)\|_2 \le \|B\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_1 = 1 \\ \Longrightarrow &\quad \|(A+B)(x)\|_2 \le \|A(x)\|_2 + \|B(x)\|_2 \le \|A\| + \|B\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1 \\ \Longrightarrow &\quad \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|\,. \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\iff \|A(x)\|_2 = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1 \\ &\iff A(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\|_1 = 1 \\ &\iff A\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m - \{0\} \\ &\iff A(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m \\ &\iff A = 0\,. \end{aligned}$$

Além disso, a função $A \longmapsto \|A\|$ possui as seguintes propriedades:

(I) $\|A(x)\|_2 \le \|A\|\,\|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

De fato, $\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \le \|A\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m - \{0\} \Longrightarrow \|A(x)\|_2 \le \|A\|\,\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m$.

(II) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$, se $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$, onde a norma em $\mathbb{R}^m$ deve ser tomada a mesma.

De fato, sejam $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_3$ as normas tomadas em $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Por (I), $\|A(y)\|_3 \le \|A\|\,\|y\|_2\ \forall\, y \in \mathbb{R}^m$ e $\|B(x)\|_2 \le \|B\|\,\|x\|_1\ \forall\, x \in \mathbb{R}^k$. Logo,
$$\|(AB)(x)\|_3 = \|A(B(x))\|_3 \le \|A\|\,\|B(x)\|_2 \le \|A\|\,\|B\|\,,$$
para todo $x \in \mathbb{R}^k$; $\|x\|_1 = 1$.

Portanto, $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

Observação 14.1. Como duas normas no espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{mn}$ são equivalentes, temos que se $A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, então $\|A_k - A\| \longrightarrow 0 \iff a_{ij}^k \longrightarrow a_{ij}$ para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, onde $A_k = (a_{ij}^k)$ e $A = (a_{ij})$.

Exemplo 14.1. Considerando $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ com a norma do máximo, a norma do sup de uma transformação linear $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por
$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right),$$
isto é, é a maior "norma da soma" entre as linhas.

De fato, seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|x\|_M = \max_{1 \le k \le m} |x_k| = 1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|A(x)\|_M &= \max_{1\le i\le n}\left(\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right|\right) \le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}x_j|\right) \\
&\le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right),
\end{aligned}
$$

pois $|x_j| \le \|x\|_M = 1$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Assim, $\|A\| \le \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right)$.

Seja $i_0 = 1, \ldots, n$ tal que $\sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right)$, e seja $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ tal que $x_j^0 = 1$ se $a_{i_0 j} > 0$, e $x_j^0 = -1$ se $a_{i_0 j} \le 0$.

Então $\|x\|_M = 1$ e

$$
\|A(x^0)\|_M = \max_{1\le i\le n}\left(\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j^0\right|\right) \ge \left|\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j}x_j^0\right| = \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| \ge \|A\|\,.
$$

Logo,

$$
\|A(x^0)\|_M \le \|A\| \le \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| \le \|A(x^0)\|_M\,,
$$

ou seja,

$$
\|A\| = \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right).
$$

• Para outras escolhas de normas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, veja a tabela da página 66 do livro *Curso de Análise, Vol II* de E. Lima. □