



# Capítulo 4

## Aplicações diferenciáveis

### 1 Diferenciabilidade de uma aplicação

**Definição 1.1.** Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é *diferenciável no ponto  $a \in U$*  quando existe uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , com  $a + v \in U$ , tem-se

$$f(a + v) = f(a) + Tv + r(v), \quad (*)$$

onde  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ .

Seja a aplicação  $\rho : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por  $\rho(v) = \frac{r(v)}{\|v\|}$ , se  $v \neq 0$ , e  $\rho(0) = 0$ , onde  $U_0 = \{v \in \mathbb{R}^m \mid a + v \in U\}$  é um aberto que contém a origem. Então  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  se, e só se,  $\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$ , ou seja,  $\rho$  é contínua na origem.

**Observação 1.1.** O fato de uma aplicação ser ou não diferenciável num determinado ponto independe das normas tomadas em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ .

**Observação 1.2.** Toda aplicação diferenciável no ponto  $a$  é contínua neste ponto, pois

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = f(a) + \lim_{v \rightarrow 0} Tv + \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} \|v\| = f(a).$$

**Definição 1.2.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . A *derivada direcional de  $f$  num ponto  $a \in U$ , relativamente a um vetor  $v \in \mathbb{R}^m$* , é o limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n,$$

quando tal limite existe.

Seja  $\delta > 0$  tal que o segmento  $(a - \delta v, a + \delta v)$  está contido em  $U$  e considere o caminho retilíneo  $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ , dado por  $\lambda(t) = a + tv$ . Então  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  é o vetor velocidade do caminho  $f \circ \lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  no instante  $t = 0$ , pois

$$(f \circ \lambda)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \lambda(t) - f \circ \lambda(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

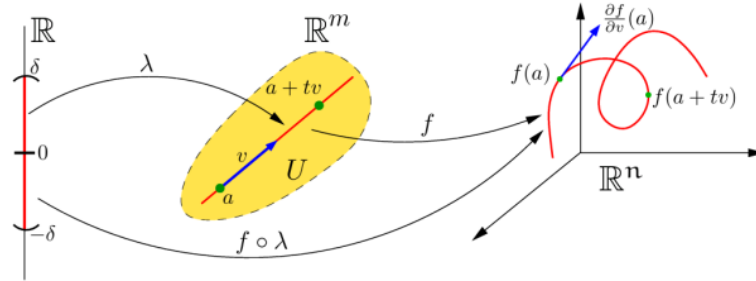


Fig. 1: Derivada direcional de  $f$  em  $a$  relativamente a  $v$

Se  $f = (f_1, \dots, f_n)$  então

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right).$$

Quando  $v = e_j$  é o  $j$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^m$ , escrevemos  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$  em vez de  $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

**Observação 1.3.** Seja  $f$  diferenciável no ponto  $a$ . Então, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  e para  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno,

$$f(a + tv) - f(a) = T(tv) + \rho(tv)\|tv\|,$$

com  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv) = 0$ . Como  $T(tv) = t T_v$  e  $\|tv\| = |t| \|v\|$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T_v \pm \lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv)\|v\| = T_v,$$

Logo  $T_v = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ . Em particular, obtemos que a transformação linear que satisfaz  $(*)$  é única. Esta transformação, designada por  $f'(a)$  ou  $Df(a)$ , é chamada a **derivada de  $f$  no ponto  $a$** .

Para  $n = 1$ , a derivada  $f'(a)$  é a diferencial  $df(a)$  estudada no capítulo anterior.

**Definição 1.3.** A matriz  $n \times m$  da transformação linear  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , é chamada a **matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $a$**  e é indicada pela notação  $Jf(a)$ .

As  $m$  colunas da matriz Jacobiana  $Jf(a)$  são os vetores

$$f'(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,  $Jf(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ , onde  $f_1, \dots, f_n : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  são as *funções-coordenada de  $f$* .

Como, para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ ,

$$f'(a)v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \alpha_j = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \alpha_j \right)$$

e, como  $f(a+v) = f(a) + f'(a)v + r(v)$ , obtemos que

$$f_i(a+v) = f_i(a) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \alpha_j + r_i(v),$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Então  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , uma vez que  $r(v) = (r_1(v), \dots, r_n(v))$  e  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Ou seja, se  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ , então cada função-coordenada de  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a)v = (df_1(a)v, \dots, df_n(a)v)$ .

Reciprocamente, se cada função-coordenada de  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ , temos que

$$f_i(a+v) = f_i(a) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \alpha_j + r_i(v),$$

com  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_i(v)}{\|v\|} = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Assim, se  $r(v) = (r_1(v), \dots, r_n(v))$ ,

$$f(a+v) = f(a) + \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \alpha_j \right) + r(v),$$

com  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Logo  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  e

$$f'(a)v = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \alpha_j \right) = (df_1(a)v, \dots, df_n(a)v).$$

Com isto, provamos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** *A aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e só se, cada uma de suas funções-coordenada  $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é diferenciável no ponto  $a$ . Neste caso,*

$$f'(a)v = (df_1(a)v, \dots, df_n(a)v),$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

**Observação 1.4.** Para cada  $i = 1, \dots, n$ , a  $i$ -ésima linha  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right)$  da matriz Jacobiana  $Jf(a)$  é a matriz  $1 \times m$  da diferencial,  $df_i(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ , da  $i$ -ésima função-coordenada  $f_i$  de  $f$  em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^m$ .

**Corolário 1.1.** A aplicação  $f = (g, h) : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , dada por  $f(x) = (g(x), h(x))$ , é diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e só se, as aplicações coordenadas  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$  são diferenciáveis no ponto  $a$ . Neste caso,  $f'(a) = (g'(a), h'(a)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

**Prova.**

Basta observar que as funções-coordenada de  $f$  são as funções-coordenada de  $g$  seguidas das funções-coordenada de  $h$ . ■

**Observação 1.5.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável no ponto  $a \in U$ . Se  $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$  é um caminho qualquer diferenciável em  $t = 0$ , com  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(0) = v$ , então

$$f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0).$$

De fato, pela observação 3.9 do capítulo 3, temos que  $(f_i \circ \lambda)'(0) = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Logo, como

$$f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right),$$

temos que

$$f'(a)v = ((f_1 \circ \lambda)'(0), \dots, (f_n \circ \lambda)'(0)) = (f \circ \lambda)'(0).$$

**Definição 1.4.** Dizemos que uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é *diferenciável no aberto  $U$*  quando é diferenciável em todos os pontos de  $U$ . Neste caso, fica definida a *aplicação derivada*

$$f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

que associa a cada ponto  $x \in U$ , a transformação linear  $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , derivada de  $f$  no ponto  $x$ . Fica também definida, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , a aplicação  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , cujo valor num ponto  $x \in U$  é a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x)v$ .

**Observação 1.6.** O espaço vetorial  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  das transformações lineares  $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  possui uma norma natural, dada por:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Se identificarmos  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  com  $\mathbb{R}^{mn}$ , fazendo corresponder a cada transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  sua matriz em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , as funções-coordenada de uma aplicação  $\psi : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ , definida num conjunto  $X \subset \mathbb{R}^p$ , são as  $mn$  funções  $\psi_{ij} : X \longrightarrow \mathbb{R}$  tais que, para cada  $x \in X$ ,  $\psi_{ij}(x)$  é a  $(i, j)$ -entrada da matriz da transformação linear  $\psi(x)$ .

Resulta, então, do teorema 6.11 do capítulo 1, que uma aplicação  $\psi : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é contínua se, e só se, cada uma das funções  $\psi_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

Também, pelo teorema 1.1 acima, uma aplicação  $\varphi : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é diferenciável no ponto  $\alpha \in U$  se, e só se, cada uma das funções  $\varphi_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $\alpha$ .

**Teorema 1.2.** *Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $f$  é diferenciável e a aplicação derivada  $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é contínua;
- (2) As funções-coordenada  $f_1, \dots, f_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$  da aplicação  $f$  possuem derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  contínuas;
- (3) Para cada  $v \in \mathbb{R}^m$ , existe a derivada direcional  $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x)$  em todo ponto  $x \in U$  e a aplicação  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

*Prova.*

(1) $\implies$ (2) Por serem as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  as funções-coordenada da aplicação  $f'$ .

(2) $\implies$ (1) Pelo teorema 3.2 do capítulo 3, (2) implica que cada função-coordenada  $f_i$  é diferenciável e, portanto,  $f$  é diferenciável pelo teorema 1.1 acima. Além disso,  $f'$  é contínua, pois suas funções-coordenada,  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , são contínuas.

(2) $\implies$ (3) Seja  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ . Pelo provado acima,  $f$  é diferenciável. Então

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \alpha_j.$$

Como cada função-coordenada,  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , de  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  é contínua, temos que  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  é contínua para todo  $j = 1, \dots, m$ . Logo, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

(3) $\implies$ (2) Tomando  $v = e_j$ , temos, por hipótese, que a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  existe e é contínua, para todo  $j = 1, \dots, m$ .

Logo, cada uma das funções-coordenada  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  existe e é contínua. ■

**Definição 1.5.** Dizemos que uma aplicação  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é de *classe  $C^1$*  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  quando  $f$  cumpre uma das (e portanto todas as) condições do teorema acima.

Em particular,  $f \in C^1$  se, e só se, cada uma das suas funções-coordenada é de classe  $C^1$ .

**Definição 1.6.** Dizemos que uma aplicação  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é *duas vezes diferenciável no ponto  $\alpha \in U$*  quando  $f$  é diferenciável em  $U$  e satisfaz as condições abaixo:

- (1) A aplicação derivada  $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é diferenciável no ponto  $a$ ;
- (2) Cada derivada parcial  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a$ ;
- (3) Para cada  $v \in \mathbb{R}^m$ , a aplicação derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a$ .

Como no teorema 1.2, podemos mostrar que as três condições acima são equivalentes. Então,  $f$  satisfaz a uma delas se, e só se, satisfaz a todas. Assim,  $f$  é duas vezes diferenciável no ponto  $a$  se, e só se, cada função-coordenada  $f_i$  é duas vezes diferenciável no ponto  $a$ .

**Definição 1.7.** Quando  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é duas vezes diferenciável no ponto  $a \in U$ , sua *derivada segunda no ponto  $a$*  é a aplicação bilinear

$$f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

cujo valor no ponto  $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  é o vetor

$$f''(a) \cdot v \cdot w = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right) (a) \in \mathbb{R}^n.$$

Escrevemos  $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(a)$  em vez de  $\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right) (a)$ .

Se  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  e  $w = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , então

$$f''(a) \cdot v \cdot w = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \beta_k \right) (a) = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \beta_k \alpha_j,$$

é o vetor de  $\mathbb{R}^n$  cujas coordenadas são:

$$f''_i(a) \cdot v \cdot w = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) \beta_k \alpha_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pelo teorema de Schwarz para funções, segue que  $f''_i(a) \cdot v \cdot w = f''_i(a) \cdot w \cdot v$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Logo,

$$f''(a) \cdot v \cdot w = f''(a) \cdot w \cdot v,$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(a)$$

quando  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é duas vezes diferenciável no ponto  $a$ .

Isto prova o seguinte resultado:

### **Teorema 1.3. (Teorema de Schwarz para aplicações)**

Se a aplicação  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é duas vezes diferenciável no ponto  $a \in U$ , então a derivada segunda  $f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação bilinear simétrica.

**Observação 1.7.** Na realidade, a derivada segunda de uma aplicação diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $a \in U$  é uma transformação linear  $f''(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ , pois  $f''(a) = (f')'(a)$  e  $f' : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ . Mas, como existe um isomorfismo natural entre  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$  e o espaço  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  das transformações bilineares de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ , que associa a cada transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  a transformação bilinear  $\tilde{T} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\tilde{T}(v, w) = (Tv)w$ , podemos considerar a derivada segunda como sendo a transformação bilinear  $f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\begin{aligned} f''(a)(v, w) &= ((f')'(a) \cdot v) \cdot w = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial x_j \partial x_1} \alpha_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial x_j \partial x_m} \alpha_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial x_j \partial x_1} \alpha_j & \cdots & \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial x_j \partial x_m} \alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_1(a)}{\partial x_j \partial x_k} \alpha_j \beta_k, \dots, \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_n(a)}{\partial x_j \partial x_k} \alpha_j \beta_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_k} \alpha_j \beta_k, \end{aligned}$$

como foi definida anteriormente, onde  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  e  $w = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ .

**Definição 1.8.** Dizemos que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^2$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  quando  $f$  é diferenciável e sua derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é de classe  $C^1$ .

Pelo teorema 1.2, isto equivale a dizer que para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$  arbitrários, existem e são contínuas as derivadas parciais de segunda ordem  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  das funções-coordenada de  $f$ , ou seja, cada função-coordenada  $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$  de  $f'$  é de classe  $C^1$ , ou ainda, cada função-coordenada  $f_i$  de  $f$  é de classe  $C^2$ .

E também,  $f$  é de classe  $C^2$  se, e só se, a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Por indução, dizemos que a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é  **$k$ -vezes diferenciável no ponto  $a \in U$**  quando  $f$  é diferenciável em  $U$  e a aplicação derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é  $(k-1)$ -vezes diferenciável no ponto  $a$ , ou seja, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $(k-1)$ -vezes diferenciável no ponto  $a$ , ou ainda, as derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções  $(k-1)$ -vezes diferenciáveis no ponto  $a$ .



Para verificar as equivalências acima, basta provar, por indução, que uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é  $k$ -vezes diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e só se, cada função-coordenada  $f_i$  de  $f$  é  $k$ -vezes diferenciável no ponto  $a$ .

Quando  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é  $k$ -vezes diferenciável no ponto  $a$ , definimos a  **$k$ -ésima derivada** (ou **derivada de ordem  $k$** ) de  $f$  no ponto  $a$  como sendo a aplicação  $k$ -linear

$$f^{(k)}(a) : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

cujo valor no ponto  $(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$  é o vetor

$$f^{(k)}(a) \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_k = \frac{\partial^k f}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_k}(a) \in \mathbb{R}^n.$$

Como consequência do Teorema de Schwarz (ver observação 7.2 do capítulo 3), a  $k$ -ésima derivada  $f^{(k)}(a)$  é uma aplicação  $k$ -linear simétrica.

