

Capítulo 2

Caminhos no espaço Euclidiano

1 Caminhos diferenciáveis

Definição 1.1. Um *caminho em $\mathbb{R}^n$* é uma aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $t \in I$, as n funções $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas as *funções coordenadas de f* .

Nota: Neste capítulo, os caminhos não serão por definição, contínuos. Mas, a partir do próximo capítulo, os caminhos voltarão a ser contínuos.

Observação 1.1. $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in I \iff f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in I$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Observação 1.2. Se $f = (f_1, \dots, f_n)$ é definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n) \text{ se, e só se, } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Observação 1.3. Se $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$, ou seja, a é ponto de acumulação à direita de X , dizemos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ quando,

$$\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } x \in X, a < x < a + \delta \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

De modo análogo, se $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'_-$, ou seja, a é ponto de acumulação à esquerda de X , dizemos que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ quando,

$$\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } x \in X, a - \delta < x < a \implies \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Assim, podemos provar que se $a \in X'_\pm$, então $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n)$ se, e só se, $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f_i(x) = b_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Definição 1.2. O *vetor velocidade* do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ no ponto $a \in X$ é, por definição, o limite

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

quando tal limite existe. A norma $\|f'(a)\|$ chama-se *velocidade escalar de f no ponto a* .

- Quando f possui vetor velocidade no ponto $a \in I$, dizemos que f é *diferenciável nesse ponto*. E se existe $f'(a)$ para todo $a \in I$, dizemos que f é um *caminho diferenciável*.
- Quando $f'(a) \neq 0$, o vetor velocidade $f'(a)$ determina a reta $L = \{f(a) + t f'(a) \mid t \in \mathbb{R}\}$, chamada *reta tangente à curva f no ponto a* .

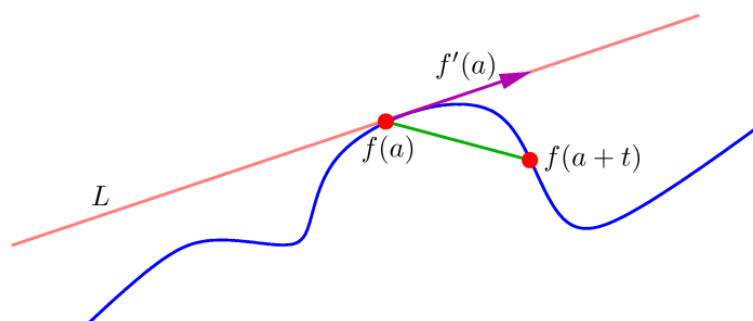


Fig. 1: Reta tangente à curva f no ponto a

Observação 1.4. A diferenciabilidade de f no ponto $a \in I$ e o limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$ independem da norma considerada em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.5. $f = (f_1, \dots, f_n)$ é diferenciável no ponto $a \in I$ se, e só se, $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a para todo $i = 1, \dots, n$, pois $\frac{f_i(a+t) - f_i(a)}{t}$ são as coordenadas do vetor $\frac{f(a+t) - f(a)}{t}$ para todo $t \in I$.

Neste caso, $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$.

Observação 1.6.

- Um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in I$ se, e só se, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que, para $a+t \in I$, temos

$$f(a+t) = f(a) + tv + r(t),$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$. Neste caso, $v = f'(a)$.

De fato, a igualdade acima nos dá, para $t \neq 0$,

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{t} - v = \frac{r(t)}{t}.$$

- Equivalentemente, f é diferenciável no ponto $a \in I$ se, e só se, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que, para $a+t \in I$,

$$f(a+t) = f(a) + [v + \rho(t)]t,$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 0$.

Basta por $\rho(t) = \frac{r(t)}{t}$, se $t \neq 0$, e $\rho(0) = 0$.

Observação 1.7. Se $I = [a, b]$, só podemos definir a *derivada lateral de f à direita no ponto a* :

$$f'(a^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

E se $I = (a, b]$, só podemos definir a *derivada lateral de f à esquerda no ponto b* :

$$f'(b^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(b+t) - f(b)}{t}.$$

Podemos verificar facilmente, que se $a \in \text{int } I$, então $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a se, e só se, existem e são iguais as derivadas laterais de f no ponto a . Neste caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.

Exemplo 1.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o caminho $f(t) = (\cos(t), \sin(t)) = e^{it}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}$, $f'(t) = (-\sin t, \cos t) = i e^{it}$, $f(\mathbb{R}) = S^1$ e $\|f'(t)\| = 1$, ou seja, a velocidade escalar é constante igual a 1. $\square$

Exemplo 1.2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o caminho dado por $g(t) = (t, |t|)$. Então $g'(t) = (1, 1)$, para todo $t > 0$ e $g'(t) = (1, -1)$, para todo $t < 0$.

Mas g não possui vetor velocidade no ponto $t = 0$, pois as derivadas laterais $g'(0^+) = (1, 1)$ e $g'(0^-) = (1, -1)$ são diferentes. A imagem de g é o gráfico da função módulo $y = |x|$, que apresenta um ponto anguloso na origem.

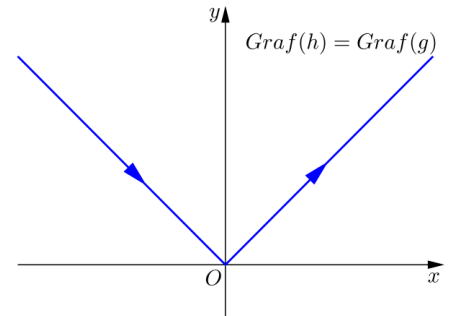


Fig. 2: $h(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$

Podemos, no entanto, descrever a mesma imagem por meio de outras "parametrizações". Por exemplo, consideremos o caminho $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $h(t) = (t^3, t^2|t|)$. Então $h(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$, $h'(t) = (3t^2, 3t^2)$, $t > 0$, $h'(t) = (3t^2, -3t^2)$, $t < 0$ e $h'(0) = (0, 0)$, pois $h'(0^+) = h'(0^-) = (0, 0)$.

Ou seja, para descrever a rota $h(\mathbb{R})$, o ponto, cuja posição no tempo t é $h(t)$, precisou dar uma parada instantânea ao atingir o ponto anguloso $(0, 0)$ de sua trajetória (ver exercício 1.15). $\square$

Observação 1.8. Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são caminhos diferenciáveis e $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, temos que:

- | | |
|--|---|
| (1) $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = f'(t) + g'(t);$ | (3) $\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t) \rangle = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle;$ |
| (2) $\frac{d}{dt}[\lambda(t) f(t)] = \lambda'(t) f(t) + \lambda(t) f'(t);$ | (4) $\frac{d}{dt}\ f(t)\ = \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\ f(t)\ },$ se $f(t) \neq 0,$ |

onde $\| \cdot \|$ é a norma que provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

As propriedades acima seguem das propriedades usuais da derivada de uma função real de uma variável real aplicadas às funções coordenadas de um caminho diferenciável.

Observação 1.9. Se uma norma $\| \cdot \|$ não provém de um produto interno, podemos ter um caminho diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, para o qual a função $\varphi(t) = \|f(t)\|$ não é diferenciável.

Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ o caminho diferenciável dado por $f(t) = (1, t)$. Considerando a norma do máximo em $\mathbb{R}^2$, temos que $\|f(t)\|_M = 1$, se $|t| \leq 1$ e $\|f(t)\|_M = |t|$, se $|t| \geq 1$. Logo a função $t \mapsto \|f(t)\|_M$ não possui derivada nos pontos $t = -1$ e $t = 1$.

Observação 1.10. Sempre que tomarmos a derivada de $\|f(t)\|$ estaremos considerando que $\| \cdot \|$ provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Observação 1.11. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Então $f(t)$ tem comprimento constante se, e só se, o vetor velocidade $f'(t)$ é perpendicular ao vetor posição $f(t)$ para todo $t \in I$.

De fato, $\|f(t)\| = a$ para todo $t \in I \iff \langle f(t), f(t) \rangle = a^2$ para todo $t \in I \iff 2\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I \iff f(t) \perp f'(t)$ para todo $t \in I$.

Exemplo 1.3. Seja o caminho diferenciável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Então $\|f(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ é perpendicular a $f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Neste exemplo, temos também $\|f'(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mas isso é accidental.

Por exemplo, para o caminho diferenciável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$g(t) = (\cos t^2, \sin t^2),$$

temos $\|g(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$ é perpendicular a $g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mas $\|g'(t)\| = 2|t|$ não é constante. $\square$

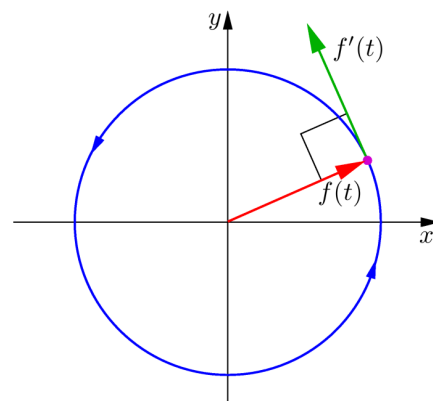


Fig. 3: $f(t) \perp f'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Definição 1.3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Se $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo, dizemos que f é *de classe C^1* .

E se f' é diferenciável no ponto $a \in I$, dizemos que $(f')'(a) = f''(a)$ é a *derivada segunda de f no ponto a* ou o *vetor aceleração do caminho f no ponto a* .

Tem-se $f''(a) = (f''_1(a), \dots, f''_n(a))$.

Se existe $f''(t)$ para todo $t \in I$, dizemos que f é *duas vezes diferenciável*. E se f'' é contínua, dizemos que f é *de classe C^2* .

Prosseguindo desta maneira, dizemos que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *$p + 1$ vezes diferenciável* quando o caminho $f^{(p)} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (derivada de ordem p de f) existe e é derivável. Põe-se, então, $f^{(p+1)} = (f^{(p)})'$. Quando $f^{(p)}$ é de classe C^1 , dizemos que f é *de classe C^{p+1}* .

Se existem as derivadas de todas as ordens do caminho f , dizemos que f é *de classe C^∞* .

Por extensão, dizemos que um caminho contínuo é *de classe C^0* e que $f = f^{(0)}$ é sua própria derivada de ordem zero.