Por exemplo, se  $k = 3$ ,  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $v = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  e  $w = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ , temos:

$$f^{(3)}(a) \cdot u \cdot v \cdot w = \sum_{i,j,k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \gamma_k \beta_j \alpha_i.$$

**Definição 1.9.** Uma aplicação  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é **de classe  $C^k$**  quando é diferenciável e sua derivada  $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é uma aplicação de classe  $C^{k-1}$ .

Pode-se provar, por indução, que uma aplicação  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$  se, e só se, cada função coordenada  $f_i$  de  $f$  é de classe  $C^k$ .

Assim,  $f$  é de classe  $C^k$  se, e só se, existem e são contínuas em  $U$  todas as derivadas parciais de ordem  $\leq k$  das funções-coordenada de  $f$ , ou ainda, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , a aplicação  $\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^{k-1}$ .

Para completar, dizemos que  $f$  é de **classe  $C^0$**  quando  $f$  é contínua, e é **de classe  $C^\infty$**  quando  $f \in C^k$  para todo  $k = 0, 1, \dots$

**Observação 1.8.** Se  $f \in C^k$  então  $f \in C^{k-1}$ , para todo  $k \geq 1$ .

**Observação 1.9.** Quando  $v_1 = \dots = v_k = v$ , o valor da aplicação  $k$ -linear  $f^{(k)}(a)$  na  $k$ -lista  $(v, \dots, v)$  será indicado  $f^{(k)}(a) v^k$ .

**Observação 1.10.** A aplicação  $f = (g, h) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dada por  $f(x) = (g(x), h(x))$ , é  $k$ -vezes diferenciável num ponto (ou de classe  $C^k$  em  $U$ ) se, e só se, suas aplicações-coordenadas  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$  são  $k$ -vezes diferenciáveis neste ponto (ou de classe  $C^k$  em  $U$ ).

## 2 Exemplos de aplicações diferenciáveis

**Exemplo 2.1.** Toda aplicação constante é de classe  $C^\infty$  e sua derivada é nula.  $\square$

**Exemplo 2.2.** Toda aplicação linear  $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável e  $T'(x) = T$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ .

De fato, como  $T(x + v) = Tx + Tv$  para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , temos que  $r(v) = 0$  e, portanto,  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Logo  $T'(x) = T$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  ou seja, a derivada  $T' : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é constante. Em particular,  $T$  é de classe  $C^\infty$ .  $\square$

**Exemplo 2.3.** Toda aplicação bilinear  $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável e, em cada ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , sua derivada é a transformação linear  $\varphi'(a, b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ , definida por:

$$\varphi'(a, b)(v, w) = \varphi(v, b) + \varphi(a, w).$$

De fato, como

$$\varphi(a + v, b + w) = \varphi(a, b) + \varphi(v, b) + \varphi(a, w) + \varphi(v, w),$$

basta mostrar que  $\lim_{(v, w) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varphi(v, w)}{\|(v, w)\|} = 0$ .

Pela observação 6.43 do capítulo 1, existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$\|\varphi(v, w)\| \leq c\|v\|_s \|w\|_s,$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  e todo  $w \in \mathbb{R}^n$ . Logo, tomando a norma da soma em  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , temos

$$\|(v, w)\|_s = \|v\|_s + \|w\|_s,$$

e, portanto,

$$\frac{\|\varphi(v, w)\|}{\|(v, w)\|_s} \leq \frac{c\|v\|_s \|w\|_s}{\|v\|_s + \|w\|_s} \leq c\|v\|_s.$$

Então  $\lim_{(v, w) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varphi(v, w)}{\|(v, w)\|_s} = 0$ .

Além disso, a aplicação derivada

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) \\ (a, b) &\longmapsto \varphi'(a, b), \end{aligned}$$

é linear, pois

$$\begin{aligned} \varphi'(a + \lambda a', b + \lambda b')(v, w) &= \varphi(a + \lambda a', w) + \varphi(v, b + \lambda b') \\ &= \varphi(a, w) + \lambda \varphi(a', w) + \varphi(v, b) + \lambda \varphi(v, b') \\ &= (\varphi'(a, b) + \lambda \varphi'(a', b'))(v, w), \end{aligned}$$

para todo  $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Então, pelo exemplo anterior,  $\varphi'$  é de classe  $C^\infty$  e, portanto,  $\varphi$  é de classe  $C^\infty$ .

Assim, a derivada segunda  $\varphi''(a, b) : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p$  de  $\varphi$  é dada por:

$$\begin{aligned}\varphi''(a, b)((v_1, w_1), (v_2, w_2)) &= ((\varphi')'(a, b)(v_1, w_1))(v_2, w_2) \\ &= (\varphi'(v_1, w_1))(v_2, w_2) = \varphi(v_2, w_1) + \varphi(v_1, w_2).\end{aligned}$$

Casos particulares de aplicações bilineares são o *produto interno*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

e a *multiplicação de matrizes*

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : \mathbb{R}^{pn} \times \mathbb{R}^{nm} &\rightarrow \mathbb{R}^{pm} \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{M}(X, Y) = XY,\end{aligned}$$

cujas derivadas são dadas por

$$\varphi'(x, y)(v, w) = \langle v, y \rangle + \langle x, w \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{M}'(X, Y)(V, W) = VY + XW,$$

respectivamente.

Mais geralmente, se  $\varphi : \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $k$ -linear, então  $\varphi$  é de classe  $C^\infty$ , pois suas funções-coordenada são  $k$ -lineares e, portanto, polinômios de grau  $k$  de  $m_1 + \dots + m_k$  variáveis.

Pode-se provar, de modo análogo ao caso bilinear ( $k = 2$ ), que existe  $c > 0$  tal que

$$\|\varphi(v_1, \dots, v_k)\| \leq c \|v_1\|_s \cdot \dots \cdot \|v_k\|_s.$$

Então, como

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 + v_1, \dots, a_k + v_k) &= \varphi(a_1, \dots, a_k) + \sum_{i=1}^n \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, v_j, a_{j+1}, \dots, a_k) \\ &\quad + \dots + \varphi(v_1, \dots, v_k),\end{aligned}$$

temos que  $\varphi$  é diferenciável em todo ponto  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_k}$  e

$$\varphi'(a_1, \dots, a_k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^k \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_k).$$

De fato, como

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i < j} \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, v_j, a_{j+1}, \dots, a_k) + \dots + \varphi(v_1, \dots, v_k) \right\| \\ \leq M^{(2)} \sum_{i < j} \|v_i\|_s \|v_j\|_s + \dots + M^{(k)} \|v_1\|_s \dots \|v_k\|_s,\end{aligned}$$

onde  $M^{(2)}, \dots, M^{(k)}$  são constantes positivas que dependem de  $\|a_1\|_s, \dots, \|a_k\|_s$  e  $c$ , podemos

provar, de modo similar ao caso  $k = 2$ , que

$$\lim_{(v_1, \dots, v_k) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{\sum_{i < j} \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, v_j, a_{j+1}, \dots, v_k) + \dots + \varphi(v_1, \dots, v_k)}{\|(v_1, \dots, v_k)\|_s} = 0$$

Por exemplo, se  $k = 3$ ,

$$\varphi'(a, b, c)(u, v, w) = \varphi(u, b, c) + \varphi(a, v, c) + \varphi(a, b, w).$$

Um exemplo de aplicação  $n$ -linear é a função determinante

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \det X = \det(X_1, \dots, X_n), \end{aligned}$$

onde  $X_1, \dots, X_n$  são os vetores-linha da matriz  $X$ . Sua derivada no ponto  $X$  é o funcional linear  $\det'(X) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ , cujo valor na matriz  $V = (V_1, \dots, V_n)$  é

$$\det'(X) \cdot V = \sum_{k=1}^n \det(X_1, \dots, X_{k-1}, V_k, X_{k+1}, \dots, X_n).$$

Em particular, se  $V = E_{ij}$  = matriz cuja  $(i, j)$ -ésima entrada é igual a 1 e as demais são iguais a zero, então

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(X) = \det'(X)E_{ij} = \det(X_1, \dots, X_{i-1}, e_j, X_{i+1}, \dots, X_n) = (-1)^{i+j} X_{[i,j]},$$

onde  $X_{[i,j]}$  é o determinante da matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtida de  $X$  pela omissão da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna, re-obtendo, assim, um fato já conhecido.  $\square$

**Exemplo 2.4.** Seja  $U = GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  o conjunto aberto formado pelas matrizes  $n \times n$  que são *invertíveis*.

Mostraremos que a aplicação

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ X &\longmapsto f(X) = X^{-1}, \end{aligned}$$

é diferenciável e sua derivada no ponto  $A \in U$  é a transformação linear  $f'(A) : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ , definida por

$$f'(A)V = -A^{-1}VA^{-1}.$$

De fato, se

$$r(V) = (A + V)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}VA^{-1},$$

obtemos, multiplicando ambos os membros da igualdade, à esquerda, por  $A + V$ , que:

$$(A + V)r(V) = I - I - VA^{-1} + VA^{-1} + VA^{-1}VA^{-1} = VA^{-1}VA^{-1} = (VA^{-1})^2,$$

e, portanto,

$$r(V) = (A + V)^{-1}(VA^{-1})^2.$$

Logo

$$\|r(V)\| \leq \|(A + V)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|V\|^2.$$

Assim, pelo lema abaixo,  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{r(V)}{\|V\|} = 0$ .  $\square$

**Lema 2.1.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  uma matriz invertível. Então existe  $c > 0$  tal que, para toda  $n \times n$  matriz  $V$ , com  $\|V\| \leq c$ ,  $A + V$  é invertível e  $\|(A + V)^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ .*

**Prova.**

Seja  $c = \frac{1}{2\|A^{-1}\|} > 0$ . Então

$$\|x\| = \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \|A(x)\|,$$

ou seja,  $\|A(x)\| \geq 2c\|x\|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Se  $\|V\| \leq c$ , temos que

$$\|(A + V)(x)\| = \|Ax + Vx\| \geq \|Ax\| - \|Vx\| \geq 2c\|x\| - c\|x\| = c\|x\|.$$

Logo, se  $\|V\| \leq c$ , então  $A + V$  é invertível e

$$\|x\| = \|(A + V)(A + V)^{-1}(x)\| \geq c\|(A + V)^{-1}(x)\|,$$

ou seja,  $\|(A + V)^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ .  $\blacksquare$

Em particular, a inversão de matrizes  $f : X \mapsto X^{-1}$  é uma aplicação contínua. Como  $f(U) = U$  e  $f^{-1} = f$ ,  $f$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre si mesmo.

Mostraremos agora que  $f$  é de classe  $C^\infty$ .

Seja  $V \in \mathbb{R}^{n^2}$  fixo. A derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial V} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial V}(X) = -X^{-1} V X^{-1}.$$

Seja a aplicação bilinear  $\varphi_V : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  definida por

$$\varphi_V(X, Y) = X V Y.$$

Então  $\frac{\partial f}{\partial V} = -\varphi_V \circ (f, f)$ , onde  $(f, f) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$  é dada por  $(f, f)(X) = (X^{-1}, X^{-1})$ .

Logo  $\frac{\partial f}{\partial V} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é contínua para todo  $V \in \mathbb{R}^{n^2}$  e, portanto,  $f$  é de classe  $C^1$ .

Como a aplicação bilinear  $\varphi_V$  é de classe  $C^\infty$  e a composta de duas aplicações de classe  $C^k$  é de classe  $C^k$  (ver seção 3), temos que  $\frac{\partial f}{\partial V} = -\varphi_V \circ (f, f)$  é de classe  $C^1$  para todo  $V \in \mathbb{R}^{n^2}$ . Logo  $f$  é de classe  $C^2$ .

Prosseguindo desta maneira, obtemos que  $f$  é de classe  $C^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $f$  é de classe  $C^\infty$ .

**Definição 2.1.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abertos. Dizemos que uma bijeção  $f : U \rightarrow V$  é um *difeomorfismo* de  $U$  sobre  $V$  quando  $f$  e  $f^{-1}$  são diferenciáveis (provaremos depois que  $n = m$ ).

Dizemos que  $f : U \rightarrow V$  é um *difeomorfismo de classe  $C^k$*  se  $f$  é um difeomorfismo e  $f \in C^k$  (provaremos depois que  $f$  é um difeomorfismo  $C^k$  se, e só se,  $f^{-1}$  é um difeomorfismo  $C^k$ ).

A inversão de matrizes  $f : U \rightarrow U$  é um exemplo de difeomorfismo de classe  $C^\infty$ , pois  $f^{-1} = f$  e  $f$  é de classe  $C^\infty$ .

**Observação 2.1.** Existem critérios indiretos, como o Teorema da Função Implícita, que permitem concluir que uma certa aplicação é diferenciável, sem que se conheça sua derivada. Na ausência destes métodos indiretos, fica o problema de obter um candidato razoável para a derivada, sem o qual não se pode provar a diferenciabilidade da aplicação.

Um processo, quando pode ser aplicado, é o de desenvolver  $f(a + v)$  (ou cada uma de suas funções-coordenada) em série de potências nas coordenadas de  $v$ , e destacar a parte de primeiro grau em relação a  $v$ , que é a candidata a ser  $f'(a)v$ .

No exemplo acima,

$$f(A + V) = (A + V)^{-1} = ((I + VA^{-1})A)^{-1} = A^{-1}(I + VA^{-1})^{-1}.$$

Seja  $X \in \mathbb{R}^{n^2}$  tal que  $\|X\| < 1$ . Então  $I - X$  é invertível, pois se existisse  $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  tal que  $X(v) = v$ , teríamos  $\|X\| \geq 1$ .

Além disso, sabemos que se  $\|X\| < 1$ , a série  $\sum_{j=0}^{\infty} X^j$  é absolutamente convergente, pois  $\|X^j\| \leq \|X\|^j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Logo, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - X^{n+1}) = I, \quad \text{e} \quad (I - X)(I + X + \dots + X^n) = I - X^{n+1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$(I - X)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} X^j \quad (\star)$$

Seja  $X = -VA^{-1}$  tal que  $\|V\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ .

Como  $\|X\| < 1$ , temos, por  $(\star)$ , que

$$(I + VA^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (VA^{-1})^j.$$

Logo,

$$(A + V)^{-1} = A^{-1}(I + VA^{-1})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}VA^{-1} + r(V),$$

onde

$$r(V) = A^{-1} \sum_{j \geq 2} (-1)^j (VA^{-1})^j = A^{-1} (VA^{-1})^2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (VA^{-1})^j,$$

se  $\|V\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ .

Para todo  $V \in \mathbb{R}^{n^2}$ , com  $\|V\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$ , temos que

$$\|r(V)\| \leq 2\|V\|^2 \|A^{-1}\|^3,$$

pois

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (VA^{-1})^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2.$$

Então  $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{r(V)}{\|V\|} = 0$  e, portanto,  $f$  é diferenciável em  $A$  e  $f'(A)V = -A^{-1}VA^{-1}$ .

**Exemplo 2.5.** Uma função de variável complexa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , pode ser vista como uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . A derivada da função complexa no ponto  $z = x + iy$  é o número complexo definido pelo limite

$$f'(z) = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(z+H) - f(z)}{H},$$

quando tal limite existe. Isto equivale a dizer que

$$f(z+H) = f(z) + f'(z)H + r(H),$$

onde  $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{|H|} = 0$ .

Assim, a função complexa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é derivável no ponto  $z = x + iy$  se, e só se, a aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável no ponto  $(x, y)$  e sua derivada  $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma transformação linear no plano que consiste em multiplicar por um número complexo  $a+ib = f'(z)$  fixo, ou seja, a matriz Jacobiana  $Jf(z)$  tem a forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , que, por sua vez, equivale a dizer que as partes real e imaginária da função complexa  $f = u + iv$  satisfazem as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) (= a) \quad \text{e} \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(z) (= b).$$

Então, se  $f'(z) = a + ib \neq 0$ ,  $f'(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma transformação linear que preserva orientação, pois leva a base positiva  $\{e_1, e_2\}$  na base positiva  $\{f'(z)e_1, f'(z)e_2\} = \{(a, b), (-b, a)\}$ , uma vez que  $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 > 0$ .

Além disso, como  $\langle f'(z)e_1, f'(z)e_1 \rangle = \langle f'(z)e_2, f'(z)e_2 \rangle = a^2 + b^2 = \lambda^2$  e  $\langle f'(z)e_1, f'(z)e_2 \rangle = 0$ ,

temos que

$$\begin{aligned}\langle f'(z)X, f'(z)Y \rangle &= \langle x_1 f'(z)e_1 + x_2 f'(z)e_2, y_1 f'(z)e_1 + y_2 f'(z)e_2 \rangle \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2) \lambda^2 = \lambda^2 \langle X, Y \rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer  $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Logo  $f'(z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma transformação linear que preserva ângulo, pois

$$\cos(\angle(f'(z)X, f'(z)Y)) = \frac{\langle f'(z)X, f'(z)Y \rangle}{\|f'(z)X\| \|f'(z)Y\|} = \frac{\lambda^2 \langle X, Y \rangle}{|\lambda| \|X\| |\lambda| \|Y\|} = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} = \cos(\angle(X, Y)).$$

Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  do tipo  $T(z) = Az$ , onde  $A$  é um número complexo não-nulo, é chamada uma **semelhança positiva**: trata-se de uma rotação positiva (multiplicação por  $\frac{A}{|A|} = e^{i\theta}$ ) seguida de uma homotetia (multiplicação pelo número real  $|A| > 0$ ).  $\square$

**Exemplo 2.6.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho definido no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ . Pela definição dada no capítulo 2,  $f$  é diferenciável no ponto  $a \in I$  quando existe o vetor velocidade

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Isto equivale a dizer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0$ , onde  $r(t) = f(a+t) - f(a) - vt$ .

Como toda transformação linear  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é da forma  $T(t) = tT(1)$ , um caminho é diferenciável no sentido do capítulo 2 se, e só se, é diferenciável no sentido deste capítulo.  $\square$

### 3 A regra da cadeia

#### Teorema 3.1. (Regra da Cadeia)

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abertos,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável no ponto  $a$ , com  $f(U) \subset V$ , e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciável no ponto  $f(a)$ . Então  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável no ponto  $a$  e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

**Prova.**

Sejam  $g_1, \dots, g_p : V \rightarrow \mathbb{R}$  as funções-coordenada de  $g$ . Então, pelo teorema 1.1,  $g_1, \dots, g_p$  são diferenciáveis no ponto  $f(a)$  e, pela Regra da Cadeia para funções, as funções-coordenada  $g_1 \circ f, \dots, g_p \circ f$  da aplicação  $g \circ f$  são diferenciáveis no ponto  $a$  e

$$\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a),$$

para todo  $i = 1, \dots, p$  e todo  $j = 1, \dots, m$ .



Logo, pelo teorema 1.1,  $g \circ f$  é diferenciável no ponto  $a$ .

Como

$$(g \circ f)'(a)e_j = ((g_1 \circ f)'(a)e_j, \dots, (g_p \circ f)'(a)e_j),$$

e

$$g'_i(f(a))(f'(a)e_j) = g'_i(f(a))(f'_1(a)e_j, \dots, f'_n(a)e_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) = (g_i \circ f)'(a)e_j,$$

para todo  $i = 1, \dots, p$ , temos que

$$(g \circ f)'(a)e_j = (g'(f(a)) \circ f'(a))e_j,$$

para todo  $j = 1, \dots, m$ .

Logo  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$ . ■

**Outra maneira de provar que  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$ .**

Sejam  $v \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  um caminho diferenciável em  $t = 0$ , com  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(0) = v$ . Então as funções  $f_i \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis em  $t = 0$ ,  $(f_i \circ \lambda)(0) = f_i(a)$  e  $(f_i \circ \lambda)'(0) = df_i(a) \cdot v$ . Logo o caminho  $f \circ \lambda$  é diferenciável em  $t = 0$ ,  $f \circ \lambda(0) = f(a)$  e  $(f \circ \lambda)'(0) = (df_1(a)v, \dots, df_n(a)v) = f'(a)v$ .

De modo análogo, temos que  $g \circ (f \circ \lambda)$  é um caminho em  $\mathbb{R}^p$  diferenciável em  $t = 0$ , com  $(g \circ (f \circ \lambda))(0) = g(f(a))$  e  $(g \circ (f \circ \lambda))'(0) = g'(f(a)) \cdot (f'(a)v)$ .

Por outro lado,  $(g \circ f) \circ \lambda$  é um caminho diferenciável em  $t = 0$ , como  $((g \circ f) \circ \lambda)(0) = g(f(a))$  e  $((g \circ f) \circ \lambda)'(0) = (g \circ f)'(a)v$ . Logo  $(g \circ f)'(a)v = g'(f(a))(f'(a)v)$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Ou seja,  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$ . ■

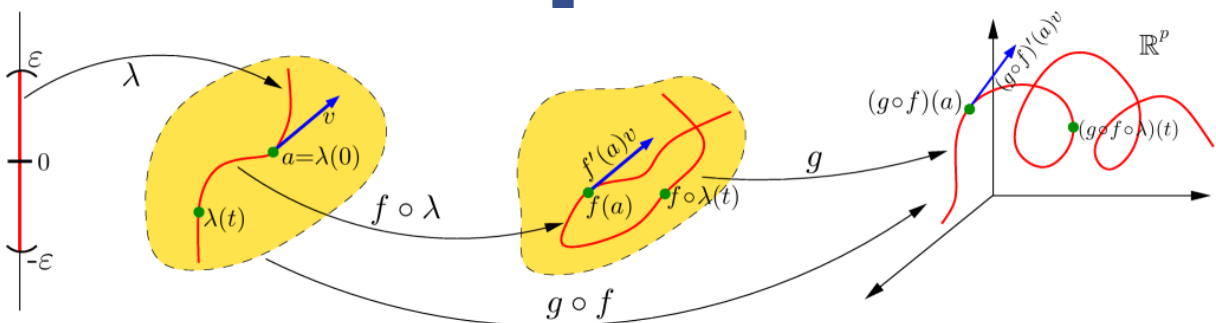


Fig. 2: Representação esquemática da Regra da Cadeia

**Corolário 3.1.** Sejam  $Jf(a) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right)_{n \times m}$ ,  $Jg(f(a)) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \right)_{p \times n}$  e  $J(g \circ f)(a) = \left( \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) \right)_{p \times m}$  as matrizes Jacobianas de  $f$ ,  $g$  e  $g \circ f$  nos pontos indicados. Supondo  $f$  diferenciável no ponto  $a$  e  $g$  diferenciável no ponto  $f(a)$ , tem-se  $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$ .

**Prova.**

Por  $(*)$ , temos que:

$$(J(g \circ f)(a))_{ij} = \frac{\partial (g_i \circ f)(a)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) = (Jg(f(a)) \cdot Jf(a))_{ij},$$

para todo  $i = 1, \dots, p$  e todo  $j = 1, \dots, m$ . Logo  $J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$ . ■

**Corolário 3.2.** *A composta de duas aplicações de classe  $C^k$  é uma aplicação de classe  $C^k$ .*

**Prova.**

Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $f(U) \subset V$ , duas aplicações de classe  $C^k$ .

Pelo corolário 3.4 do capítulo 3,  $g_i \circ f$  é de classe  $C^k$  para todo  $i = 1, \dots, p$ , pois as funções-coordenada de  $f$  e  $g$  são de classe  $C^k$ .

**Outra demonstração:** Pela Regra da Cadeia,  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$  para todo  $x \in U$ . Considerando as aplicações derivadas

$$f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n), \quad g' : V \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) \quad \text{e} \quad (g \circ f)' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p),$$

a igualdade acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p),$$

onde  $\circ$  indica a composição de aplicações e  $\cdot$  significa o produto de transformações lineares.

Considerando a multiplicação de transformações lineares como uma aplicação bilinear

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^p), \quad \mathcal{M}(T, S) = T \cdot S,$$

a Regra da Cadeia se exprime como:

$$(g \circ f)' = \mathcal{M} \circ (g' \circ f, f'),$$

onde  $(g' \circ f, f') : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é a aplicação que tem por coordenadas  $g' \circ f$  e  $f'$ . Sabemos que  $\mathcal{M} \in C^\infty$ , isto é,  $\mathcal{M} \in C^k$  para todo  $k$ .

Provaremos, por indução, que se  $f, g \in C^k$ , então  $g \circ f$  é de classe  $C^k$ .

Suponhamos que  $f, g \in C^1$ . Então  $f', g' \in C^0$ .

Logo  $(g' \circ f, f') \in C^0$  e, portanto,  $(g \circ f)' = \mathcal{M} \circ (g' \circ f, f') \in C^0$ , o que significa que  $g \circ f \in C^1$ .

Suponhamos o resultado válido para funções de classe  $C^{k-1}$ ,  $k-1 \geq 1$ . Sejam  $f, g \in C^k$ . Então  $f', g' \in C^{k-1}$  e, pela hipótese de indução,  $g' \circ f \in C^{k-1}$ .

Logo  $(g' \circ f, f') \in C^{k-1}$  e, portanto,  $\mathcal{M} \circ (g' \circ f, f') \in C^{k-1}$ , isto é,  $(g \circ f)' \in C^{k-1}$ .

Assim,  $g \circ f \in C^k$ . ■

**Corolário 3.3.** Se uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  e diferenciável no ponto  $a$ , admite uma inversa  $g = f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida no aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  e diferenciável no ponto  $b = f(a)$ , então  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, cujo inverso é  $g'(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Em particular,  $m = n$ .

**Prova.**

Como  $g \circ f = \text{Id}_U$  e  $f \circ g = \text{Id}_V$  temos, pela Regra da Cadeia, que  $g'(b) \cdot f'(a) = \text{Id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f'(a) \cdot g'(b) = \text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Assim,  $g'(b) = (f'(a))^{-1}$  e  $m = n$ . ■

**Observação 3.1.** Como consequência do corolário acima, se  $f : U \rightarrow V$  é um difeomorfismo entre os abertos  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ , então  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo para todo  $x \in U$ . Em particular,  $m = n$ , ou seja,  $U, V \subset \mathbb{R}^m$  são abertos do mesmo espaço Euclidiano.

**Observação 3.2.** O *Teorema da invariância da dimensão*, devido a *L. E. J. Brouwer*, diz que se  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  são abertos homeomorfos, então  $m = n$ .

**Observação 3.3.** Um difeomorfismo não é a mesma coisa que um homeomorfismo diferenciável. Por exemplo, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , é um homeomorfismo de classe  $C^\infty$  cujo inverso não é diferenciável no ponto 0.

**Corolário 3.4.** Seja  $f : U \rightarrow V$  uma bijeção de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , entre os subconjuntos abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^m$ . Se sua inversa  $g = f^{-1} : V \rightarrow U$  é diferenciável então  $f^{-1} \in C^k$ . Diz-se então que  $f$  é um *difeomorfismo de classe  $C^k$* .

**Prova.**

Sejam  $GL(\mathbb{R}^m)$  o conjunto das transformações lineares invertíveis de  $\mathbb{R}^m$  em si mesmo e  $\text{Inv} : GL(\mathbb{R}^m) \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$  a inversão de transformações lineares que, pelo exemplo 2.4, é de classe  $C^\infty$ .

Pelo corolário 3.3,  $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$ . Logo a aplicação derivada  $g' : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  pode ser escrita como  $g' = \text{Inv} \circ f' \circ g$ .

Vamos provar, por indução, que se  $f$  é de classe  $C^k$ , então  $g = f^{-1}$  é de classe  $C^k$ .

Seja  $f \in C^1$ . Então  $f' \in C^0$ . Logo  $\text{Inv} \circ f' \circ g$  é de classe  $C^0$ , isto é,  $g' \in C^0$ . Assim,  $g \in C^1$ .

Suponhamos o resultado válido para funções de classe  $C^{k-1}$ ,  $k-1 \geq 1$ . Seja  $f \in C^k$ . Então  $f' \in C^{k-1}$  e, pela hipótese de indução,  $g \in C^{k-1}$ , pois  $f \in C^{k-1}$ . Logo, pelo corolário 3.2,  $g' = \text{Inv} \circ f' \circ g \in C^{k-1}$ . Assim,  $g \in C^k$ . ■

**Observação 3.4.** Quando  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  tem sentido, em cada ponto  $x \in U$ , considerar o determinante  $\det Jf(x)$  da matriz Jacobiana  $Jf(x)$ , chamado o *determinante Jacobiano de  $f$  no ponto  $x$* . Assim, pelo corolário 3.3, se  $f$  é um difeomorfismo, então  $\det Jf(x) \neq 0$  para todo  $x \in U$ .