Definição 1.4. Dizemos que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *p -vezes diferenciável no ponto $a \in I$* quando existe $\delta > 0$ tal que f é $p - 1$ vezes diferenciável no intervalo $J = \{t \in I \mid |t - a| < \delta\}$ e $f^{(p-1)}$ é diferenciável no ponto a .

Observação 1.12. Seja $0 \leq p \leq \infty$. Então $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^p$ (é de classe C^p) se, e só se, $f_i \in C^p$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Definição 1.5. Seja $p > 0$. Dizemos que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *de classe C^p por partes* quando f é contínua e existem $t_1 < \dots < t_k$ pertencentes ao interior do intervalo I tais que

$$f|_{I \cap (-\infty, t_1]}, f|_{[t_1, t_2]}, \dots, f|_{[t_{k-1}, t_k]}, f|_{I \cap [t_k, +\infty)}$$

são de classe C^p .

Exemplo 1.4. Para todo $p > 0$, considere o caminho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $f(t) = (t^{p+1}, t^p |t|)$.

Como $t^p |t| = t^{p+1}$ para $t \geq 0$ e $t^p |t| = -t^{p+1}$ para $t \leq 0$, podemos provar, por indução, que f é de classe C^p , onde $f^{(p)}(t) = ((p+1)!t, -(p+1)!t)$, para $t \leq 0$, $f^{(p)}(t) = ((p+1)!t, (p+1)!t)$ para $t \geq 0$, e $f^{(p)}(0) = (0, 0)$.

Entretanto f não é $p + 1$ vezes diferenciável no ponto $t = 0$, pois $f^{(p+1)}(0^+) = ((p+1)!, (p+1)!)$ e $f^{(p+1)}(0^-) = ((p+1)!, -(p+1)!)$.

Apesar disso, f é de classe C^∞ por partes, pois

$$f^{(j)}|_{(-\infty, 0]}(t) = \left(\frac{(p+1)!}{((p+1)-j)!} t^{p+1-j}, -\frac{(p+1)!}{((p+1)-j)!} t^{p+1-j} \right)$$

e

$$f^{(j)}|_{[0, +\infty)}(t) = \left(\frac{(p+1)!}{((p+1)-j)!} t^{p+1-j}, \frac{(p+1)!}{((p+1)-j)!} t^{p+1-j} \right)$$

são contínuas para todo $0 \leq j \leq p + 1$, e $f^{(j)}|_{(-\infty, 0]} = f^{(j)}|_{[0, +\infty)} \equiv 0$ são também contínuas para todo $j > p + 1$. $\square$

2 Integral de um caminho

Definição 2.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho limitado definido no intervalo compacto $[a, b]$. Uma *partição de $[a, b]$* é um conjunto finito $\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$, onde $t_0 = a$ e $t_k = b$, e a *norma da partição $\mathcal{P}$* é o número $|\mathcal{P}| = \max_{0 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1})$.

Uma *partição pontilhada* é um par $\mathcal{P}^* = (\mathcal{P}, \xi)$, onde $\mathcal{P}$ é uma partição e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ é tal que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Dados f e uma partição pontilhada $\mathcal{P}^* = (\mathcal{P}, \xi)$, o somatório

$$\sum (f; \mathcal{P}^*) = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i)$$

é chamado *soma de Riemann*.

• Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é *o limite das somas de Riemann* $\sum (f; \mathcal{P}^*)$ quando a norma de $\mathcal{P}$ tende a zero se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}| < \delta \implies \left\| \sum (f; \mathcal{P}^*) - v \right\| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que f é *integrável no intervalo $[a, b]$* e chamamos $v = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum (f; \mathcal{P}^*)$ a *integral de f no intervalo $[a, b]$* . Usamos a notação

$$\int_a^b f(t) dt = v = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum (f; \mathcal{P}^*).$$

Observação 2.1. O caminho limitado $f = (f_1, \dots, f_n)$ é integrável se, e só se, $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável para todo $i = 1, \dots, n$. Neste caso,

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Observação 2.2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é integrável e $c \in [a, b]$, então $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis e

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Observação 2.3. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade do caminho limitado $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e, para cada $i = 1, \dots, n$, seja D_i o conjunto dos pontos de descontinuidade da i -ésima função coordenada $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$.

Como f_i é integrável se, e só se, D_i tem medida nula, temos que f é integrável se, e só se, D tem medida nula.

De fato, $m(D) = 0 \iff m(D_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n \iff f_i$ é integrável para todo $i = 1, \dots, n \iff f$ é integrável.

Observação 2.4. A integrabilidade de f e o valor $\int_a^b f(t) dt$ não dependem da norma considerada em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1. Sejam $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ os caminhos C^∞ dados por $f(t) = (\cos t, \sin t)$ e $g(t) = (t, t^2)$. Então:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \left(\int_0^{2\pi} \cos t dt, \int_0^{2\pi} \sin t dt \right) = (0, 0);$$

$$\text{e} \quad \int_0^1 g(t) dt = \left(\int_0^1 t dt, \int_0^1 t^2 dt \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right).$$

Observação 2.5. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminhos integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrários. Segue-se da definição ou da observação 2.1, que o caminho $\alpha f + \beta g$ é integrável e

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Observação 2.6. Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho integrável. Como $D_{\|f\|} \subset D_f$, temos que $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Além disso,

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

De fato, dada qualquer partição pontilhada $\sum (f; \mathcal{P}^*)$, temos que:

$$\left\| \sum (f; \mathcal{P}^*) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \|f(\xi_i)\| = \sum (\|f\|; \mathcal{P}^*).$$

Logo,

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \left\| \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum (f; \mathcal{P}^*) \right\| = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \left\| \sum (f; \mathcal{P}^*) \right\| \leq \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum (\|f\|; \mathcal{P}^*) = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

• Assim, se $\|f(t)\| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$, temos que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq M(b-a).$$

• Porém, se $n > 1$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo e $\|f(t)\| \geq c > 0$ para todo $t \in [a, b]$, não se pode concluir que $\int_a^b f(t) dt \neq 0$. Veja o exemplo 2.1.

Observação 2.7. Segue-se da definição que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um caminho integrável e $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear, então $A \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é integrável e

$$\int_a^b (A \circ f)(t) dt = A \left(\int_a^b f(t) dt \right).$$

3 Os teoremas clássicos do Cálculo

Regra da cadeia

Sejam $\varphi : I \rightarrow J$ uma função real diferenciável no ponto $a \in I$ e $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável no ponto $b = \varphi(a)$. Então $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho diferenciável no ponto a e

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a)).$$

- Basta aplicar a regra da cadeia em cada uma das funções coordenadas $f_i \circ \varphi$ do caminho $f \circ \varphi$.

Observação 3.1. A função composta $t \mapsto f(\varphi(t))$ pode ser interpretada como uma mudança de variável no caminho f , que equivale a descrever o mesmo percurso de outra maneira, sendo o vetor velocidade $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a))$ no ponto a um múltiplo escalar do vetor velocidade de f no ponto $\varphi(a)$.

- Os seis teoremas abaixo se demonstram observando que se $f = (f_1, \dots, f_n)$, então $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$ e $\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$, e, aplicando às funções coordenadas, o teorema correspondente para funções reais de uma variável real.

Mudança de variável na integral

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é uma função com derivada integrável, então

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho com derivada integrável, então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt = \int_0^1 f(a + (b-a)t) (b-a) dt.$$

Definição 3.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho integrável. A *integral indefinida* de f é o caminho $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Seja $M > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$. Então, pela observação 2.6,

$$\|F(x) - F(y)\| = \left\| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right\| = \left\| \int_y^x f(t) dt \right\| \leq M \|x - y\|,$$

e, portanto, F é lipschitziana. Em particular, F é contínua.

Derivação da integral indefinida

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho integrável contínuo no ponto $c \in [a, b]$, então F é diferenciável neste ponto e $F'(c) = f(c)$.

Em particular, se f é um caminho contínuo, temos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Fórmula de Taylor infinitesimal

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho p vezes diferenciável no ponto $a \in I$ e escrevemos, para todo h tal que $a + h \in I$,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + f^{(p)}(a) \frac{h^p}{p!} + r_p(h).$$

Então $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_p(h)}{h^p} = 0$.

Fórmula de Taylor com resto integral

Seja $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho p vezes diferenciável no intervalo $[a, a + h]$, com $f^{(p)}$ integrável. Então,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + f^{(p-1)}(a) \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} + r_p,$$

onde

$$r_p = \frac{h^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} f^{(p)}(a+th) dt = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^{a+h} (a+h-x)^{p-1} f^{(p)}(x) dx.$$

Definição 3.2. Dizemos que um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *uniformemente diferenciável*, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, x+h \in [a, b], 0 < |h| < \delta \implies \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| < \varepsilon|h|.$$

Teorema 3.1. Um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 se, e só se, f é uniformemente diferenciável.

Este teorema decorre do teorema análogo para funções reais.

Realmente:

- A diferenciabilidade uniforme de f não depende da norma considerada, pois duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes;
- Um caminho f é uniformemente diferenciável na norma do máximo se, e só se, cada uma de suas funções coordenadas f_i é uniformemente diferenciável;
- Uma função $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente diferenciável se, e só se, f_i é de classe C^1 (ver *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima, pag. 277).

Observação 3.2. O Teorema do Valor Médio não vale para caminhos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Por exemplo, seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ o caminho diferenciável dado por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Como $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$ e $|f'(t)| = 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, não existe $c \in (0, 2\pi)$ tal que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c)$.

Tem-se, no entanto, na forma de desigualdade.

Teorema do Valor Médio

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho contínuo em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Se $\|f'(t)\| \leq M$ para todo $t \in (a, b)$, então $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.

1ª Demonstração: Suponhamos que, além das hipóteses acima, f' é integrável em cada subintervalo compacto $[c, d] \subset (a, b)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(t) dt.$$

Logo $\|f(d) - f(c)\| \leq M(d - c)$, para todo $[c, d] \subset (a, b)$.