O *Teorema da Aplicação Inversa*, que provaremos mais adiante, fornece uma recíproca local para este fato.

**Corolário 3.5.** *Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações diferenciáveis no ponto  $a \in U \subset \mathbb{R}^m$  e  $c$  um número real. Então:*

(1)  $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a$  e  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ .

(2)  $cf : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a$  e  $(cf)'(a) = cf'(a)$ .

(3)  $\frac{f}{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a$ , quando  $g(x) \neq 0$  e  $g(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $x \in U$ , e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

(4) Se  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma aplicação bilinear,  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  são diferenciáveis no ponto  $a \in U$ , então  $\varphi(f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ , definida por  $\varphi(f, g)(x) = \varphi(f(x), g(x))$ , é diferenciável no ponto  $a$  e

$$(\varphi(f, g))'(a)v = \varphi(f'(a)v, g(a)) + \varphi(f(a), g'(a)v).$$

(5) Se  $f, g \in C^k$ , então  $f + g, cf, \frac{f}{g}, \varphi(f, g) \in C^k$ .

**Prova.**

As três primeiras propriedades resultam do teorema 4.1 do capítulo 3 aplicado às funções-coordenada de  $f$  e  $g$ .

(4) Pela Regra da Cadeia e pelo exemplo 2.3, temos, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\begin{aligned} [\varphi(f, g)]'(a)v &= (\varphi \circ (f, g))'(a)v \\ &= \varphi'(f(a), g(a))(f'(a)v, g'(a)v) \\ &= \varphi(f'(a)v, g(a)) + \varphi(f(a), g'(a)v). \end{aligned}$$

(5) Considere as aplicações  $(f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ,  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $q : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dadas por

$$(f, g)(x) = (f(x), g(x)), \alpha(y, z) = y + z, c^*(y) = cy \quad \text{e} \quad q(y, z) = \frac{y}{z}.$$

Então,

$$f + g = \alpha \circ (f, g), \quad cf = c^* \circ f, \quad \frac{f}{g} = q \circ (f, g) \quad \text{e} \quad \varphi(f, g) = \varphi \circ (f, g).$$

As aplicações  $\alpha$  e  $c^*$  são de classe  $C^\infty$ , pois são lineares. A aplicação  $q$  é também de classe  $C^\infty$ , pois  $q = m \circ (\text{Id}, \text{Inv})$ , onde  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a identidade,  $\text{Inv} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  é a inversão de números reais não-nulos (matrizes invertíveis  $1 \times 1$ ) e  $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação bilinear dada por  $m(x, y) = xy$ . Como  $m$ ,  $\text{Inv}$  e  $\text{Id}$  são  $C^\infty$ , temos que  $q$  também é de classe  $C^\infty$ .

Logo, se  $f, g \in C^k$ , temos, pelo corolário 3.2, que  $f + g$ ,  $cf$ ,  $\frac{f}{g}$  e  $\varphi(f, g)$  são de classe  $C^k$ . ■

**Observação 3.5.** Em particular, se  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a multiplicação  $\varphi(x, y) = xy$ , temos que  $\varphi(f, g) = fg$  e

$$(fg)'(a)v = g(a)f'(a)v + f(a)g'(a)v,$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 3.1.** Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações diferenciáveis (respectivamente de classe  $C^k$ ) definidas no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Então  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$  é diferenciável (respectivamente de classe  $C^k$ ) e

$$\xi'(x) \cdot v = \langle f'(x)v, g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x)v \rangle,$$

para todo  $x \in U$  e todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Em particular, tomando  $f = g$ , temos  $\xi(x) = \|f(x)\|^2$  e

$$\xi'(x)v = 2\langle f'(x)v, f(x) \rangle.$$

Segue-se também pela Regra da Cadeia que, em cada ponto  $x \in U$  onde  $f(x) \neq 0$ , a função  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\psi(x) = \|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$ , é diferenciável no ponto  $x$  e

$$\psi'(x)v = \frac{\langle f'(x)v, f(x) \rangle}{\|f(x)\|},$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ . □

## 4 As fórmulas de Taylor

No caso de uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , com  $a, a + v \in U$ , a fórmula de Taylor se escreve:

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)v + \frac{1}{2}f''(a)v^2 + \dots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(a)v^p + r_p(v), \quad (*)$$

onde

$$f''(a) \cdot v^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) (a), \dots, f^{(p)}(a)v^p = \frac{\partial^p f}{\partial v^p}(a) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^{p-1} f}{\partial v^{p-1}} \right) (a).$$

**(1) Fórmula de Taylor infinitesimal:** Se  $f$  é  $p$ -vezes diferenciável no ponto  $a$ , então

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{\|v\|^p} = 0.$$

**(2) Fórmula de Taylor com resto integral:** Se  $f$  é de classe  $C^{p+1}$  e  $[a, a+v] \subset U$ , então

$$r_p(v) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+tv) v^{p+1} dt.$$

Como, para cada  $j = 0, 1, \dots, p$ ,  $f^{(j)}(a) v^j$  é o vetor de  $\mathbb{R}^n$  cujas coordenadas são os números  $d^{(j)} f_i(a) v^j$ , onde  $f_i$  são as funções-coordenada de  $f$ , temos que a fórmula de Taylor (\*) equivale a  $n$  igualdades numéricas que correspondem à fórmula de Taylor para funções reais. Então, as fórmulas de Taylor (1) e (2) seguem das fórmulas análogas para funções reais, provadas na seção 8 do capítulo 3.

**(3) Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:** Sejam  $[a, a+v] \subset U$ ,  $f$  uma aplicação de classe  $C^p$  que é  $p+1$  vezes diferenciável em todo ponto do segmento aberto  $(a, a+v)$ , com  $\|f^{(p+1)}(x) w^{p+1}\| \leq M \|w\|^{p+1}$  para todo  $x \in (a, a+v)$  e todo  $w \in \mathbb{R}^m$ . Então

$$\|r_p(v)\| \leq \frac{M}{(p+1)!} \|v\|^{p+1}.$$

**Prova.**

Seja o caminho  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $\varphi(t) = f(a+tv)$ . Então  $\varphi$  é de classe  $C^p$ ,  $(p+1)$ -vezes diferenciável no intervalo aberto  $(0, 1)$ ,

$$\varphi'(t) = f'(a+tv) v, \varphi''(t) = f''(a+tv) v^2, \dots, \varphi^{(p)}(t) = f^{(p)}(a+tv) v^p,$$

para todo  $t \in [0, 1]$ , e

$$\varphi^{(p+1)}(t) = f^{(p+1)}(a+tv) v^{p+1},$$

com

$$\|\varphi^{(p+1)}(t)\| \leq M \|v\|^{p+1},$$

para todo  $t \in (0, 1)$ .

Então, pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange para caminhos, provada no capítulo 2, temos

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} + r_p,$$

com

$$\|r_p\| \leq \frac{M \|v\|^{p+1}}{(p+1)!},$$

ou seja,

$$f(a+v) = f(a) + f'(a) v + \frac{f''(a) v^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(p)}(a) v^p}{p!} + r_p(v),$$

com  $\|r_p(v)\| \leq \frac{M \|v\|^{p+1}}{(p+1)!}$ . ■

### Observação 4.1. (Unicidade da fórmula de Taylor)

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $p$ -vezes diferenciável no ponto  $a \in U \subset \mathbb{R}^m$  e, para cada  $i = 1, 2, \dots, p$ , é dada uma aplicação  $i$ -linear  $\varphi_i : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que

$$f(a + v) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \varphi_i v^i + r_p(v),$$

com  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{\|v\|^p} = 0$ , então  $\varphi_i v^i = f^{(i)}(a) v^i$  para todo  $i = 1, \dots, p$  e todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

De fato, como cada função-coordenada de  $\varphi_i$  é uma função  $i$ -linear, o resultado segue da unicidade da fórmula de Taylor para funções reais provada no capítulo 3 (ver observação 8.5).

## 5 A desigualdade do valor médio

Assim como para os caminhos, não há para as aplicações  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , um Teorema do Valor Médio sob a forma de igualdade. Vale porém a desigualdade abaixo.

**Desigualdade do Valor Médio:** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua no segmento fechado  $[a, a + v] \subset U$  e diferenciável em todos os pontos do segmento aberto  $(a, a + v)$ . Se  $\|f'(x)\| \leq M$  para todo  $x \in (a, a + v)$  então  $\|f(a + v) - f(a)\| \leq M\|v\|$ .

*Prova.*

O caminho  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por  $\lambda(t) = f(a + tv)$ , é contínuo em  $[0, 1]$ , diferenciável no intervalo aberto  $(0, 1)$ ,  $\lambda(0) = f(a)$ ,  $\lambda(1) = f(a + v)$  e, pela Regra da Cadeia,  $\lambda'(t) = f'(a + tv) v$ . Logo  $\|\lambda'(t)\| \leq \|f'(a + tv)\| \|v\| \leq M \|v\|$  para todo  $t \in (0, 1)$ .

Então, pelo Teorema do Valor Médio para caminhos, demonstrado no capítulo 2, temos que  $\|\lambda(1) - \lambda(0)\| \leq M\|v\|$ , ou seja,  $\|f(a + v) - f(a)\| \leq M\|v\|$ . ■

**Corolário 5.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e convexo. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável e  $\|f'(x)\| \leq M$  para todo  $x \in U$ , então  $f$  é Lipschitziana, com  $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$  para todos  $x, y \in U$ .*

*Prova.*

Como  $U$  é convexo, dados  $x, y \in U$ , temos que  $[x, y] \subset U$ . Logo, como  $f$  é contínua em  $[x, y]$  e diferenciável em todos os pontos do segmento aberto  $(x, y)$ , temos, pela Desigualdade do Valor Médio, que

$$\|f(y) - f(x)\| = \|f(x + (y - x)) - f(x)\| \leq M\|y - x\|,$$

pois  $\|f'(z)\| \leq M$  para todo  $z \in (x, y)$ . ■

**Observação 5.1.** A convexidade de  $U$  é essencial para a validade do corolário acima (ver observação 4.2 do capítulo 3).

**Corolário 5.2.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no aberto conexo  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in U$ , então  $f$  é constante.

**Prova.**

Seja  $a \in U$ . Consideremos os conjuntos

$$A = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in U \mid f(x) \neq f(a)\}.$$

Como  $f$  é contínua,  $B$  é aberto.

**Afirmção:**  $A$  é aberto.

De fato, dado  $x \in A$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x) \subset U$ . Então, se  $\|v\| < \delta$ , temos que  $[x, x+v] \subset U$  e, portanto, pela Desigualdade do Valor Médio,  $\|f(x+v) - f(x)\| \leq \varepsilon \|v\|$  para todo  $\varepsilon > 0$ , pois  $f'(y) \equiv 0$  para todo  $y \in U$ . Logo  $f(x+v) = f(x) = f(a)$  para todo  $v$  com  $\|v\| < \delta$ , ou seja  $f(y) = f(a)$  para todo  $y \in B_\delta(x)$ .

Assim,  $U = A \cup B$  é uma cisão. Como  $U$  é conexo e  $A \neq \emptyset$ , pois  $a \in A$ , obtemos que  $U = A$ , ou seja,  $f(x) = f(a)$  para todo  $x \in U$ . ■

O corolário abaixo fornece uma estimativa para o resto  $r(v) = f(a+v) - f(a) - Tv$ , quando  $T = f'(a)$ , e representa uma forma mais refinada da Desigualdade do Valor Médio, à qual se reduz quando  $T = 0$ .

**Corolário 5.3.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto,  $[a, a+v] \subset U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável em todos os pontos do segmento aberto  $(a, a+v)$  e  $f|_{[a, a+v]}$  contínua. Seja  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear tal que  $\|f'(x) - T\| \leq M$  para todo  $x \in (a, a+v)$ . Então

$$\|f(a+v) - f(a) - Tv\| \leq M \|v\|.$$

**Prova.**

Seja  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação dada por  $g(x) = f(x) - Tx$ . Como  $g'(x) = f'(x) - T$ , temos que

$$\|g'(x)\| = \|f'(x) - T\| \leq M,$$

para todo  $x \in (a, a+v)$ . Logo, pela Desigualdade do Valor Médio aplicada a  $g$ , obtemos que

$$\|g(a+v) - g(a)\| \leq M \|v\|,$$

ou seja

$$\|f(a+v) - f(a) - Tv\| \leq M \|v\|. \quad \blacksquare$$



**Definição 5.1.** Dizemos que uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *uniformemente diferenciável* num subconjunto  $X \subset U$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|v\| < \delta \implies \|f(x+v) - f(x) - f'(x)v\| < \varepsilon \|v\|,$$

para todo  $x \in X$ , com  $x+v \in U$ .

**Corolário 5.4.** Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  é uniformemente diferenciável em todo compacto  $K \subset U$ .

*Prova.*

Pelo corolário 12.3 do capítulo 1, existe  $\delta' > 0$  tal que se  $x \in K$  e  $\|v\| < \delta'$ , então  $[x, x+v] \subset U$ . Como  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  é contínua, pelo teorema 11.3 do capítulo 1, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $0 < \delta < \delta'$  tal que

$$x \in K, \|v\| < \delta \implies \|f'(x+v) - f'(x)\| < \varepsilon.$$

Então,

$$x \in K, \|v\| < \delta, t \in [0, 1] \implies \|f'(x+tv) - f'(x)\| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$x \in K, \|v\| < \delta, y \in [x, x+v] \implies \|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon.$$

Logo, pelo corolário 5.3, tomando  $T = f'(x)$ , obtemos que

$$\|f(x+v) - f(x) - f'(x) \cdot v\| \leq \varepsilon \|v\|,$$

para todo  $v$  com  $\|v\| < \delta$  e para todo  $x \in K$ . ■

**Corolário 5.5.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e  $c \in U$ . Se a aplicação contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável em  $U - \{c\}$  e existe  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  então  $f$  é diferenciável no ponto  $c$  e  $f'(c) = T$ .