Como f é contínua em $[a, b]$, e existem sequências (c_k) e (d_k) tais que $a < c_k < d_k < b$, com $\lim c_k = a$ e $\lim d_k = b$, temos que

$$\|f(b) - f(a)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(c_k) - f(d_k)\| \leq M \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k - d_k| = M|b - a|,$$

ou seja, $\|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$. ■

2ª Demonstração: Suponhamos que a norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno, ou seja, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função real dada por $\varphi(t) = \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle$. Então φ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $\varphi'(t) = \langle f'(t), f(b) - f(a) \rangle$ para todo $t \in (a, b)$.

Logo, pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a) \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle.$$

Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a) \leq M (b - a) \|f(b) - f(a)\|,$$

ou seja,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M (b - a). \blacksquare$$

3ª Demonstração: (Caso Geral) Se baseia nos dois lemas abaixo.

Lema 3.1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável no ponto $c \in I$. Sejam (a_k) e (b_k) seqüências tais que $a_k, b_k \in I$, $a_k \neq b_k$, $a_k \leq c \leq b_k$, $\lim a_k = \lim b_k = c$. Então,*

$$f'(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}.$$

Prova.

Sejam $N' = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k = c\}$, $N'' = \{k \in \mathbb{N} \mid b_k = c\}$ e $N''' = \{k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N} \mid a_k < c < b_k\}$. Então $N = N' \cup N'' \cup N'''$ e N' , N'' , N''' são dois a dois disjuntos.

- Se $N' \subset \mathbb{N}$ é infinito, temos que a subsequência

$$\left(\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \right)_{k \in N'} = \left(\frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} \right)_{k \in N'}$$

converge para $f'(c)$, pois f é diferenciável em c .

- De modo análogo, se $N'' \subset \mathbb{N}$ é infinito, a subsequência

$$\left(\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \right)_{k \in N''} = \left(\frac{f(c) - f(a_k)}{c - a_k} \right)_{k \in N''}$$

também converge para $f'(c)$.

- Resta, agora, mostrar que se $N''' \subset \mathbb{N}$ é infinito, $\left(\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \right)_{k \in N'''}$ converge para $f'(c)$.

Como $a_k < c < b_k$, podemos escrever

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} = (1 - t_k) \frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} + t_k \frac{f(a_k) - f(c)}{a_k - c},$$

onde $t_k = \frac{a_k - c}{a_k - b_k}$ e, portanto, $1 - t_k = \frac{b_k - c}{b_k - a_k}$.

Logo

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} - f'(c) = (1 - t_k) \left(\frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c} - f'(c) \right) + t_k \left(\frac{f(a_k) - f(c)}{a_k - c} - f'(c) \right).$$

Assim, como $\left(\frac{f(a_k) - f(c)}{a_k - c}\right)_{k \in \mathbb{N}'''}$ e $\left(\frac{f(b_k) - f(c)}{b_k - c}\right)_{k \in \mathbb{N}'''}$ convergem para $f'(c)$ e (t_k) , $(1 - t_k)$ são sequências limitadas, temos que $\left(\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}\right)_{k \in \mathbb{N}'''}$ converge para $f'(c)$. ■

Lema 3.2. *Sejam $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) . Se $\|f'(t)\| \leq \varphi'(t)$ e $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$, então $\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$.*

Prova.

Suponhamos que f e g são diferenciáveis no intervalo fechado $[a, b]$ e admitamos que

$$\|f(b) - f(a)\| > \varphi(b) - \varphi(a).$$

Então existe $A > 1$ tal que

$$\|f(b) - f(a)\| > A(\varphi(b) - \varphi(a)) \quad (> 0).$$

Dividindo o intervalo $[a, b]$ ao meio, em pelo menos em uma das metades, digamos, $[a_1, b_1]$, temos que

$$\|f(b_1) - f(a_1)\| > A(\varphi(b_1) - \varphi(a_1)).$$

Analogamente, em pelo menos uma das metades $[a_2, b_2]$ de $[a_1, b_1]$ temos que

$$\|f(b_2) - f(a_2)\| > A(\varphi(b_2) - \varphi(a_2)).$$

Prosseguindo desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$

tais que

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k} \text{ e } \|f(b_k) - f(a_k)\| > A(\varphi(b_k) - \varphi(a_k)), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, as sequências (a_k) e (b_k) convergem para um mesmo ponto $c \in [a, b]$, pois (a_k) é não-decrescente limitada, (b_k) é não-crescente limitada e $(b_k - a_k) \rightarrow 0$.

Como $a_k \neq b_k$ e $a_k \leq c \leq b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ temos, pelo lema 3.1, que

$$\|f'(c)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f(b_k) - f(a_k)\|}{b_k - a_k} \geq A \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(b_k) - \varphi(a_k)}{b_k - a_k} = A \varphi'(c) > \varphi'(c).$$

• Se φ e f são diferenciáveis apenas no intervalo aberto (a, b) temos, pelo provado acima, que

$$\|f(d) - f(c)\| \leq \varphi(d) - \varphi(c) \text{ para todo } [c, d] \subset (a, b).$$

Como φ e f são contínuas em $[a, b]$ e existem sequências (c_k) e (d_k) de pontos de (a, b) tais que $c_k < d_k$, $\lim c_k = a$ e $\lim d_k = b$, temos que

$$\|f(b) - f(a)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(d_k) - f(c_k)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi(d_k) - \varphi(c_k)) = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \blacksquare$$

• **A desigualdade do valor médio** segue-se do lema 3.2, tomando $\varphi(t) = Mt$. ■

Corolário 3.1. Se o caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo em $[a, b]$ e possui derivada nula em todos os pontos de (a, b) , então f é constante.

Prova.

Sejam $x \in (a, b)$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $\|f'(t)\| \leq \frac{1}{n}$ para todo $t \in (a, b)$, temos, pelo Teorema do Valor Médio, que $\|f(x) - f(a)\| \leq \frac{1}{n} \|x - a\|$. Então,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x - a\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ou seja, $f(x) = f(a)$. ■

Observação 3.3. O corolário acima também pode ser demonstrado aplicando-se a cada função coordenada f_i de f o resultado análogo para funções reais.

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Seja $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^{p-1} , p vezes diferenciável no intervalo aberto $(a, a + h)$. Se $\|f^{(p)}(t)\| \leq M$ para todo $t \in (a, a + h)$, então:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a) + r_p,$$

onde $\|r_p\| \leq M \frac{h^p}{p!}$.

Ou equivalentemente, fazendo $b = a + h$,

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \dots + \frac{(b - a)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a) + r_p,$$

onde $\|r_p\| \leq M \frac{(b - a)^p}{p!}$.

Prova.

Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ o caminho dado por

$$g(t) = f(t) + (b - t)f'(t) + \dots + \frac{(b - t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t)$$

Então g é um caminho contínuo em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $g'(t) = \frac{(b - t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)$.

Logo $\|g'(t)\| \leq M \frac{(b - t)^{p-1}}{(p-1)!}$.

Fazendo $\varphi(t) = -M \frac{(b - t)^p}{p!}$, temos, pelo lema 3.2, que

$$\|r_p\| = \|g(b) - g(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a) = M \frac{(b - a)^p}{p!}. \blacksquare$$

4 Caminhos retificáveis

Definimos o **comprimento** de um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo a distância total percorrida pelo ponto móvel $f(t)$, quando t varia de a até b . Não é o mesmo que o comprimento da imagem $f([a, b])$, pois, para ir de $f(a)$ até $f(b)$, o ponto $f(t)$ pode passar pelo mesmo trecho várias vezes (até infinitas).

Por exemplo, a imagem do caminho $f : [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$, é o semi-círculo $S_+^1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y \geq 0\}$, cujo comprimento é π . Mas como f percorre S_+^1 duas vezes quando t varia de $-\sqrt{\pi}$ a $\sqrt{\pi}$, temos que o comprimento do caminho f é 2π .

• Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. A cada partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b\}$ do intervalo $[a, b]$, associamos o número real não-negativo

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Intuitivamente, $\ell(f; \mathcal{P})$ é o comprimento da poligonal inscrita no caminho f com vértices nos pontos $f(t_i)$, $i = 0, \dots, k$.

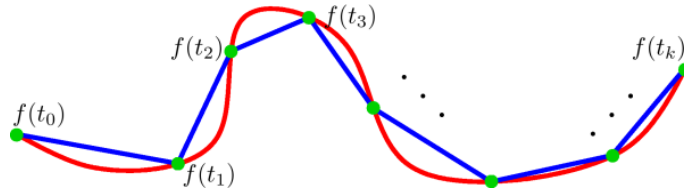


Fig. 4: $\ell(f; \mathcal{P})$ é o comprimento da poligonal de vértices $f(t_i)$, $i = 0, \dots, k$.

Definição 4.1. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições do intervalo $[a, b]$. Dizemos que $\mathcal{Q}$ é **mais fina** que $\mathcal{P}$ quando $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Teorema 4.1. Se $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, então $\ell(f; \mathcal{P}) \leq \ell(f; \mathcal{Q})$.

Prova.

Suponhamos, primeiro, que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r\}$, onde $t_{i-1} < r < t_i$. Então,

$$\ell(f; \mathcal{Q}) - \ell(f; \mathcal{P}) = \|f(t_i) - f(r)\| + \|f(r) - f(t_{i-1})\| - \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Como $\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq \|f(t_i) - f(r)\| + \|f(r) - f(t_{i-1})\|$, temos que $\ell(f; \mathcal{Q}) \geq \ell(f; \mathcal{P})$.

O caso geral prova-se aplicando o processo acima um número finito de vezes. ■

Definição 4.2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. Se o conjunto $\{\ell(f; \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\}$ é limitado, dizemos que o caminho f é **retificável** e $\ell(f) = \sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P})$ é chamado o **comprimento** do caminho f .

Então, $\ell(f)$ é caracterizado por:

(1) $\ell(f) \geq \ell(f; \mathcal{P})$ para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$.

(2) Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que $\ell(f; \mathcal{P}) > \ell(f) - \varepsilon$.

Observação 4.1. Quando $n = 1$, um caminho retificável chama-se uma *função de variação limitada* e o comprimento $\ell(f)$ chama-se a *variação total* da função f no intervalo $[a, b]$.

Observação 4.2. Todo caminho retificável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitado.