*Prova.*

Seja  $\delta' > 0$  tal que se  $\|v\| < \delta'$  então  $[c, c+v] \subset U$ . Pela definição de limite, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \delta'$  tal que

$$0 < \|v\| < \delta \implies \|f'(c+tv) - T\| < \varepsilon,$$

para todo  $t \in (0, 1)$ .

Então, pelo corolário 5.3,  $\|r(v)\| \leq \varepsilon \|v\|$  para todo  $0 < \|v\| < \delta$ , onde  $r(v) = f(c+v) - f(c) - Tv$ .

Logo,  $f$  é diferenciável no ponto  $c$  e  $f'(c) = T$ . ■

## 6 Sequências de aplicações diferenciáveis

**Definição 6.1.** Dizemos que uma sequência de aplicações  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definidas num conjunto  $X$ , **converge uniformemente** para uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in X$ .

**Observação 6.1.** Como a afirmação “ $\lim f_k = f$  uniformemente em  $X$ ” não depende da norma que se considera no espaço euclidiano, temos que  $f_k \rightarrow f$  **uniformemente em  $X$**  se, e só se, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_{ki} \rightarrow f_i$  uniformemente em  $X$ , onde  $f_{k1}, \dots, f_{kn} : X \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções-coordenada da aplicação  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções-coordenada de  $f$ .

**Observação 6.2.** Se considerarmos o espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  com a norma do sup, uma sequência de aplicações  $g_k : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  converge para a aplicação  $g : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  uniformemente em  $X$  se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \|g_k(x)v - g(x)v\| \leq \varepsilon \|v\|,$$

para todo  $x \in X$  e todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

De fato, pela definição da norma do sup, tem-se

$$\|g_k(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \iff \|g_k(x)v - g(x)v\| \leq \varepsilon \|v\|,$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 6.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Dizemos que uma sequência de aplicações  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge de modo **localmente uniforme** em  $X$  para uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando para todo  $x \in X$  existe uma bola aberta  $B$  de centro  $x$  tal que  $f_k \rightarrow f$  uniformemente em  $X \cap B$ . Isto equivale a dizer que  $X$  está contido numa reunião de abertos  $U \subset \mathbb{R}^m$  tais que  $f_k \rightarrow f$  uniformemente em cada  $U \cap X$ .

**Observação 6.3.** Evidentemente, convergência uniforme  $\implies$  convergência localmente uniforme  $\implies$  convergência simples (isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ ). As implicações contrárias são falsas.

**Exemplo 6.1.** A sequência de funções  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por  $f_k(x) = \frac{x}{k}$ , converge de modo localmente uniforme em  $\mathbb{R}$  para a função identicamente nula, mas não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Critério de Cauchy:** Uma sequência de aplicações  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge uniformemente em  $X$  se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$j, k \geq k_0 \implies \|f_k(x) - f_j(x)\| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in X$ .

**Prova.**

Suponhamos que  $f_k \rightarrow f$  uniformemente em  $X$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo  $x \in X$ . Logo, se  $k, j \geq k_0$ , temos que

$$\|f_k(x) - f_j(x)\| \leq \|f_k(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_j(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo  $x \in X$ .

Reciprocamente, para cada  $x \in X$ , a sequência de vetores  $\{f_k(x)\}$  é de Cauchy e, portanto, converge para um vetor, que chamaremos de  $f(x)$ . Isto define uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  para todo  $x \in X$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k, j \geq k_0 \implies \|f_k(x) - f_j(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo  $x \in X$ . Fixando  $k \geq k_0$  e  $x \in X$  e fazendo  $j \rightarrow \infty$ , obtemos que  $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Logo  $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$  para todo  $k \geq k_0$  e todo  $x \in X$ . Ou seja,  $f_k \rightarrow f$  uniformemente em  $X$ .



Como consequência do Critério de Cauchy, obtemos o

**Teste de Weierstrass:** Se, para cada  $k \in \mathbb{N}$  e cada  $x \in X$ , tem-se  $\|f_k(x)\| \leq c_k$ , onde  $\sum c_k$  é uma série convergente de números reais positivos, então a série  $\sum f_k$ , cujos termos são as aplicações  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , converge uniformemente em  $X$ . Além disso, a série  $\sum f_k$  converge absoluta e uniformemente em  $X$ , isto é, a série  $\sum \|f_k\|$  converge uniformemente em  $X$ .

### Teorema 6.1. (da continuidade do limite uniforme)

Seja  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma sequência de aplicações contínuas no ponto  $a \in X \subset \mathbb{R}^m$ . Se a sequência  $f_k$  converge uniformemente em  $X$  para a aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

**Prova.**

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo  $x \in X$ .

Como  $f_{k_0}$  é contínua no ponto  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, \|x - a\| < \delta \implies \|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo, se  $x \in X$  e  $\|x - a\| < \delta$ , então

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_{k_0}(x)\| + \|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(a)\| + \|f_{k_0}(a) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Portanto,  $f$  é contínua no ponto  $a$ . ■

**Lema 6.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto convexo e limitado. Se a sequência de aplicações diferenciáveis  $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge num ponto  $c \in U$  e a sequência das aplicações derivadas  $f'_k : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  converge uniformemente em  $U$  para uma aplicação  $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , então  $(f_k)$  converge uniformemente em  $U$  para uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $f' = g$ .*

**Prova.**

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k, j \geq k_0 \implies \|f'_j(x) - f'_k(x)\| < \varepsilon' \quad (1)$$

para todo  $x \in U$ , onde  $\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{2M} \right\}$  e  $M = \text{diam } U$ .

Como  $U$  é convexo, temos, pelo corolário 5.1, aplicado a  $f_j - f_k$ , que, para quaisquer  $x, y \in U$ ,

$$j, k \geq k_0 \implies \|(f_j(y) - f_k(y)) - (f_j(x) - f_k(x))\| \leq \varepsilon' \|y - x\|. \quad (2)$$

Tomando  $x = c$ , temos que, para todo  $y \in U$ ,

$$k, j \geq k_0 \implies \|f_j(y) - f_k(y)\| \leq \|f_j(c) - f_k(c)\| + \frac{\varepsilon}{2M} \|y - c\|.$$

Como a sequência  $(f_k(c))$  converge, existe  $k'_0 \geq k_0$  tal que

$$k, j \geq k'_0 \implies \|f_j(c) - f_k(c)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para todo  $y \in U$ ,

$$k, j \geq k'_0 \implies \|f_j(y) - f_k(y)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pois  $\|y - x\| \leq M$  para todos  $x, y \in U$ . Assim, a sequência  $(f_k)$  converge uniformemente para uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Mostraremos agora que  $f$  é diferenciável em todo ponto  $x_0 \in U$  e  $f'(x_0) = g(x_0)$ .

De fato, fazendo  $j \rightarrow \infty$  em (2) e tomando  $y = x_0 + v$ , temos que

$$k \geq k_0 \implies \|f(x_0 + v) - f(x_0) - [f_k(x_0 + v) - f_k(x_0)]\| \leq \varepsilon' \|v\|. \quad (3)$$

Como cada  $f_k$  é diferenciável no ponto  $x_0$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\delta_k(x_0) > 0$  tal que

$$\|v\| < \delta_k(x_0) \implies \|f_k(x_0 + v) - f_k(x_0) - f'_k(x_0)v\| < \varepsilon' \|v\|. \quad (4)$$

Fazendo  $j \rightarrow \infty$  em (1), obtemos:

$$k \geq k_0 \implies \|f'_k(x) - g(x)\| \leq \varepsilon', \quad (5)$$

para todo  $x \in U$ .

Então, tomando  $k = k_0$  e  $\delta = \delta_{k_0}(x_0)$ , temos, por (3), (4) e (5), que:

$$\begin{aligned} \|v\| < \delta &\implies \|f(x_0 + v) - f(x_0) - g(x_0)v\| \\ &\leq \|f(x_0 + v) - f(x_0) - [f_{k_0}(x_0 + v) - f_{k_0}(x_0)]\| \\ &\quad + \|f_{k_0}(x_0 + v) - f_{k_0}(x_0) - f'_{k_0}(x_0)v\| + \|f'_{k_0}(x_0)v - g(x_0)v\| \\ &\leq 3\varepsilon'\|v\| \leq \varepsilon\|v\|. \end{aligned}$$

Logo  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = g(x_0)$ . ■

## Teorema 6.2. (da derivação termo a termo)

Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto conexo. Se a sequência de aplicações diferenciáveis  $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge num ponto  $c \in U$  e a sequência das derivadas  $f'_k : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  converge de modo localmente uniforme para uma aplicação  $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , então a sequência  $(f_k)$  converge de modo localmente uniforme para uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável, com  $f' = g$ .

### Prova.

Como  $f'_k$  converge de modo localmente uniforme para  $g$ , para todo  $x \in U$ , existe uma bola aberta  $B_x \subset U$  tal que  $f'_k \rightarrow g$  uniformemente em  $B_x$ . Logo  $U = \bigcup_{x \in U} B_x$  e, pelo lema 6.1, se  $(f_k)$  converge em algum ponto de  $B_x$ , então  $(f_k)$  converge uniformemente em  $B_x$ .

Seja  $A$  a reunião das bolas  $B_x$  nas quais  $(f_k)$  converge uniformemente, e  $B$  a reunião das bolas  $B_x$  nas quais não há convergência em ponto algum. Como  $U = A \cup B$  é uma cisão de  $U$ ,  $U$  é conexo e  $A \neq \emptyset$ , pois  $B_c \subset A$ , temos que  $U = A$ , ou seja,  $(f_k)$  converge de modo localmente uniforme em  $U$  para uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então, pelo lema 6.1,  $f$  é diferenciável e  $f' = g$ . ■

**Observação 6.4.** Mesmo supondo  $f'_k \rightarrow g$  uniformemente no aberto conexo  $U$  e  $(f_k(c))$  convergente para algum  $c \in U$ , nem sempre é verdadeiro que  $(f_k)$  converge uniformemente em  $U$ . Por exemplo, seja  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a sequência de funções dadas por  $f_k(x) = \frac{x}{k}$ .

Então  $f'_k \equiv \frac{1}{k} \rightarrow g \equiv 0$  uniformemente em  $\mathbb{R}$ , mas  $(f_k)$  não converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

Mas se existir um número real  $M > 0$  tal que dois pontos quaisquer de  $U$  podem ser ligados por uma poligonal de comprimento  $\leq M$  contida em  $U$ , temos (por (2) do lema 6.1) que  $(f_k)$  converge uniformemente em  $U$ , se  $(f'_k)$  convergir uniformemente em  $U$  e  $(f_k(c))$  convergir para algum  $c \in U$ . Quando  $U$  é convexo e limitado isto ocorre.

### Corolário 6.1. Derivação termo a termo para séries

Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e conexo. Se a série  $\sum f_k$ , de aplicações diferenciáveis  $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , converge num ponto  $c \in U$  e a série das derivadas  $\sum f'_k$  converge de modo localmente uniforme em  $U$  para a soma  $g = \sum f'_k$ , então  $\sum f_k$  converge de modo localmente uniforme em  $U$  para uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável, com  $f' = g$ .

## 7 Aplicações fortemente diferenciáveis

Existe uma noção de diferenciabilidade, correspondente ao que seria classe  $C^1$ , mas onde se supõe que a aplicação é diferenciável num único ponto. Trata-se da noção de diferenciabilidade forte que veremos mais abaixo.

**Teorema 7.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação, definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , diferenciável no ponto  $a \in U$ .*

- (a) *Se a transformação linear  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora, então existem  $c > 0$  e  $\delta > 0$  tais que*  

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \geq c\|x - a\|.$$
- (b) *Se  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora, então em qualquer bola de centro  $a$  existem pontos  $x$  tais que  $\|f(a)\| < \|f(x)\|$  e, se  $f(a) \neq 0$ , pontos  $y$  tais que  $\|f(y)\| < \|f(a)\|$ .*

**Prova.**

(a) Como a aplicação  $f'(a) : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, por ser a restrição de uma aplicação linear, temos que a função  $\|f'(a)\| : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Sendo  $S^{m-1}$  compacta, existe  $v_0 \in S^{m-1}$  tal que  $\|f'(a)v\| \geq \|f'(a)v_0\|$  para todo  $v \in S^{m-1}$ . Logo  $2c = \|f'(a)v_0\| > 0$ , pois  $f'(a)$  é injetora. Além disso, como  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x),$$

com  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{\|x - a\|} = 0$ . Então, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - a\| < \delta \implies \|R(x)\| \leq c\|x - a\|.$$

Logo,

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \geq \|f'(a)(x - a)\| - \|R(x)\| \geq 2c\|x - a\| - c\|x - a\| = c\|x - a\|.$$

(b) Seja  $B_\delta(a) \subset U$  a bola de centro  $a$  e raio  $\delta > 0$ . Suponhamos, por absurdo, que  $\|f(x)\| \leq \|f(a)\|$  para todo  $x \in B_\delta(a)$ . Então  $a$  é um ponto de máximo da função  $\xi : B_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi(x) = \|f(x)\|$ . Além disso,  $f(a) \neq 0$ , pois, caso contrário,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in B_\delta(a)$  e,

portanto,  $f'(a) = 0$  não seria sobrejetora.

Como  $f(a) \neq 0$  temos, pelo exemplo 3.1, que  $\xi$  é diferenciável em  $a$  e  $\xi'(a)v = \frac{\langle f'(a)v, f(a) \rangle}{\|f(a)\|}$ .

Logo  $\langle f'(a)v, f(a) \rangle = 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , pois  $a$  é um ponto de máximo.

Em particular,  $f'(a)v \neq f(a)$  para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , uma contradição, pois  $f'(a)$  é sobrejetora.

De modo análogo, se  $f(a) \neq 0$  e não existirem pontos  $y \in B_\delta(a)$ , para algum  $\delta > 0$ , com  $\|f(y)\| < \|f(a)\|$ , então  $a$  seria um mínimo para a função  $\xi(x) = \|f(x)\|$ ,  $x \in B_\delta(a)$ , o que leva a uma contradição como acima. ■

**Corolário 7.1.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a \in U \subset \mathbb{R}^m$  e  $f'(a)$  é injetora, então existe uma bola de centro  $a$  tal que:

$$x \in B, x \neq a \implies f(x) \neq f(a).$$

**Observação 7.1.** Cabem as perguntas: se  $f'(a)$  é injetora, existe uma bola  $B$  de centro  $a$  tal que  $f|_B$  é injetora? E se  $f'(a)$  é sobrejetora,  $f(a) \in \text{int } f(U)$ ? A resposta a estas perguntas é **não**, sem hipóteses adicionais.