De fato, seja $\mathcal{P} = \{a, t, b\}$, onde $t \in [a, b]$. Então,

$$\|f(t) - f(a)\| + \|f(b) - f(t)\| = \ell(f; \mathcal{P}) \leq \ell(f).$$

Logo,

$$\|f(t)\| \leq \|f(t) - f(a)\| + \|f(a)\| \leq \ell(f) + \|f(a)\|$$

para todo $t \in [a, b]$ e, portanto, f é limitado.

Lema 4.1. *Seja $\mathcal{P}_0$ uma partição de $[a, b]$. Então,*

$$\sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q}).$$

Prova.

Como $\sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P}) \geq \ell(f; \mathcal{P})$ para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, temos que

$$\sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q}) \leq \sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P}).$$

Por outro lado, dada uma partição $\mathcal{P}$, temos que $\mathcal{Q}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ é uma partição mais fina do que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_0$. Logo, pelo teorema 4.1,

$$\ell(f; \mathcal{P}) \leq \ell(f; \mathcal{Q}') \leq \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q}),$$

ou seja, $\sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q})$ é uma cota superior do conjunto $\{\ell(f; \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\}$.

Assim, $\sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q})$ e, portanto, $\sup_{\mathcal{P}} \ell(f; \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} \ell(f; \mathcal{Q})$. ■

Teorema 4.2. *Seja $c \in [a, b]$. Então o caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável se, e só se, suas restrições $f_1 = f|_{[a, c]}$ e $f_2 = f|_{[c, b]}$ são retificáveis. Neste caso, $\ell(f) = \ell(f_1) + \ell(f_2)$.*

Prova.

Suponhamos que f é retificável.

Seja $\mathcal{P}_2$ uma partição de $[c, b]$ fixa e seja $\mathcal{P}_1$ uma partição de $[a, c]$. Então $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é uma partição de $[a, b]$ e $\ell(f; \mathcal{P}) = \ell(f_1; \mathcal{P}_1) + \ell(f_2; \mathcal{P}_2)$.

Logo,

$$\ell(f_1; \mathcal{P}_1) = \ell(f; \mathcal{P}) - \ell(f_2; \mathcal{P}_2) \leq \ell(f) - \ell(f_2; \mathcal{P}_2),$$

e, portanto, f_1 é retificável e

$$\ell(f_1) \leq \ell(f) - \ell(f_2; \mathcal{P}_2).$$

Além disso, como $\ell(f_2; \mathcal{P}_2) \leq \ell(f) - \ell(f_1)$ para toda partição $\mathcal{P}_2$ de $[c, b]$, temos que f_2 é retificável e $\ell(f_2) \leq \ell(f) - \ell(f_1)$, ou seja, $\ell(f_1) + \ell(f_2) \leq \ell(f)$.

Suponhamos agora que f_1 e f_2 são retificáveis. Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ que contém c , temos que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, onde $\mathcal{P}_1$ é uma partição de $[a, c]$ e $\mathcal{P}_2$ é uma partição de $[c, b]$.

Como $\ell(f; \mathcal{P}) = \ell(f_1; \mathcal{P}_1) + \ell(f_2; \mathcal{P}_2) \leq \ell(f_1) + \ell(f_2)$ e, pelo lema anterior, $\sup_{\mathcal{Q}} \ell(f; \mathcal{Q}) = \sup_{c \in \mathcal{Q}} \ell(f; \mathcal{Q})$, temos que f é retificável e $\ell(f) \leq \ell(f_1) + \ell(f_2)$.

Provamos, assim, que f é retificável se, e só se, f_1 e f_2 são retificáveis, e, neste caso, $\ell(f) = \ell(f_1) + \ell(f_2)$. ■

Observação 4.3.

• Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ o caminho retilíneo $f(t) = (1 - t)A + tB$, com $A, B \in \mathbb{R}^n$, e seja $\mathcal{P} = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ uma partição de $[0, 1]$. Como

$$\begin{aligned} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| &= \|(1 - t_i)A + t_iB - [(1 - t_{i-1})A + t_{i-1}B]\| \\ &= \|(t_i - t_{i-1})(B - A)\| = (t_i - t_{i-1})\|B - A\|, \end{aligned}$$

para todo $i = 0, \dots, k$, temos que

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| = \|B - A\| \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) = \|B - A\|.$$

Logo $\ell(f) = \|B - A\|$. Aqui, $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$.

• Em geral, se um caminho retificável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem extremidades $A = f(a)$ e $B = f(b)$, então $\ell(f) \geq \|f(b) - f(a)\| = \|B - A\|$, pois $\mathcal{P} = \{a, b\}$ é uma partição de $[a, b]$.

• Se $\ell(f) = \|B - A\|$ e a norma de $\mathbb{R}^n$ provém de um produto interno, então $f([a, b]) \subset [A, B]$.

De fato, suponhamos que existe $C \in f([a, b])$ tal que $C \notin [A, B]$ e seja $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = C$. Como $C \notin [A, B]$, temos que $B - C$ não é múltiplo positivo de $C - A$, pois, caso contrário, existiria $\lambda > 0$ tal que

$$B - C = \lambda(C - A) \implies \lambda C + C = B + \lambda A \implies (1 + \lambda)C = \lambda A + B \implies C = \frac{\lambda}{1 + \lambda}A + \frac{1}{1 + \lambda}B,$$

uma contradição, uma vez que $C = (1 - t)A + tB$, onde $t = \frac{1}{1 + \lambda} \in (0, 1)$.

Logo, como a norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno, $\|B - C\| + \|C - A\| > \|B - A\|$.

Assim, para a partição $\mathcal{P} = \{a, c, b\}$, temos que:

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \|f(b) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| = \|B - C\| + \|C - A\| > \|B - A\|,$$

uma contradição, pois estamos supondo que $\ell(f) = \|B - A\|$.

• Suponhamos, agora, que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo, $\ell(f) = \|B - A\| = \|f(b) - f(a)\|$ e que a norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno.

Então $f([a, b]) = [A, B]$.

De fato, consideremos a aplicação $g : [0, 1] \rightarrow [A, B]$ dada por $g(t) = (1-t)A + tB$. A aplicação g é contínua, sobrejetora e injetora, e sua inversa $g^{-1} : [A, B] \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$g^{-1}(x) = \frac{\|x - A\|}{\|B - A\|},$$

também é contínua.

Logo a função $g^{-1} \circ f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é contínua e, portanto, $g^{-1}(f([a, b]))$ é um intervalo contido no intervalo $[0, 1]$ que contém os extremos 0 e 1, uma vez que $f(a) = A$ e $f(b) = B$.

Assim, $g^{-1}(f([a, b])) = [0, 1]$, ou seja, $f([a, b]) = g([0, 1]) = [A, B]$.

• Se a norma não provém de um produto interno, podemos ter $\|B - A\| = \|B - C\| + \|C - A\|$ sem que $C \in [A, B]$, o que permite a existência de um caminho f com $\ell(f) = \|f(b) - f(a)\|$ sem que $f([a, b])$ esteja contido num segmento de reta.

Por exemplo, consideremos $\mathbb{R}^2$ com a norma da soma e seja o caminho contínuo $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(t) = \begin{cases} (0, 1-t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1-t, 0) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Então, pelo teorema 4.2, f é retificável e

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell(f|_{[0,1]}) + \ell(f|_{[1,2]}) \\ &= \|(0, 1) - (0, 0)\|_s + \|(0, 0) - (-1, 0)\|_s = 2, \end{aligned}$$

uma vez que $f|_{[0,1]}$ e $f|_{[1,2]}$ são caminhos retilíneos.

Portanto, $\ell(f) = 2 = \|(0, 1) - (-1, 0)\|_s = \|f(2) - f(0)\|_s$, apesar de $f([a, b])$ não estar contido num segmento de reta.

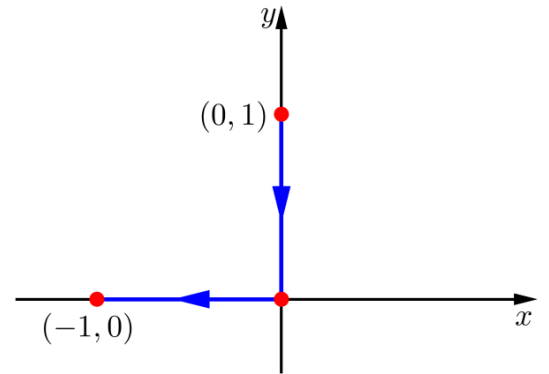


Fig. 5: $\ell(f) = 2$

Observação 4.4. $\ell(f) = 0 \iff f$ é um caminho constante.

Observação 4.5. Ser ou não ser retificável é uma propriedade do caminho f que não depende da norma tomada em $\mathbb{R}^n$, uma vez que duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, mas o comprimento $\ell(f)$ depende da norma. Por exemplo, o segmento de reta que liga os pontos

$A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$ no plano tem comprimento 2 na norma da soma, 1 na norma do máximo e $\sqrt{2}$ na norma euclidiana.

Observação 4.6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho poligonal, temos, pelo teorema 4.2, que $\ell(f)$ é a soma dos comprimentos dos segmentos de reta que o compõem. Em particular, para toda partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$, $\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ é, realmente, o comprimento da poligonal inscrita em f , com vértices nos pontos $f(t_i)$, $i = 0, \dots, k$.

Exemplo 4.1. O caminho $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \neq 1 \\ (1, 1) & \text{se } t = 1 \end{cases}$ é descontínuo, mas é retificável e $\ell(f) = 4$, considerando $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana.

De fato, pelo lema 4.1, basta considerarmos as partições $\mathcal{P}$ de $[0, 2]$ que contém o ponto $t_i = 1$.

Sejam $0 < \delta \leq 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$ tais que $t_{i-1} = 1 - \delta$ e $t_{i+1} = 1 + \varepsilon$. Então,

$$\ell(f; \mathcal{P}) = (1 - \delta) + \sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1 - \varepsilon \leq 4,$$

pois $1 - \delta + \sqrt{1 + \delta^2} \leq 2$ e $1 - \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \leq 2$, uma vez que $\sqrt{1 + \delta^2} \leq 1 + \delta$ e $\sqrt{1 + \varepsilon^2} \leq 1 + \varepsilon$.