**Exemplo 7.1.** No caso  $n = m = 1$ ,  $f'(a) \neq 0$  equivale a dizer que  $f'(a)$  é injetora ou sobrejetora.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ , se  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ .

Então  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

Mas  $f$  não é injetora em intervalo algum da forma  $(-\delta, \delta)$ .

De fato, suponhamos que  $f$  é injetora em  $(-\delta, \delta)$ . Como  $f$  é contínua, temos que  $f$  é monótona.

Seja  $k_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $\frac{1}{2\pi k_0} < \delta$ . Sendo  $f(0) = 0 < f\left(\frac{2}{2\pi k_0}\right) = \frac{1}{2\pi k_0}$ ,  $f$  é crescente. Logo, para todo  $k \geq k_0$  par, temos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{2\pi k}\right) &\iff \frac{4}{((2k+1)\pi)^2} + \frac{1}{(2k+1)\pi} < \frac{1}{2k\pi} \\ &\iff \frac{1}{(2k+1)\pi} \left( \frac{4}{(2k+1)\pi} + 1 \right) < \frac{1}{2k\pi} \\ &\iff \frac{4}{(2k+1)\pi} + 1 < 1 + \frac{1}{2k} \\ &\iff 8k < (2k+1)\pi \iff \frac{1}{\pi} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8k}, \end{aligned}$$

e, portanto,  $\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{4}$ , uma contradição. □

**Observação 7.2.** Se a função  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, derivável no ponto  $a \in I$  e  $f'(a) > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset I$  e  $a - \delta < y < a < x < a + \delta \implies f(y) < f(a) < f(x)$ .

Em particular,  $f(a) \in \text{int } f(I)$ . O mesmo teríamos se  $f'(a) < 0$ .

O exemplo abaixo exhibe uma aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável na origem, cuja derivada  $f'(0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a aplicação identidade, mas  $f$  não é injetora em vizinhança alguma de 0, nem  $f(0) \in \text{int } f(U)$ , para todo aberto  $U$  contendo 0.

**Exemplo 7.2.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, x^2) & \text{se } (x, y) \in \Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } 0 < y < x^2 \} \\ (x, y) & \text{se } (x, y) \notin \Gamma. \end{cases}$$

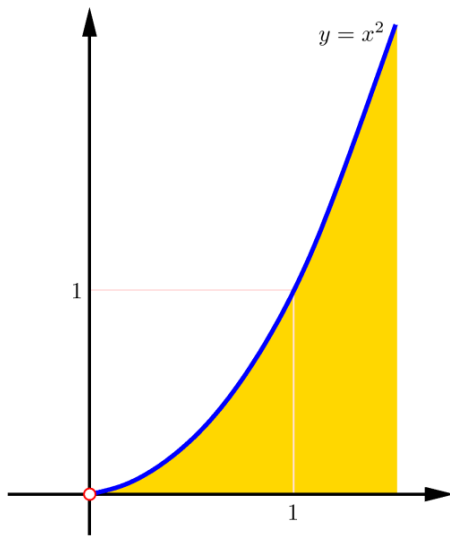


Fig. 3: A parte sombreada transforma-se por  $f$  na curva  $y = x^2$ ,  $x > 0$

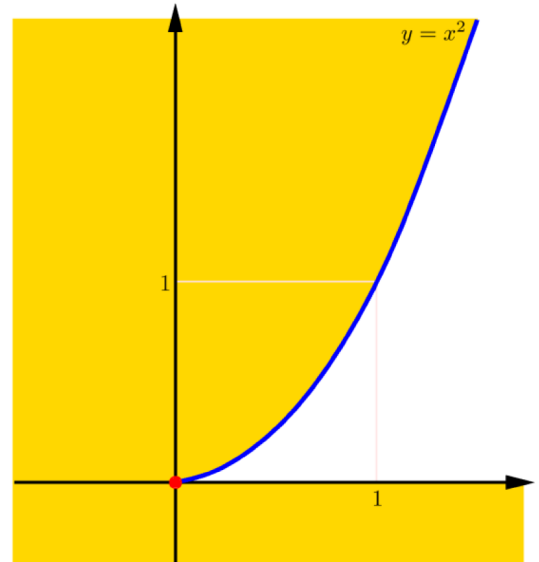


Fig. 4: A parte sombreada é a imagem de  $f$

**Afirmção:**  $f$  é descontínua nos pontos  $(x, 0)$ , com  $x > 0$ .

De fato, seja  $x > 0$  e consideremos a sequência  $p_n = (x, \frac{1}{n})$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < x^2$ . Logo  $p_n \rightarrow (x, 0)$ , mas  $f(p_n)$  não converge para  $f(x, 0) = (x, 0)$ , pois  $f(p_n) = (x, x^2)$  para todo  $n \geq n_0$ .

É fácil verificar que  $f$  é contínua nos demais pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

**Afirmção:**  $f$  é diferenciável na origem e  $f'(0, 0) = \text{Id}$  é a transformação identidade.

De fato, para todo  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(v) = f(0) + v + r(v)$ , onde  $r(v) = (0, x^2 - y)$  se  $x > 0$  e  $0 < y < x^2$ , e  $r(v) = 0$  nos demais pontos. Como a primeira coordenada é sempre zero e a segunda está sempre compreendida entre 0 e  $x^2$ , temos que

$$\left| \frac{r(v)}{\|v\|} \right| = \frac{|r(v)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x|.$$



Logo  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Ou seja,  $f$  é diferenciável na origem e  $f'(0)v = v$  para todo  $v \in \mathbb{R}^2$ .

Como em qualquer aberto contendo  $(0,0)$  existe um segmento de reta vertical de extremos  $(x,0)$  e  $(x,x^2)$ , com  $x > 0$ , o qual é transformado por  $f$  num único ponto  $(x,x^2)$ , temos que  $f$  não é injetora em vizinhança alguma de  $0$ . Além disso, como nenhum ponto  $(x,y)$ , com  $x > 0$  e  $0 < y < x^2$ , pertence à imagem de  $f$ , temos que  $f(0) = 0$  não é um ponto interior a  $f(U)$  para todo aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  contendo  $(0,0)$ .  $\square$

**Observação 7.3.** Podemos modificar um pouco o exemplo acima de modo a obter uma aplicação **contínua**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável na origem, com  $f'(0) = \text{Id}$ , tal que  $f$  não é injetora em nenhuma bola de centro  $0$  (ver exemplo abaixo).

Mas, com o auxílio da Teoria do Grau, é possível mostrar que se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e possui, no ponto  $a \in U$ , uma derivada  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é um isomorfismo, então  $f(a) \in \text{int } f(U)$ . Isto mostra que a descontinuidade da aplicação  $f$  do exemplo acima é essencial para termos  $f(a) \notin \text{int } f(U)$ .

**Exemplo 7.3.** Seja a aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \Gamma \\ (x, g(x, y)) & \text{se } (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad \text{onde} \quad g(x, y) = \begin{cases} 4y, & 0 \leq y \leq \frac{x^2}{4} \\ \frac{4}{3}(x^2 - y), & \frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x^2, & \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2. \end{cases}$$

Pode-se provar, com um pouco mais de trabalho que no exemplo anterior, que  $f$  é contínua em todos os pontos do plano e que  $f$  é diferenciável na origem, com  $f'(0) = \text{Id}$ . Além disso,  $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ .

Seja  $U$  um aberto qualquer contendo a origem. Então, para  $x > 0$  suficientemente pequeno,  $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$  e  $(x, x^2)$  pertencem a  $U$ .

Logo, como  $f\left(x, \frac{x^2}{4}\right) = f(x, x^2) = (x, x^2)$ , temos que  $f|_U$  não é injetora. Assim,  $f$  não é injetora em vizinhança alguma da origem.  $\square$

**Definição 7.1.** Dizemos que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é **fortemente diferenciável no ponto**  $a \in U$  quando existe uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que, para todos  $x, y \in U$ , vale

$$f(x) = f(y) + T(x - y) + \rho_a(x, y) |x - y|,$$

onde  $\lim_{x, y \rightarrow a} \rho_a(x, y) = 0$ .

**Observação 7.4.** Tomando  $y = a$ , obtemos que toda aplicação fortemente diferenciável no ponto  $a$  é diferenciável neste ponto e  $T = f'(a)$ .

Assim,  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in B_\delta(a) \implies |\rho_a(x, y)| < \varepsilon,$$

onde  $\rho_a(x, y) = f(x) - f(y) - f'(a)(x - y)$ .

**Observação 7.5.** Quando  $m = n = 1$ , uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , é fortemente diferenciável no ponto  $a \in I$  quando, para  $x \neq y$  em  $I$ , a reta secante ao gráfico de  $f$  que passa pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  tende para a reta tangente no ponto  $(a, f(a))$  quando  $x \rightarrow a$  e  $y \rightarrow a$ .

Na definição usual de derivada, temos apenas que a secante ao gráfico que passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$  tende à tangente no ponto  $(a, f(a))$  quando  $x \rightarrow a$ .

**Observação 7.6.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ , então, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$ , tal que

$$x, y \in B_\delta(a) \implies \|f(x) - f(y)\| \leq (\|f'(a)\| + \varepsilon) \|x - y\|.$$

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} x, y \in B_\delta(a) &\implies \|\rho_a(x, y)\| < \varepsilon \\ &\implies \|f(x) - f(y)\| \leq \|f'(a)(x - y)\| + \|\rho_a(x, y)\| \|x - y\| \\ &\leq (\|f'(a)\| + \varepsilon) \|x - y\|. \end{aligned}$$

Em particular,  $f$  é contínua, ou melhor,  $f$  é Lipschitziana numa bola de centro  $a$ .

**Teorema 7.2.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora, então existem  $c > 0$  e  $\delta > 0$  tais que

$$x, y \in B_\delta(a) \implies \|f(x) - f(y)\| \geq c \|x - y\|.$$

Logo  $f$  é um homeomorfismo da bola  $B_\delta(a)$  sobre sua imagem e, em particular,  $f$  é injetora na bola  $B_\delta(a)$ .

**Prova.**

Como  $f'(a)$  é injetora, já sabemos que existe  $c > 0$  tal que  $\|f'(a)v\| \geq 2c\|v\|$  para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Então, para  $\varepsilon = c > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in B_\delta(a) \implies \|r_a(x, y)\| < c\|x - y\|,$$

onde  $r_a(x, y) = f(x) - f(y) - f'(a)(x - y)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} x, y \in B_\delta(a) \implies \|f(x) - f(y)\| &\geq \|f'(a)(x - y)\| - \|r_a(x, y)\| \\ &\geq 2c\|x - y\| - c\|x - y\| \\ &= c\|x - y\|. \end{aligned}$$

Logo  $f : B_\delta \rightarrow Y = f(B_\delta(a))$  é uma bijeção e a inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow B_\delta(a)$  é contínua, pois  $\|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)\| \leq \frac{1}{c}\|w - z\|$  para quaisquer  $z, w \in Y$ . Portanto,  $f : B_\delta(a) \rightarrow Y$  é um homeomorfismo. ■

**Observação 7.7.** Provaremos na seção 11 (Forma local das submersões) que se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora, então  $f(a) \in \text{int } f(U)$ .

**Teorema 7.3.** A aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e só se, é diferenciável no ponto  $a$  e, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que o resto  $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$  satisfaz a condição de Lipschitz:

$$\|r_a(x) - r_a(y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|,$$

para todos  $x, y \in B_\delta(a)$ .

**Prova.**

Basta observar que  $r_a(x, y) = r_a(x) - r_a(y)$ , pois  $r_a(x, y) = f(x) - f(y) - f'(a)(x - y)$ ,  $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$  e  $r_a(y) = f(y) - f(a) - f'(a)(y - a)$ . ■

O teorema abaixo mostra que a única diferença entre a diferenciabilidade forte e a continuidade da derivada é que a primeira faz sentido mesmo quando a aplicação é diferenciável num único ponto

**Teorema 7.4.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável. Então  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  se, e só se, a aplicação derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  é contínua no ponto  $a$ .

**Prova.**

Suponhamos que  $f'$  é contínua no ponto  $a$ . Seja  $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ . Então  $r_a$  é diferenciável, com derivada  $r'_a(x) = f'(x) - f'(a)$  contínua no ponto  $a$  e  $r'_a(a) = 0$ .

Logo, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(a) \subset U$  e  $x \in B_\delta(a) \implies \|r'_a(x)\| < \varepsilon$ .

Como  $B_\delta(a)$  é convexo, temos, pelo corolário 5.1, que se  $x, y \in B_\delta(a)$ , então  $\|r_a(x) - r_a(y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|$ . Assim, pelo teorema 7.3,  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ .

Somando as igualdades

$$f(x) - f(y) = f'(a)(x - y) + r_a(x, y) \quad \text{e} \quad f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + r_x(y),$$

obtemos que

$$(f'(x) - f'(a))(y - x) = -(r_a(x, y) + r_x(y)). \quad (*)$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in B_{2\delta}(a) \implies \|r_a(x, y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|, \quad (**)$$

e, para todo  $x \in U$ , existe  $0 < \delta_x < \delta$ , tal que

$$\|y - x\| < \delta_x \implies \|r_x(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|y - x\|. \quad (***)$$

Seja  $u \in \mathbb{R}^m$  um vetor unitário e seja  $x \in U$  tal que  $\|x - a\| < \delta$ . Tome  $y = x + \frac{\delta_x}{2} u$ .

Então  $\|y - a\| < 2\delta$  e  $\|y - x\| < \delta_x$ . Logo, por (\*), (\*\*) e (\*\*\*),

$$\|(f'(x) - f'(a))(y - x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\| + \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|.$$

Assim,  $\|(f'(x) - f'(a)) \frac{\delta_x}{2} u\| \leq \varepsilon \frac{\delta_x}{2}$ , ou seja,  $\|(f'(x) - f'(a)) u\| \leq \varepsilon$  para  $u \in \mathbb{R}^m$  unitário.

Portanto,  $\|f'(x) - f'(a)\| \leq \varepsilon$ . ■

**Exemplo 7.4.** Daremos agora um exemplo de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortemente diferenciável num ponto  $a \in \mathbb{R}$  que não é diferenciável em vizinhança alguma de  $a$ .

Para isso, consideramos a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  dada por  $g(x) = x^2$  e a sequência  $a_n = \frac{1}{n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por:

- $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in (-\infty, 0] \cup [a_1, +\infty)$ ;
- $f(a_n) = g(a_n)$ ;
- $f|_{[a_{n+1}, a_n]}$  é linear para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $f(x) = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n - a_{n+1}}(x - a_{n+1}) + a_{n+1}^2$  para todo  $x \in [a_{n+1}, a_n]$ .

Então  $f$  não é diferenciável em  $a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_n^-} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} &= \lim_{x \rightarrow a_n^-} \frac{\frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n - a_{n+1}}(x - a_{n+1}) + a_{n+1}^2 - a_n^2}{x - a_n} = \lim_{x \rightarrow a_n^-} \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n - a_{n+1}} = a_n + a_{n+1}; \\ \lim_{x \rightarrow a_n^+} \frac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n} &= \lim_{x \rightarrow a_n^+} \frac{\frac{a_{n-1}^2 - a_n^2}{a_{n-1} - a_n}(x - a_n) + a_n^2 - a_n^2}{x - a_n} = a_{n-1} + a_n, \end{aligned}$$

e, portanto,  $f'(a_n^-) = a_n + a_{n+1} \neq a_{n-1} + a_n = f'(a_n^+)$ .

Mas  $f$  é fortemente diferenciável na origem e  $f'(0) = 0$ .

De fato: Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ . Sejam  $x, y \in \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right)$ ,  $x < y$  e  $r_a(x, y) = f(x) - f(y)$ .

- Se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ , então

$$|r_a(x, y)| = |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| \leq \frac{2}{n_0} |x - y| < \varepsilon |x - y|.$$

- Se  $x \leq 0$  e  $0 < y < \frac{1}{n_0}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ . Então  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$  e

$$\begin{aligned} |r_a(x, y)| &= |f(x) - f(y)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f(y) \right| \\ &= \left| x^2 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \right| + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left| y - \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \left| x + \frac{1}{n+1} \right| \left| x - \frac{1}{n+1} \right| + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \left| y - \frac{1}{n+1} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{n+1} - x\right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(y - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (y - x) = \frac{\varepsilon}{2} |y - x| < \varepsilon |y - x|. \end{aligned}$$

- Se  $x > 0$  e  $y > 0$ , existem  $j, k \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq k$ , tais que  $x \in \left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$  e  $y \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ .

Como  $\frac{1}{j+1} < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{n_0}$  e  $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n_0}$ , temos, no caso  $j < k$ , que:

$$\begin{aligned} |r_a(x, y)| &= |f(x) - f(y)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{1}{j}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{j}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{k+1}\right) - f(y) \right| \\ &= \left| \frac{a_j^2 - a_{j+1}^2}{a_j - a_{j+1}} (x - a_{j+1}) + a_{j+1}^2 - a_j^2 \right| + |a_j^2 - a_{k+1}^2| + \left| \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_k - a_{k+1}} (y - a_{k+1}) \right| \\ &= \frac{|a_j^2 - a_{j+1}^2|}{|a_j - a_{j+1}|} |x - a_j| + |a_j + a_{k+1}| |a_j - a_{k+1}| + |a_k + a_{k+1}| |y - a_{k+1}| \\ &= |a_j + a_{j+1}| |x - a_j| + |a_j + a_{k+1}| |a_j - a_{k+1}| + |a_k + a_{k+1}| |y - a_{k+1}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} |(a_j - x) + (a_{k+1} - a_j) + (y - a_{k+1})| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (y - x) < \varepsilon |y - x|. \end{aligned}$$

E quando  $j = k$ , ou seja,  $\frac{1}{j+1} \leq x < y \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{n_0}$ , temos que:

$$|f(y) - f(x)| = (a_j + a_{j+1}) (y - x) \leq \frac{\varepsilon}{2} (y - x) < \varepsilon |y - x|. \quad \square$$

## 8 O teorema da aplicação inversa

Se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo, então sua derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo em todo ponto  $x \in U$ , ou seja,  $\det Jf(x) \neq 0$  para todo  $x \in U$ , onde  $Jf(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij}$  é a matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $x$ . É natural, então, indagar se a recíproca é válida. Antes de responder a esta pergunta, vamos analisar alguns exemplos.

**Exemplo 8.1.** Uma função diferenciável  $f : I \longrightarrow J$  do intervalo aberto  $I$  sobre o intervalo aberto  $J \subset \mathbb{R}$  é um difeomorfismo se, e só se,  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .

De fato, se  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , então, pelo Teorema de Darboux, temos que ou  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in I$  ou  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in I$ . No primeiro caso,  $f$  é um homeomorfismo crescente, e, no segundo caso,  $f$  é um homeomorfismo decrescente. E, em qualquer caso, pelo Teorema da Função Inversa para funções reais de uma variável real (ver *Curso de Análise, Vol. I* de E. Lima)  $f^{-1} : J \longrightarrow I$  é diferenciável. Portanto, para  $n = 1$ , a resposta a nossa pergunta é afirmativa.  $\square$

**Exemplo 8.2.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  a bola aberta de centro na origem e raio 1. A aplicação  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \langle x, x \rangle}}$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ , cujo inverso é a aplicação  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$  dada por  $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \langle y, y \rangle}}$ .  $\square$

**Exemplo 8.3.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação dada por  $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ , ou, em termos da variável complexa  $z = x + iy$ ,  $f(z) = e^z$ . Então  $f$  é de classe  $C^\infty$  e  $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por:

$$f'(x, y)(u, v) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

ou seja,  $f'(z)w = e^z w$  é a multiplicação pelo número complexo  $e^z$ , onde  $w = u + iv$ . Logo,

$$\det Jf(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Mas  $f$  não é injetora, pois  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$  se, e só se,  $x_1 = x_2$  e  $y_2 = y_1 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Geometricamente,  $f$  transforma cada reta vertical  $x = a$  num círculo de raio  $e^a$  e centro na origem, e cada reta horizontal  $y = b$  numa semi-reta aberta que parte da origem e passa pelo ponto  $(\cos b, \sin b)$ .

Temos, então, que  $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

Obteremos, como consequência do Teorema da Aplicação Inversa, que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  é um difeomorfismo local.  $\square$

**Definição 8.1.** Dizemos que uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , é um *difeomorfismo local* quando para todo  $x \in U$  existe um aberto  $V_x$ , com  $x \in V_x \subset U$ , tal que a restrição de  $f$  a  $V_x$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $W_x \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $f \in C^k$ , dizemos que  $f$  é um *difeomorfismo local de classe  $C^k$* . Neste caso, para todo  $x \in U$ , a aplicação inversa  $(f|_{V_x})^{-1} : W_x \rightarrow V_x$  é também de classe  $C^k$  pelo corolário 3.4.

**Observação 8.1.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo local, então  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo para todo  $x \in U$ . O Teorema da Aplicação Inversa nos dará a recíproca deste fato, no caso em que  $f \in C^k$  ( $k \geq 1$ ).

**Observação 8.2.** Todo difeomorfismo (global) é um difeomorfismo local.

**Observação 8.3.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no intervalo aberto  $I$ , é um difeomorfismo local se, e só se,  $f$  é um difeomorfismo (global) de  $f$  sobre sua imagem  $J = f(I)$ .

**Observação 8.4.** Todo difeomorfismo local  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação aberta, isto é,  $f(V)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  para todo  $V \subset U$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

De fato, seja  $V \subset U$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Então, para cada  $x \in V$ , existe um aberto  $V_x \subset U$ ,  $x \in V_x$ , e um aberto  $W_x \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $f : V_x \rightarrow W_x$  é um difeomorfismo. Logo  $f(V \cap V_x)$  é aberto para todo  $x \in V$  e, portanto,  $f(V) = \bigcup_{x \in V} f(V \cap V_x)$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Em particular,  $f(U)$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 8.5.** Um difeomorfismo local  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo (global) sobre sua imagem  $f(U) = V$  se, e só se,  $f$  é uma aplicação injetora.

De fato, se  $f$  é um difeomorfismo local, temos, pela observação acima, que  $f(U) = V$  é aberto. Se, além disso,  $f : U \rightarrow V$  é uma bijeção, temos que  $f^{-1} : V \rightarrow U$  é diferenciável, pois  $f^{-1}$  é diferenciável em todos os pontos  $f(x) \in V$ , uma vez que  $f^{-1}|_{W_x} : W_x \rightarrow V_x$  é diferenciável,  $f(x) \in W_x$  e a diferenciabilidade é uma propriedade local.

Para demonstrar o Teorema da Aplicação Inversa utilizaremos o *Método das Aproximações Sucessivas*.

**Definição 8.2.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Dizemos que uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma *contração* quando existem  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , e normas em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , tais que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in X$ .

**Observação 8.6.** Ao precisarmos especificar a constante  $\lambda$  diremos que  $f$  é uma  $\lambda$ —*contração*.

**Observação 8.7.** Toda contração é Lipschitziana, e, portanto, uniformemente contínua.

**Observação 8.8.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e convexo. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável e  $\|f'(x)\| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in U$ , temos, pelo corolário 5.1, que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in U$ , ou seja,  $f$  é uma  $\lambda$ —contração.

**Definição 8.3.** Um *ponto fixo* de uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $X \subset \mathbb{R}^m$ , é um ponto  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$ .

**Observação 8.9.** A busca de uma solução  $x$  para uma equação do tipo  $f(x) = b$  reduz-se à procura de um ponto fixo para a aplicação  $\xi$ , dada por  $\xi(x) = f(x) - b + x$ , pois  $\xi(x) = x$  se, e só se,  $f(x) = b$ .

**Teorema 8.1.** (do ponto fixo para contrações – método das aproximações sucessivas)

Sejam  $F \subset \mathbb{R}^m$  um subconjunto fechado e  $f : F \rightarrow F$  uma contração. Então, dado qualquer  $x_0 \in F$ , a sequência  $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots$  converge para um ponto  $a \in F$ , que é o único ponto fixo de  $f$ .

*Prova.*

**Unicidade:** Sejam  $a, b \in F$  tais que  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ , e seja  $0 \leq \lambda < 1$  tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in F$ . Então

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq \lambda\|a - b\|,$$

ou seja,  $(1 - \lambda)\|a - b\| \leq 0$ . Logo  $a = b$ , pois  $1 - \lambda > 0$  e  $\|a - b\| \geq 0$ .

**Existência:** Seja  $x_0 \in F$  e consideremos a sequência  $\{x_k\}$  onde  $x_{k+1} = f(x_k)$  para todo  $k \geq 0$ . Então

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \lambda\|x_k - x_{k-1}\|,$$

para todo  $k \geq 1$ . Logo, por indução, podemos provar que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda^k\|x_1 - x_0\|,$$

para todo  $k \geq 0$ .

Assim,

$$\|x_{k+p} - x_k\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|x_{k+i+1} - x_{k+i}\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i}\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|,$$

para todos  $k, p \in \mathbb{N}$ .



Mas, como  $\lambda^k \rightarrow 0$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \implies \|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon,$$

para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Ou seja, a sequência  $\{x_k\}$  é de Cauchy e, portanto, converge para um ponto  $\alpha$ , onde  $\alpha \in F$ , pois  $F$  é fechado.

Além disso, como  $f$  é contínua, temos que  $f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha$ , isto é,  $\alpha$  é um ponto fixo de  $f$ . ■

**Exemplo 8.4.** O ponto fixo de uma aplicação  $f : F \rightarrow F$  pode não existir quando tivermos apenas  $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in F$ ,  $x \neq y$ .

De fato, seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)$ . Como  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ , temos que  $0 < f'(x) < 1$ , pois  $\left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  para quaisquer  $x, y \in F$ ,  $x \neq y$ , mas  $f$  não possui um ponto fixo, pois  $f(x) > x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . □

**Observação 8.10.** Se  $K \subset \mathbb{R}^m$  é compacto e a aplicação  $f : K \rightarrow K$  satisfaz a condição  $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$  para todo par de pontos  $x \neq y$  em  $K$ , então  $f$  possui um único ponto fixo em  $K$ .

Com efeito, seja  $\alpha \in K$  o ponto onde a função contínua  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$ , atinge seu mínimo  $c = \|f(\alpha) - \alpha\|$ . Se  $c \neq 0$ , ou seja,  $f(\alpha) \neq \alpha$ , teríamos

$$\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = c,$$

uma contradição, pois  $\varphi(f(\alpha))$  seria menor do que o mínimo  $c$ . Logo  $f(\alpha) = \alpha$ , ou seja,  $\alpha$  é um ponto fixo de  $f$ .

Suponhamos agora que  $f(\alpha) = \alpha$ ,  $f(b) = b$  e  $\alpha \neq b$ . Então  $\|a - b\| = \|f(\alpha) - f(b)\| < \|a - b\|$ , um absurdo. Logo  $f$  possui um único ponto fixo.

Para garantir que uma contração  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  possui um ponto fixo, basta encontrar um subconjunto  $F \subset X$  fechado em  $\mathbb{R}^m$  tal que  $f(F) \subset F$ .

**Lema 8.1.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma  $\lambda$ -contração. Se  $B[\alpha; r] \subset X$  e  $\|f(\alpha) - \alpha\| \leq (1 - \lambda)r$ , então  $f$  admite um único ponto fixo em  $B[\alpha; r]$ .*

**Prova.**

Pelo teorema anterior, basta provar que  $f(B[\alpha; r]) \subset B[\alpha; r]$ , o que ocorre, pois  $x \in B[\alpha; r] \implies \|x - \alpha\| \leq r \implies$

$$\|f(x) - \alpha\| \leq \|f(x) - f(\alpha)\| + \|f(\alpha) - \alpha\| \leq \lambda\|x - \alpha\| + (1 - \lambda)r \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \quad \blacksquare$$

**Teorema 8.2.** (da perturbação da identidade)

Seja  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma  $\lambda$ -contração definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Então a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $f(x) = x + \varphi(x)$ , é um homeomorfismo de  $U$  sobre o conjunto aberto  $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ . Além disso, se  $U = \mathbb{R}^m$  então  $f(U) = \mathbb{R}^m$ .