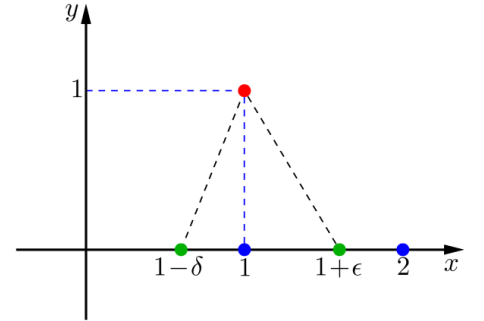


Fig. 6: $\ell(f) = 4$

Logo f é retificável e $\ell(f) \leq 4$. Mas, dada $\mathcal{P}_n = \left\{0, 1 - \frac{1}{n}, 1, 1 + \frac{1}{n}, 2\right\}$, temos que

$$\ell(f; \mathcal{P}_n) = 1 - \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \ell(f),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(f; \mathcal{P}_n) \leq \ell(f).$$

Assim, $\ell(f) = 4$. $\square$

Teorema 4.3. O caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável se, e só se, cada uma de suas funções coordenadas $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ é retificável, ou seja, tem variação limitada.

Prova.

Como ser ou não ser retificável independe da norma, podemos tomar em $\mathbb{R}^n$ a norma da soma. Logo,

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \ell(f_i; \mathcal{P}).$$

Portanto, se f é retificável, temos que

$$\ell(f_i; \mathcal{P}) \leq \ell(f; \mathcal{P}) \leq \ell(f),$$

para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ e todo $i = 1, \dots, n$. Então f_i tem variação limitada para todo $i = 1, \dots, n$.

Por outro lado, se cada f_i tem variação limitada, então

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \ell(f_i; \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n \ell(f_i),$$

para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$. Logo f é retificável. ■

Observação 4.7. Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada e

$$\ell(f) = |f(b) - f(a)|.$$

De fato, suponhamos que f é não-decrescente. Dada $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b\}$ uma partição de $[a, b]$, temos que

$$\ell(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

Corolário 4.1. Se cada função coordenada do caminho f é monótona, então f é retificável.

Exemplo 4.2. O caminho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $f(t) = t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2t} \right)$, se $t \neq 0$ e $f(0) = 0$, é contínuo, mas não é retificável.

De fato, para todo $k = 4m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_k = \left\{ 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$. Então:

$$\begin{aligned} f(0) = 0; \quad f\left(\frac{1}{k+1}\right) = f\left(\frac{1}{4m}\right) = 0; \quad f\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{4m-1} \operatorname{sen} \left(\frac{(4m-1)\pi}{2} \right) = -\frac{1}{4m-1} = -\frac{1}{k}; \\ f\left(\frac{1}{k-1}\right) &= \frac{1}{4m-2} \operatorname{sen}(2m-1)\pi = 0; \quad f\left(\frac{1}{k-2}\right) = \frac{1}{4m-3} \operatorname{sen} \left(\frac{(4m-3)\pi}{2} \right) = \frac{1}{4m-3} = \frac{1}{k-2}, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente, até

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 0; \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 1.$$

Logo,

$$\ell(f; \mathcal{P}_k) = 0 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-2} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1,$$

e, portanto,

$$\ell(f; \mathcal{P}_k) \geq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Como a série harmônica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, temos que o conjunto $\{\ell(f; \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partição de } [0, 1]\}$ não é limitado e, portanto, f não tem variação limitada.

De modo análogo, podemos provar que $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$ é uma função contínua, mas não é retificável.

Então, pelo teorema 4.3, o caminho $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$h(t) = \begin{cases} \left(t, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) & \text{se } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

é contínuo, mas não é retificável. Observe que h é um caminho injetivo (figura 7).

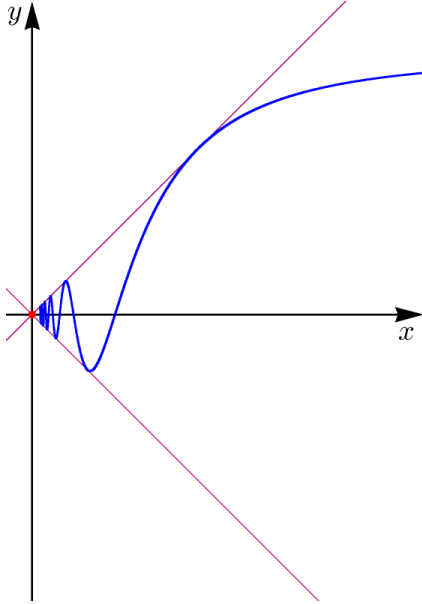


Fig. 7: Caminho $h(t) = \left(t, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right)$

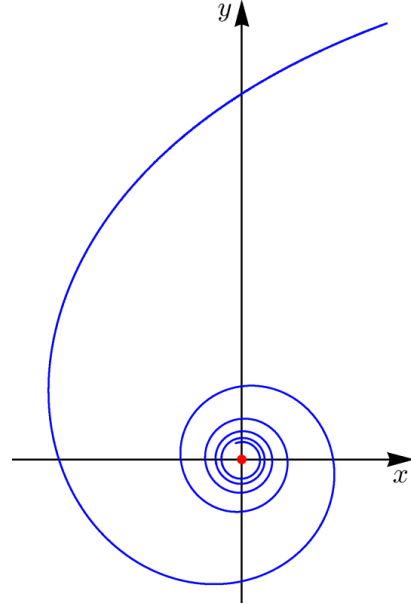


Fig. 8: Caminho $\xi(t) = \left(t \cos \frac{1}{t}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right)$

O **caminho espiralado** $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\xi(t) = \begin{cases} te^{i/t} = \left(t \cos \frac{1}{t}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) & \text{se } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

também tem comprimento infinito, ou seja, não é retificável.

Neste exemplo, quando $t \rightarrow 0$, o ponto $\xi(t)$ tende para a origem $(0, 0)$ dando infinitas voltas em torno dela.

Observe que o caminho ξ também é injetivo (figura 8). $\square$

Observação 4.8. No exemplo 4.1, vimos que um caminho descontínuo pode ser retificável, mas, como veremos abaixo, a descontinuidade de um caminho retificável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ num ponto $c \in [a, b]$ não pode ser arbitrária.

Teorema 4.4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho tal que, para cada $c \in [a, b)$, a restrição $f|_{[a, c]}$ é retificável. Se existe $K > 0$ tal que $\ell(f|_{[a, c]}) \leq K$ para todo $c \in [a, b)$, então existe $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$.*

Analogamente, dado $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f|_{[c, b]}$ é retificável para todo $c \in (a, b]$, com $\ell(f|_{[c, b]}) \leq K$ seja qual for $c \in (a, b]$, então existe $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$.

Prova.

Vamos provar apenas o primeiro resultado, pois o outro demonstra-se de modo análogo.

Seja $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ uma sequência crescente em $[a, b]$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = b$.

Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=2}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq K$, pois $\mathcal{P} = \{a, t_1, \dots, t_k\}$ é uma partição de $[a, c]$, com $c = t_k$.

Logo a série de números reais $\sum_{i \geq 2} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$ é convergente, pois a sequência de suas reduzidas é não-decrescente e limitada superiormente por K . Assim, a sequência das reduzidas da série de vetores $\sum_{i \geq 2} (f(t_i) - f(t_{i-1}))$ é de Cauchy e, portanto, convergente.

Como a reduzida de ordem $k - 1$ desta série é $f(t_k) - f(t_1)$, temos que existe $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k)$. Sendo a sequência crescente $t_k \rightarrow b$ arbitrária, segue, pela Observação 8.4 do Capítulo 1, que o limite $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$ existe. ■

Corolário 4.2. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho retificável. Então existem os limites laterais $\lim_{t \rightarrow c^-} f(t)$ (se $c \neq a$) e $\lim_{t \rightarrow c^+} f(t)$ (se $c \neq b$).*

Definição 4.3. Dizemos que um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **regulado** se, para todo $c \in [a, b]$, existem os limites laterais $f(c^-) = \lim_{t \rightarrow c^-} f(t)$ (se $c \neq a$) e $f(c^+) = \lim_{t \rightarrow c^+} f(t)$ (se $c \neq b$), ou seja, se f só possui descontinuidade de 1ª espécie.

Em particular, o conjunto dos pontos de descontinuidade de um caminho regulado é enumerável (ver *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima, pag. 233, Teorema 11)

Observação 4.9. Todo caminho retificável é regulado.

Definição 4.4. Dizemos que um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **bem regulado** quando ele é regulado e, para todo $c \in (a, b)$,

$$\|f(c^+) - f(c^-)\| = \|f(c^+) - f(c)\| + \|f(c) - f(c^-)\|.$$

Observação 4.10. Quando a norma provém de um produto interno, temos

$$\|f(c^+) - f(c^-)\| = \|f(c^+) - f(c)\| + \|f(c) - f(c^-)\|,$$

se, e só se, $f(c)$ pertence ao segmento de reta cujos extremos são $f(c^-)$ e $f(c^+)$.

Mas, para uma norma arbitrária, podemos apenas afirmar que se $f(c) \in [f(c^-), f(c^+)]$ para todo $c \in (a, b)$, então f é bem regulado.

Observação 4.11. Todo caminho contínuo é bem regulado.

Todo caminho regulado, *lateralmente contínuo*, ou seja, $f(c^+) = f(c)$ ou $f(c^-) = f(c)$ para todo $c \in (a, b)$, é bem regulado.

Observação 4.12. Um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulado é bem regulado se, e só se, para todo $c \in (a, b)$, tem-se

$$\lim_{\substack{t \rightarrow c^+ \\ s \rightarrow c^-}} (\|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(s)\| - \|f(t) - f(s)\|) = 0.$$

Exemplo 4.3. O caminho retificável $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \neq 1 \\ (1, 1) & \text{se } t = 1, \end{cases}$$

não é bem regulado, pois $f(1^+) = f(1^-) = (1, 0)$ e, portanto,

$$\|f(1^+) - f(1^-)\| = 0 \neq \|f(1^+) - f(1)\| + \|f(1^-) - f(1)\|,$$

para qualquer norma $\|\cdot\|$ considerada em $\mathbb{R}^2$.

Neste exemplo, não existe $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(f; \mathcal{P})$, pois, se a partição $\mathcal{P}$ não contém o ponto 1, temos que $\ell(f; \mathcal{P}) = 2$, enquanto que, para partições $\mathcal{Q}$ que contém 1, temos $\lim_{|\mathcal{Q}| \rightarrow 0} \ell(f; \mathcal{Q}) = 4$. $\square$

Teorema 4.5. As seguintes afirmações a respeito de um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são equivalentes:

(1) f é bem regulado e retificável, com $\ell(f) = L$.

(2) existe $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(f; \mathcal{P}) = L$.

Prova.

(1) $\implies$ (2) Dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}_0 = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_k = b\}$ de $[a, b]$ tal que $L - \frac{\varepsilon}{2} < \ell(f; \mathcal{P}_0) \leq L$.

Seja $0 < \delta < \min_{1 \leq i \leq k} \{t_i - t_{i-1}\}$ tal que

$$t_i - \delta < s < t_i < t < t_i + \delta \implies \|f(t) - f(t_i)\| + \|f(t_i) - f(s)\| - \|f(t) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

para todo $i = 1, \dots, k-1$.

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$ com $|\mathcal{P}| < \delta$. Então:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) \leq L,$$

pois $\ell(f; \mathcal{P}_0) \leq \ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0)$, e $0 \leq \ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \ell(f; \mathcal{P}) =$ soma de no máximo $k-1$ termos da forma $\|f(t) - f(t_i)\| + \|f(t_i) - f(s)\| - \|f(t) - f(s)\|$, onde $[s, t]$ é um intervalo de $\mathcal{P}$ que contém

algum t_i em seu interior, pois os demais intervalos de $\mathcal{P}$ são também de $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ e, portanto, desaparecem na diferença $\ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \ell(f; \mathcal{P})$.

Observe que se $|\mathcal{P}| < \delta$, então existe no máximo um t_i no interior de seus subintervalos, pois $0 < \delta < \min_{1 \leq i \leq k} \{t_i - t_{i-1}\}$.

Logo se $|\mathcal{P}| < \delta$, então $t_i - \delta < s < t_i < t < t_i + \delta$, para todo intervalo $[s, t]$ de $\mathcal{P}$ que contém algum t_i em seu interior, e, portanto, $0 \leq \ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \ell(f; \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon(k-1)}{2k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim,

$$L \geq \ell(f; \mathcal{P}) \geq \ell(f; \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - \frac{\varepsilon}{2} > L - \varepsilon.$$

(2) $\implies$ (1) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}| < \delta \implies L - \varepsilon < \ell(f; \mathcal{P}) < L + \varepsilon.$$

Seja $\mathcal{P}_0$ uma partição de $[a, b]$ fixa com $|\mathcal{P}_0| < \delta$.

Então, se $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$, temos que $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}_0| < \delta$ e, portanto,

$$L - \varepsilon < \ell(f; \mathcal{P}) < L + \varepsilon.$$

Logo, como $\sup_{\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0} \{\ell(f; \mathcal{P})\} = \sup_{\mathcal{P}} \{\ell(f; \mathcal{P})\}$, temos que f é retificável e $L - \varepsilon < \ell(f) \leq L + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Assim, $\ell(f) = L$ e, pela observação 4.9, f é regulado.

Vamos provar que f é bem regulado, ou seja, que

$$(\|f(c^+) - f(c)\| + \|f(c) - f(c^-)\| - \|f(c^+) - f(c^-)\|) = 0,$$

para todo $c \in (a, b)$.

Dado $c \in (a, b)$, seja $\mathcal{Q}_k$ uma sequência de partições com $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{Q}_k| = 0$ e $c \notin \mathcal{Q}_k$.

Seja $\mathcal{P}_k = \mathcal{Q}_k \cup \{c\}$. Então $\lim_{k \rightarrow \infty} \ell(f; \mathcal{P}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell(f; \mathcal{Q}_k) = L$ e

$$0 \leq \ell(f; \mathcal{P}_k) - \ell(f; \mathcal{Q}_k) = \|f(c) - f(s_k)\| + \|f(t_k) - f(c)\| - \|f(t_k) - f(s_k)\|,$$

onde $[s_k, t_k]$ é o intervalo de $\mathcal{Q}_k$ que contém c em seu interior.

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{Q}_k| = 0$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c$, onde $s_k < c < t_k$.

Então $\lim_{k \rightarrow \infty} f(s_k) = f(c^-)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = f(c^+)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\ell(f; \mathcal{P}_k) - \ell(f; \mathcal{Q}_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f(c) - f(s_k)\| + \|f(t_k) - f(c)\| - \|f(t_k) - f(s_k)\|) \\ &= \|f(c) - f(c^-)\| + \|f(c^+) - f(c)\| - \|f(c^+) - f(c^-)\|, \end{aligned}$$

e, portanto, f é bem regulado. ■

Corolário 4.3. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho contínuo. Então f é retificável com comprimento L se, e só se, $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(f; \mathcal{P}) = L$.*

Observação 4.13. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho lipschitziano tal que*

$$\|f(s) - f(t)\| \leq K |s - t|$$

para $s, t \in [a, b]$ quaisquer. Dada uma partição $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ de $[a, b]$, temos

$$\ell(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq K \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) = K(b - a).$$

Logo f é retificável e $\ell(f) \leq K(b - a)$.

- Em particular, se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^1 , então f é lipschitziano, pois:
 - $f'([a, b])$ é limitado, ou seja, $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$, uma vez que f' é contínuo e $[a, b]$ é um intervalo compacto;
 - e, portanto, pela Desigualdade do Valor Médio, $\|f(s) - f(t)\| \leq M |s - t|$ para $s, t \in [a, b]$ quaisquer.

Logo *todo caminho de classe C^1 é retificável*.

Teorema 4.6. *Todo caminho $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é retificável com*

$$\ell(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Prova.

Basta mostrar que

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \ell(f; \mathcal{P}) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Pela definição de integral, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta_1$, então

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum (\|f'\|; \mathcal{P}^*) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P}^* = (\mathcal{P}, \xi)$, $\xi = (t_0, \dots, t_{k-1})$, ou seja, $\xi_i = t_{i-1} \in [t_{i-1}, t_i]$, e

$$\sum (\|f'\|; \mathcal{P}^*) = \sum_{i=1}^k \|f'(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}).$$

E, pela diferenciabilidade uniforme de f , existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}| < \delta_2 \implies f(t_i) - f(t_{i-1}) = (f'(t_{i-1}) + \rho_i) (t_i - t_{i-1}),$$

com $|\rho_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Logo se $|\mathcal{P}| < \delta_2$, então:

$$\begin{aligned}
\left| \ell(f; \mathcal{P}) - \sum_{i=1}^k \|f'(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^k \|f'(t_{i-1})\| |t_i - t_{i-1}| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \left| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \|f'(t_{i-1})\| |t_i - t_{i-1}| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1}) - f'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\| \\
&= \sum_{i=1}^k \|\rho_i(t_i - t_{i-1})\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^k |t_i - t_{i-1}| \\
&= \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Então se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ e $|\mathcal{P}| < \delta$, obtemos que:

$$\left| \ell(f; \mathcal{P}) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \left| \ell(f; \mathcal{P}) - \sum (\|f'\|; \mathcal{P}^*) \right| + \left| \sum (\|f'\|; \mathcal{P}^*) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Exemplo 4.4. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Então o comprimento de f é

$$\ell(f) = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

E se $g : [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, temos

$$\ell(g) = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \|g'(t)\| dt = \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |2t| dt = 2 \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t dt = 2t^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 2\pi. \quad \square$$

5 O comprimento de arco como parâmetro

Definição 5.1. Seja $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho. Uma *reparametrização* de g é um caminho $g \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ é uma função monótona sobrejetora (e, portanto, contínua, pelo teorema 10 da pag. 232 do livro *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima).

Quando

- φ é não-decrescente, $\varphi(a) = c$ e $\varphi(b) = d$;
- φ é não-crescente, $\varphi(a) = d$ e $\varphi(b) = c$;
- $\varphi(s) = \varphi(t)$ com $s < t$, φ é constante em $[s, t]$.

Observação 5.1. A reparametrização $f = g \circ \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua $\iff$ o caminho $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo.

Essa observação segue-se do corolário 11.5 do Capítulo 1, pois $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ é uma função contínua do compacto $[a, b]$ sobre o compacto $[c, d]$.

Teorema 5.1. A reparametrização $f = g \circ \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável se, e só se, o caminho $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável. Neste caso, $\ell(g \circ \varphi) = \ell(g)$.

Prova.

($\Leftarrow$) Suponhamos que g é retificável. Seja $\mathcal{P} = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Se $\varphi(s_{i-1}) = \varphi(s_i)$, temos que $\|g(\varphi(s_i)) - g(\varphi(s_{i-1}))\| = 0$.

Logo, para calcularmos o comprimento de $g \circ \varphi$, basta considerarmos as partições $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tais que $\varphi|_{\mathcal{P}}$ seja injetora. Neste caso, $\mathcal{Q} = \varphi(\mathcal{P})$ é uma partição de $[c, d]$ e

$$\ell(g \circ \varphi; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|g(\varphi(s_i)) - g(\varphi(s_{i-1}))\| = \ell(g; \mathcal{Q}) \leq \ell(g).$$

Assim, $g \circ \varphi$ é retificável e $\ell(g \circ \varphi) \leq \ell(g)$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $g \circ \varphi$ é retificável e seja $\mathcal{Q} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ uma partição de $[c, d]$.

Então para todo $i = 0, 1, \dots, k$, existe $s_i \in [a, b]$ tal que $\varphi(s_i) = t_i$.

Se φ é não-decrescente, podemos tomar $s_0 = a$, $s_k = b$, e teremos $s_{i-1} < s_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, k$, ou seja, $\mathcal{P} = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ é uma partição de $[a, b]$. Logo,

$$\ell(g; \mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^k \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \|g(\varphi(s_i)) - g(\varphi(s_{i-1}))\| = \ell(g \circ \varphi; \mathcal{P}).$$

Se φ é não-crescente, podemos tomar $s_0 = b$, $s_k = a$, e teremos $s_{i-1} > s_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, k$.

Então $\mathcal{P} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$, onde $\xi_i = s_{k-i}$, é uma partição de $[a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} \ell(g; \mathcal{Q}) &= \sum_{i=1}^k \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \|g(\varphi(s_i)) - g(\varphi(s_{i-1}))\| \\ &= \sum_{i=1}^k \|g \circ \varphi(\xi_{k-i}) - g \circ \varphi(\xi_{k-(i-1)})\| = \sum_{j=1}^k \|g \circ \varphi(\xi_j) - g \circ \varphi(\xi_{j-1})\| \\ &= \ell(g \circ \varphi; \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Logo $\ell(g; \mathcal{Q}) = \ell(g \circ \varphi; \mathcal{P}) \leq \ell(g \circ \varphi)$ para toda partição $\mathcal{Q}$ de $[c, d]$.

Então g é retificável e $\ell(g) \leq \ell(g \circ \varphi)$ e, portanto, $\ell(g) = \ell(g \circ \varphi)$. ■

Definição 5.2. Dizemos que um caminho retificável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *parametrizado pelo comprimento de arco* ou *cadenciado*, quando $\ell(f|_{[a,t]}) = t - a$ para todo $t \in [a, b]$.

Neste caso, se $s < t$, então $\ell(f|_{[s,t]}) = t - s$.

Teorema 5.2. Um caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é parametrizado pelo comprimento de arco se, e só se, $\|f'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

Prova.

Se f é parametrizado pelo comprimento de arco, então $\int_a^t \|f'(s)\| ds = t - a$ para todo $t \in [a, b]$.

Logo $|f'(t)| = \frac{d}{dt} \int_a^t \|f'(s)\| ds = 1$.

Reciprocamente, se $\|f'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$, então

$$\ell(f|_{[a,t]}) = \int_a^t \|f'(s)\| ds = \int_a^t 1 ds = t - a.$$

■

Exemplo 5.1. O caminho $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, é parametrizado pelo comprimento de arco, pois $f \in C^\infty$ e $\|f'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. □

Lema 5.1. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo retificável, então a função $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$, $L = \ell(f)$, definida por $\sigma(t) = \ell(f|_{[a,t]})$, é contínua. Como $\sigma(b) = L$, σ é sobrejetiva.

Prova.

Vamos mostrar que σ é contínua no ponto a . Como σ é monótona não-decrescente, existe

$$A = \lim_{t \rightarrow a^+} \sigma(t) = \inf\{\sigma(t) \mid t \in (a, b]\}$$

Suponhamos, por absurdo, que $A > 0 = \sigma(a)$. Então existe $c_1 \in (a, b]$ tal que $A \leq \sigma(c_1) < \frac{4A}{3}$.

Logo $A \leq \sigma(t) \leq \sigma(c_1) < \frac{4A}{3}$ para todo $t \in (a, c_1]$, e, portanto, $\ell(f|_{[t,c_1]}) = \sigma(c_1) - \sigma(t) < \frac{A}{3}$.

Por outro lado, sendo f contínua em a , existe $c_2 \in (a, b)$ tal que $t \in [a, c_2] \implies \|f(t) - f(a)\| < \frac{A}{3}$.

Seja $c = \min\{c_1, c_2\}$. Então, para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, c]$, temos

$$\ell(f|_{[a,c]}; \mathcal{P}) = \|f(t_1) - f(a)\| + \sum_{i=2}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < \frac{A}{3} + \ell(f|_{[t_1,c]}) < \frac{A}{3} + \frac{A}{3} = \frac{2A}{3}.$$

Logo $\sigma(c) = \ell(f|_{[a,c]}) \leq \frac{2A}{3} < A$, uma contradição.

De modo análogo, podemos provar que

$$\sup\{\sigma(t) \mid t \in [a, b]\} = L = \sigma(b),$$

e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \sigma(t) = \sup\{\sigma(t) \mid t \in [a, b)\} = L = \sigma(b),$$

ou seja, σ é contínua no ponto b .

No caso geral, tome $t_0 \in (a, b)$. Como $f|_{[a, t_0]} : [a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo e retificável, temos, pelo observado acima, que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \sigma(t) = \sigma(t_0)$.

E, por outro lado, como $f|_{[t_0, b]} : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho contínuo retificável e

$$\psi(t) = \ell(f|_{[t_0, t]}) = \sigma(t) - \ell(f|_{[a, t_0]}),$$

temos, pelo provado acima, que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \psi(t) = \psi(t_0) = 0$ e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \sigma(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} (\psi(t) + \ell(f|_{[a, t_0]})) = \ell(f|_{[a, t_0]}) = \sigma(t_0). \blacksquare$$

Teorema 5.3. *Todo caminho contínuo retificável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a reparametrização de um caminho parametrizado pelo comprimento de arco $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L = \ell(f)$, o qual é, necessariamente, contínuo.*

Prova.

Consideremos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \sigma \downarrow & \nearrow g & \\ [0, L] & & \end{array}$$

Dado $s < t$ em $[a, b]$, temos $\sigma(t) = \sigma(s) + \ell(f|_{[s, t]})$.

Portanto, $\sigma(s) = \sigma(t) \implies \ell(f|_{[s, t]}) = 0 \implies f$ é constante em $[s, t] \implies f(s) = f(t)$.

Definimos $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ da seguinte maneira: dado $u \in [0, L]$, existe $t \in [a, b]$ tal que $\sigma(t) = u$. Temos, então, $g(u) = f(t)$. O caminho g está bem definido, pois se $\sigma(t) = \sigma(s) = u$, então $f(s) = f(t)$.

Como $f = g \circ \sigma$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo e $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é contínua e sobrejetora, temos, pelo corolário 11.5 do capítulo 1, que g é contínuo. E, pelo teorema 5.1, g é retificável, uma vez que f é retificável.

Para provar que g é parametrizado pelo comprimento de arco, tome $s \in [0, L]$ arbitrário. Então existe $t \in [a, b]$ tal que $\sigma(t) = s$ e, portanto, pelo teorema 5.1,

$$\ell(g|_{[0, s]}) = \ell(g \circ \sigma|_{[a, t]}) = \ell(f|_{[a, t]}) = \sigma(t) = s. \blacksquare$$

Corolário 5.1. *Um caminho contínuo é retificável se, e só se, é a reparametrização de um caminho lipschitziano.*

Prova.

($\Leftarrow$) Como todo caminho lipschitziano é retificável, temos, pelo teorema 5.1, que toda reparametrização de um caminho lipschitziano é retificável.

($\Rightarrow$) Se f é um caminho contínuo retificável, então $f = g \circ \sigma$, onde g é parametrizado pelo comprimento de arco.

Como $\|g(t) - g(s)\| \leq \ell(g|_{[s,t]}) = |t - s|$, temos que g é lipschitziano. ■

Observação 5.2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho contínuo retificável, e seja um caminho parametrizado pelo comprimento de arco $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, do qual f é uma reparametrização.

Então, se $f = g \circ \psi$, onde $\psi : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é monótona não-decrescente e sobrejetora, temos:

$$\psi(t) = \ell(g|_{[0, \psi(t)]}) = \ell(g \circ \psi|_{[a, t]}) = \ell(f|_{[a, t]}).$$

Logo ψ é determinada de modo único e, portanto, o caminho $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizado pelo comprimento de arco tal que $f = g \circ \psi$, com ψ não-decrescente, também o é.

Agora, se $\psi : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é monótona não-crescente e sobrejetora, temos que

$$\psi(t) = \ell(g|_{[0, \psi(t)]}) = \ell(g \circ \psi|_{[t, b]}) = \ell(f|_{[t, b]}) = \ell(f|_{[a, b]}) - \ell(f|_{[a, t]}) = L - \sigma(t),$$

onde $\sigma(t) = \ell(f|_{[a, t]})$.

Logo $f(t) = g(\psi(t)) = g(L - \sigma(t))$ e, portanto, dado $s = \sigma(t) \in [0, L]$, temos que

$$g(L - s) = f(t) = \tilde{g}(\sigma(t)) = \tilde{g}(s),$$

onde $\tilde{g} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o caminho parametrizado pelo comprimento de arco tal que $f = \tilde{g} \circ \sigma$.

Assim, $g(s) = \tilde{g}(L - s)$ para todo $s \in [0, L]$, ou seja, g é o caminho $\tilde{g}$ percorrido em sentido contrário.

Observação 5.3. Um caminho pode ser retificável sem ser lipschitziano. Por exemplo, o caminho $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $f(t) = (t, \sqrt{t})$ é retificável, pois suas funções coordenadas são monótonas, mas não é lipschitziano, uma vez que a função $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \in [0, 1]$, não é lipschitziana.

Definição 5.3. Dizemos que um caminho diferenciável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular* quando $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Observação 5.4. Seja $f : I \rightarrow J$ uma função regular, ou seja, diferenciável com $f'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, onde $f(I) = J$, I, J intervalos da reta.

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário para a derivada (teorema de Darboux), temos que ou $f'(t) > 0$ para todo $t \in I$ e f é, então, monótona crescente, ou $f'(t) < 0$ para todo $t \in I$, sendo f , portanto, monótona decrescente.

Em particular, para $n = 1$, um caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regular é injetivo, o que não é verdade, em geral, quando $n > 1$.

Por exemplo, o caminho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(t) = (\cos t, \sin t)$, é regular, mas não é injetivo se $b - a > 2\pi$.

Se $f : I \rightarrow J$ é regular e $f(I) = J$, temos, pelo Teorema da Função Inversa (ver *Curso de Análise*, Vol I de E. Lima, pag. 274, corolário 6), que $f^{-1} : J \rightarrow I$ é diferenciável e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

para todo $y \in J$.

E, também, se $f \in C^k$, então $f^{-1} \in C^k$, pois:

- Se $f \in C^1$, então $f' \circ f^{-1}$ é contínua, e, portanto, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ é contínua, ou seja, f^{-1} é de classe C^1 .
- Suponhamos, por indução, que se $f \in C^{k-1}$, então $f^{-1} \in C^{k-1}$.

Assim, se $f \in C^k$, então $f' \in C^{k-1}$, e, portanto, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ é de classe C^{k-1} , ou seja, f^{-1} é de classe C^k .

Definição 5.4. Dizemos que uma função diferenciável bijetora $f : I \rightarrow J$ é um *difeomorfismo* quando $f^{-1} : J \rightarrow I$ é diferenciável.

Em particular, todo difeomorfismo $f : I \rightarrow J$ é regular, pois $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ e, pela regra da cadeia, $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1$ para todo $y \in J$.

E, reciprocamente, se $f : I \rightarrow J = f(I)$ é uma função regular, então, pela observação acima, f é um difeomorfismo.

No teorema abaixo, vamos considerar $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana.

Teorema 5.4. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho regular de classe C^k ($k \geq 1$), $L = \ell(f)$ e $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho parametrizado pelo comprimento de arco do qual $f = g \circ \sigma$ é uma reparametrização. Então $g \in C^k$ e $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é um difeomorfismo de classe C^k . Em particular, $g = f \circ \sigma^{-1}$ é uma reparametrização de f pelo comprimento de arco.

Prova.

- Se σ é monótona não-decrescente, temos, pela observação 5.2, que

$$\sigma(t) = \ell(f|_{[a,t]}) = \int_a^t \|f'(s)\| \, ds.$$

Logo $\sigma'(t) = \|f'(t)\| > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Como $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, temos que σ' é diferenciável e

$$\sigma''(t) = \frac{\langle f''(t), f'(t) \rangle}{\|f'(t)\|},$$

caso $f \in C^k$, $k \geq 2$.

Então, se $f \in C^1$, $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é um difeomorfismo de classe C^1 , pois $\sigma' = \|\cdot\| \circ f'$ é contínua.

E, se $f \in C^k$, $k \geq 2$, σ' é de classe C^{k-1} , ou seja, $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é um difeomorfismo de classe C^k .

De fato, se $k = 2$, σ'' é contínuo, pois $\sigma''(t) = \frac{\langle f''(t), f'(t) \rangle}{\|f'(t)\|}$, $t \in [a, b]$, e as funções f' e f'' são contínuas. Então σ é de classe C^2 .

Suponhamos, por indução, que se $f \in C^k$, $k \geq 2$, então $\sigma' \in C^{k-1}$.

Seja $f \in C^{k+1}$. Então f' , f'' e σ' são de classe C^{k-1} e, portanto, σ'' é de classe C^{k-1} . Assim, σ' é de classe C^k .

- No caso em que σ é monótona não-crescente, ou seja,

$$\sigma(t) = L - \int_a^t \|f'(s)\| \, ds,$$

verifica-se, de modo análogo ao anterior, que $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L]$ é um difeomorfismo de classe C^k .

Em qualquer caso, $g = f \circ \sigma^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^k , pois f e σ^{-1} são de classe C^k . ■

6 A função-ângulo

Seja $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho tal que $\|z(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Podemos, portanto, escrever $z : [a, b] \rightarrow S^1$.

Uma **função-ângulo** para o caminho $z : [a, b] \rightarrow S^1$ é uma função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ para todo $t \in [a, b]$.

Seja $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ a função exponencial dada por $\xi(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$.

Então $\theta : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função-ângulo para o caminho z se, e só se, $z = \xi \circ \theta$.

Teorema 6.1. *Todo caminho $z : [\alpha, \beta] \longrightarrow S^1$ de classe C^r , $r \geq 1$, possui uma função-ângulo de classe C^r . Mais precisamente, dado $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z(\alpha) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, z admite uma única função-ângulo $\theta : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r tal que $\theta(\alpha) = \theta_0$.*

Prova.

Unicidade (válida também para funções-ângulo contínuas).

Sejam $\theta, \varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $\xi \circ \theta = \xi \circ \varphi = z$.

Então $\theta(t) - \varphi(t)$ é um múltiplo inteiro de 2π para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Como a função $t \longmapsto \frac{\theta(t) - \varphi(t)}{2\pi}$ é contínua e $\frac{\theta(t) - \varphi(t)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, temos que $\theta(t) - \varphi(t) = 2\pi k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ fixo.

Logo, se $\varphi(\alpha) = \theta(\alpha) = \theta_0$, temos $k = 0$ e, portanto, $\varphi(t) = \theta(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Existência

Seja $z : [\alpha, \beta] \longrightarrow S^1$ um caminho de classe C^r tal que $z(\alpha) = \xi(\theta_0)$.

Então, se $z(t) = (x(t), y(t))$, as funções coordenadas $x, y : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^r , com $x(\alpha) = \cos \theta_0$ e $y(\alpha) = \sin \theta_0$.

Como $|z(t)| = 1$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, temos que

$$\langle z'(t), z(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle z(t), z(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$, ou seja, $z'(t) \perp z(t)$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Portanto, $z'(t)$ é um múltiplo do vetor $w(t) = (-y(t), x(t))$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Assim, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $z'(t) = \lambda(t) w(t)$, ou seja, $x'(t) = -\lambda(t) y(t)$ e $y'(t) = \lambda(t) x(t)$.

Além disso, como $\lambda(t) = \langle w(t), z'(t) \rangle$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, temos que λ é de classe C^{r-1} .

Seja $\theta : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{\alpha}^t \lambda(s) ds.$$

Então $\theta(\alpha) = \theta_0$ e $\theta'(t) = \lambda(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Logo θ é de classe C^r .

Agora vamos provar que $x(t) = \cos \theta(t)$ e $y(t) = \sin \theta(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

De fato, como $\theta' = \lambda$, $x' = -\lambda y$ e $y' = \lambda x$, temos que:

- $$\begin{aligned}
 (x(t) \cos \theta(t) + y(t) \sin \theta(t))' &= x'(t) \cos \theta(t) - x(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\
 &\quad + y'(t) \sin \theta(t) + y(t) \theta'(t) \cos \theta(t) \\
 &= -\lambda(t) y(t) \cos \theta(t) - x(t) \lambda(t) \sin \theta(t) \\
 &\quad + \lambda(t) x(t) \sin \theta(t) + y(t) \lambda(t) \cos \theta(t) = 0
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 (y(t) \cos \theta(t) - x(t) \sin \theta(t))' &= y'(t) \cos \theta(t) - y(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\
 &\quad - x'(t) \sin \theta(t) - x(t) \theta'(t) \cos \theta(t) \\
 &= \lambda(t) x(t) \cos \theta(t) - y(t) \lambda(t) \sin \theta(t) \\
 &\quad + \lambda(t) y(t) \sin \theta(t) - x(t) \lambda(t) \cos \theta(t) = 0,
 \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$. Então,

$$\begin{aligned}
 x(t) \cos \theta(t) + y(t) \sin \theta(t) &= x(a) \cos \theta(a) + y(a) \sin \theta(a) \\
 &= \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1
 \end{aligned} \tag{I}$$

e

$$\begin{aligned}
 y(t) \cos \theta(t) - x(t) \sin \theta(t) &= y(a) \cos \theta(a) - x(a) \sin \theta(a) \\
 &= \sin \theta(a) \cos \theta(a) - \cos \theta(a) \sin \theta(a) = 0,
 \end{aligned} \tag{II}$$

para todo $t \in [a, b]$.

Como, para todo $t \in [a, b]$,

$$\{(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
 z(t) &= (x(t), y(t)) \\
 &= \langle (x(t), y(t)), (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \rangle (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \\
 &\quad + \langle (x(t), y(t)), (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \rangle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)),
 \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$.

Logo, por (I) e (II), obtemos

$$z(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

para todo $t \in [a, b]$. ■

Corolário 6.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ um caminho de classe C^r , $r \geq 1$. Dado $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = \|f(a)\| (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, existe uma única função de classe C^r , $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\theta(a) = \theta_0$ e $f(t) = \|f(t)\| (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, para todo $t \in [a, b]$.*

Prova.

Basta tomar a função-ângulo θ do caminho $z(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ com $\theta(a) = \theta_0$, uma vez que, pela observação 1.8, z é de classe C^r . ■

Corolário 6.2. *Seja $f : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ um caminho de classe C^r por partes. Dado $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = \|f(\alpha)\| (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, existe uma única função de classe C^r por partes $\theta : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(\alpha) = \theta_0$ e $f(t) = \|f(t)\| (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, para todo $t \in [\alpha, b]$.*

Prova.

Seja $\mathcal{P} = \{t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_k = b\}$ uma partição do intervalo $[\alpha, b]$ tal que $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^r , para todo $i = 1, \dots, k$.

Então, pelo teorema anterior, $f|_{[\alpha, t_1]}$ possui uma função-ângulo $\theta_1 : [\alpha, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r tal que $\theta_1(\alpha) = \theta_0$. Como $f|_{[t_1, t_2]}$ é de classe C^r , existe uma função-ângulo $\theta_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\theta_2(t_1) = \theta_1(t_1)$, para o caminho $f|_{[t_1, t_2]}$.

Prosseguindo deste modo, obtemos, para cada $i = 2, \dots, k$, uma função-ângulo de classe C^r $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ para o caminho $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$, com $\theta_i(t_{i-1}) = \theta_{i-1}(t_{i-1})$.

Então, a função $\theta : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\theta(t) = \theta_i(t)$, se $t \in [t_{i-1}, t_i]$, é contínua e $\theta|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^r para todo $i = 1, \dots, k$. Logo θ é de classe C^r por partes e é a única função-ângulo de classe C^r por partes do caminho f tal que $\theta(\alpha) = \theta_0$. ■

Observação 6.1. *Seja $f : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ um caminho de classe C^r , $r \geq 1$. Se uma função contínua $\theta : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(t) = \|f(t)\| (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ para todo $t \in [\alpha, b]$, então θ é uma função de classe C^r .*

De fato, seja $\varphi : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função-ângulo de classe C^r para o caminho $z(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$ tal que $\varphi(\alpha) = \theta(\alpha)$. Como a unicidade no teorema 6.1 foi provada para funções-ângulo contínuas, temos que $\theta = \varphi$ e, portanto, θ é de classe C^r .

Observação 6.2. *Se $z : [\alpha, b] \rightarrow S^1$ é um caminho contínuo e $z(\alpha) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, então existe uma única função-ângulo $\theta : [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\theta(\alpha) = \theta_0$ e*

$$z(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

para todo $t \in [\alpha, b]$ (ver exercício 7.1).