**Prova.**

Para quaisquer  $x, y \in U$ , temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|x - y + \varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \|x - y\| - \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \\ &\geq \|x - y\| - \lambda\|x - y\| = (1 - \lambda)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Então  $f$  é uma bijeção de  $U$  sobre  $f(U)$  e a aplicação inversa  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)\| \leq c \|z - w\|,$$

com  $c = \frac{1}{1 - \lambda}$ , para todos  $z, w \in f(U)$ . Em particular,  $f$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre  $f(U)$ .

Seja  $b \in f(U)$ . Então existe  $a \in U$  tal que  $b = f(a) = \varphi(a) + a$ .

**Afirmção:** Existe  $\delta > 0$  tal que  $B(b; \delta) \subset f(U)$ .

Sejam  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $r > 0$  tal que  $B[a; r] \subset U$ , e consideremos a aplicação  $\xi_y : B[a; r] \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$ . Então  $\xi_y$  é uma  $\lambda$ -contração e  $\xi_y(x) = x \iff y = x + \varphi(x) = f(x)$ .

Sendo  $\xi_y(a) - a = y - a - \varphi(a) = y - b$ , temos que

$$\|y - b\| \leq (1 - \lambda)r \implies \|\xi_y(a) - a\| \leq (1 - \lambda)r,$$

Então, pelo lema 8.1,  $\xi_y(B[a; r]) \subset B[a; r]$  e portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo para Contrações, existe  $x \in B[a; r] \subset U$  tal que  $\xi_y(x) = x$ , ou seja, existe  $x \in U$  tal que  $f(x) = y$ . Logo,  $B[b; (1 - \lambda)r] \subset f(U)$  e, portanto,  $b \in \text{int } f(U)$ . Como  $b \in f(U)$  é arbitrário, provamos que  $f(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^m$ .

Finalmente, se  $U = \mathbb{R}^m$  então  $B[a; r] \subset \mathbb{R}^m$  para todo  $r > 0$ . Logo, pelo provado acima,  $B[f(a); (1 - \lambda)r] \subset f(U)$  para todo  $r > 0$ .

Se tomarmos  $r_k = \frac{k}{1 - \lambda} > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , teremos que  $B[f(a); k] \subset f(U)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim,  $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[f(a); k] \subset f(U)$ , ou seja,  $f(U) = \mathbb{R}^m$ . ■

**Corolário 8.1.** (Perturbação de um isomorfismo)

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação da forma  $f(x) = Tx + \varphi(x)$ , onde  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma transformação linear invertível e a aplicação  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaz  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ , com  $\lambda\|T^{-1}\| < 1$ .

Então  $f$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre o conjunto aberto  $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ . Além disso, se  $U = \mathbb{R}^m$ , tem-se  $f(U) = \mathbb{R}^m$ .

**Prova.**

Consideremos as aplicações  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  dadas por

$$g(x) = (T^{-1} \circ f)(x) = x + (T^{-1} \circ \varphi)(x) \quad \text{e} \quad \psi(x) = (T^{-1} \circ \varphi)(x).$$

Então  $\psi$  é uma  $\mu$ -contração, com  $\mu = \lambda \|T^{-1}\| < 1$ , pois:

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|T^{-1}(\varphi(x)) - T^{-1}(\varphi(y))\| \leq \|T^{-1}\| \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|T^{-1}\| \lambda \|x - y\|.$$

Logo, pelo teorema acima,  $g = T^{-1} \circ f$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre o aberto  $T^{-1}(f(U))$  e  $T^{-1}(f(U)) = \mathbb{R}^m$  quando  $U = \mathbb{R}^m$ . Então, como  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um homeomorfismo, pois  $T$  é um isomorfismo, temos que  $f = T \circ g$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre o aberto  $f(U)$  e  $f(U) = T(T^{-1}(f(U))) = T(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$  quando  $U = \mathbb{R}^m$ . ■

## Lema 8.2. (da diferenciabilidade do homeomorfismo inverso)

Seja  $f : U \rightarrow V$  um homeomorfismo entre os abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $f$  é diferenciável num ponto  $a \in U$  e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo, então o homeomorfismo inverso  $f^{-1} : V \rightarrow U$  é diferenciável no ponto  $b = f(a)$ . Se  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ , então  $f^{-1}$  é fortemente diferenciável no ponto  $b = f(a)$ .

**Prova.**

Fazendo  $g = f^{-1}$  e

$$s(w) = g(b + w) - g(b) - f'(a)^{-1}w, \tag{1}$$

precisamos mostrar que  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{s(w)}{\|w\|} = 0$ .

Seja  $v = g(b + w) - g(b)$ . Então

$$f(a + v) - f(a) = f(a + g(b + w) - g(b)) - f(a) = f(g(b + w)) - b = b + w - b = w.$$

Como  $f$  e  $g$  são contínuas, temos que  $v \rightarrow 0$  se, e só se,  $w \rightarrow 0$ .

Além disso, como  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ ,

$$f(a + v) - f(a) = f'(a)v + r(v), \quad \text{onde} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0. \tag{2}$$

Como  $v = g(b + w) - g(b)$  e  $w = f(a + v) - f(a)$ , temos, por (1) e (2), que

$$\begin{aligned} v &= (f'(a))^{-1}(f(a + v) - f(a)) + s(w) \\ &= (f'(a))^{-1}(f'(a)v + r(v)) + s(w) \\ &= v + (f'(a))^{-1}r(v) + s(w). \end{aligned}$$

Logo,

$$s(w) = -(f'(a))^{-1} r(v), \quad (3)$$

e

$$\frac{s(w)}{\|w\|} = -(f'(a))^{-1} \frac{r(v)}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|w\|}. \quad (4)$$

Pelo Teorema 7.1, existem  $c > 0$  e  $\mu > 0$  tais que

$$\|f(a+v) - f(a)\| \geq c\|v\|,$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  com  $\|v\| < \mu$ . Ou seja,

$$\frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\|v\|}{\|f(a+v) - f(a)\|} \leq \frac{1}{c}, \quad (5)$$

quando  $\|v\| < \mu$ .

Além disso, como  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \mu' < \mu$  tal que

$$\|v\| < \mu' \implies \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \leq \frac{\varepsilon c}{\|(f'(a))^{-1}\|}. \quad (6)$$

Por outro lado, como  $g$  é contínua no ponto  $b = f(a)$  e  $v = g(b+w) - g(b)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|w\| < \delta \implies \|v\| < \mu'$ . Logo, por (4), (5), (6),

$$\begin{aligned} \|w\| < \delta \implies \frac{\|s(w)\|}{\|w\|} &= \frac{\|(f'(a))^{-1} r(v)\|}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|w\|} \leq \|(f'(a))^{-1}\| \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|w\|} \\ &\leq \|(f'(a))^{-1}\| \frac{\varepsilon c}{\|(f'(a))^{-1}\|} \frac{1}{c} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo  $g = f^{-1}$  é diferenciável no ponto  $b = f(a)$  e  $g'(b) = (f'(a))^{-1}$ .

Suponhamos agora que  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ . Fazendo  $v = g(b+w) - g(b)$  e  $u = g(b+z) - g(b)$  temos, por (3), que

$$s(w) - s(z) = (f'(a))^{-1} [r(u) - r(v)]. \quad (7)$$

Como  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  é injetora temos, pelo teorema 7.2, que existem  $c > 0$  e  $\mu > 0$  tais que

$$\|u\| < \mu \text{ e } \|v\| < \mu \implies \|f(a+u) - f(a+v)\| \geq c\|u-v\|. \quad (8)$$

Além disso, dado  $\varepsilon > 0$ , existe, pelo teorema 7.3,  $0 < \mu' < \mu$  tal que

$$u, v \in B(0; \mu') \implies \|r(u) - r(v)\| \leq \frac{c\varepsilon}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|u-v\|. \quad (9)$$

Como  $g$  é contínua em  $b$  e  $u = g(b+z) - g(b)$ ,  $v = g(b+w) - g(b)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|z\| < \delta, \|w\| < \delta \implies \|u\| < \mu', \|v\| < \mu'.$$

Logo, por (7), (9), (8),  $\|w\| < \delta$  e  $\|z\| < \delta \implies$

$$\begin{aligned} \|s(w) - s(z)\| &\leq \|(f'(a))^{-1}\| \|r(u) - r(v)\| \leq \|(f'(a))^{-1}\| \frac{c\varepsilon}{\|(f'(a))^{-1}\|} \|u-v\| \\ &\leq \frac{c\varepsilon}{c} \|f(a+u) - f(a+v)\| = \varepsilon \|z-w\|. \end{aligned}$$

Finalmente, pelo teorema 7.3,  $g = f^{-1}$  é fortemente diferenciável no ponto  $b = f(a)$ . ■

### Teorema 8.3. (da Aplicação Inversa)

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$  tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo. Então  $f$  é um homeomorfismo de um aberto  $V$  contendo  $a$  sobre um aberto  $W$  contendo  $f(a)$ , o homeomorfismo inverso  $f^{-1} : W \rightarrow V$  é fortemente diferenciável no ponto  $b = f(a)$  e sua derivada neste ponto é  $(f'(a))^{-1}$ . Se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então  $V$  pode ser tomado de modo que  $f$  seja um difeomorfismo de  $V$  sobre  $W$  (e pelo corolário 3.4, tem-se que  $f^{-1}$  é, também, de classe  $C^k$ ).

#### Prova.

Seja  $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ . Como  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ , temos, pelo teorema 7.3, que dado  $0 < \lambda < \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in B(a; \delta) \implies \|r(x) - r(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Como

- $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo;
- $f(x) = f'(a)x + r(x) + f(a) - f'(a) \cdot a$  e  $\|r(x) - r(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ , para quaisquer  $x, y \in V = B(a; \delta)$ , onde  $\varphi(x) = r(x) + f(a) - f'(a) \cdot a$ ;
- $0 < \lambda \|(f'(a))^{-1}\| < 1$ ,

temos, pelo corolário 8.1, que  $f$  é um homeomorfismo do aberto  $V$  sobre o aberto  $W = f(V)$ . Portanto, pelo lema 8.2, a inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$  é fortemente diferenciável no ponto  $b = f(a)$ .

Suponhamos agora que  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo. Então, pelo teorema 7.4,  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ , e, pelo provado acima, existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é um homeomorfismo de  $V = B(a; \delta)$  sobre o aberto  $W = f(V)$ .

Como a aplicação derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$  é contínua, o conjunto  $GL(\mathbb{R}^m)$  dos isomorfismos lineares de  $\mathbb{R}^m$  é aberto em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$  e  $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^m)$ , existe  $0 < \delta' < \delta$  tal que  $f'(x) \in GL(\mathbb{R}^m)$  para todo  $x \in B(a; \delta') = V' \subset V$ .

Sendo  $W' = f(V')$  aberto em  $\mathbb{R}^m$  e  $f : V' \rightarrow W'$  um homeomorfismo diferenciável, temos, pelo lema 8.2, que  $f^{-1} : W' \rightarrow V'$  é diferenciável em todos os pontos de  $W'$ .

Logo  $f : V' \rightarrow W'$  é um difeomorfismo. ■

**Corolário 8.2.** Uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ), definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é um difeomorfismo local se, e só se, para todo  $x \in U$ ,  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo (ou seja,  $\det Jf(x) \neq 0$ ).

### Corolário 8.3. (Perturbação diferenciável da identidade)

Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto convexo. Se  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^1$ , com  $\|\varphi'(x)\| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in U$ , então  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por  $f(x) = x + \varphi(x)$ , é um difeomorfismo de  $U$  sobre sua imagem  $f(U)$ . Se, além disso,  $U = \mathbb{R}^m$ , então  $f(U) = \mathbb{R}^m$ .

**Prova.**

Como  $U \subset \mathbb{R}^m$  é aberto e convexo e  $\|\varphi'(x)\| \leq \lambda$  para todo  $x \in U$ , temos, pelo corolário 5.1, que  $\varphi$  é uma  $\lambda$ -contração. Logo, pelo teorema da perturbação da identidade,  $f$  é um homeomorfismo de  $U$  sobre o aberto  $f(U)$ .

Além disso, como  $f'(x) = \text{Id} + \varphi'(x)$  e  $\|\varphi'(x)\| \leq \lambda < 1$ , para todo  $x \in U$ , temos que  $f'(x)$  é um isomorfismo para todo  $x \in U$ , pois, caso contrário, existiria  $v \in \mathbb{R}^m - \{0\}$  tal que  $\varphi'(x)v = -v$ , um absurdo, uma vez que  $\left\| \varphi'(x) \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \leq \|\varphi'(x)\|$ .

Portanto, pelo corolário 8.2,  $f$  é um difeomorfismo local. Como  $f : U \rightarrow f(U)$  é injetora,  $f$  é um difeomorfismo (global). ■

**Exemplo 8.5.** Seja  $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  a aplicação definida por  $f(X) = X^k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $f$  é de classe  $C^\infty$  e

$$f'(X)V = \sum_{i=1}^k X^{i-1} V X^{k-i}.$$

De fato, como  $f(X) = L(X, \dots, X)$ , onde  $L : \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é a aplicação  $k$ -linear, não-simétrica dada por  $L(X_1, \dots, X_k) = X_1 \cdot \dots \cdot X_k$ , temos, pela observação 8.4 do capítulo 3, que  $f$  é de classe  $C^\infty$  e

$$f'(X)V = \frac{1}{(k-1)!} L_S(X, \dots, X, V) = \frac{(k-1)!}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k \underbrace{X \cdot \dots \cdot X}_{i-1} \cdot V \cdot \underbrace{X \cdot \dots \cdot X}_{k-i} = \sum_{i=1}^k X^{i-1} \cdot V \cdot X^{k-i}.$$

Ou ainda, como  $f = L \circ h$ , onde  $h : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^2}}_k$  é a aplicação de classe  $C^\infty$  dada por  $h(X) = (X, \dots, X)$ , então  $f$  é de classe  $C^\infty$  e, pela Regra da Cadeia e pelo exemplo 2.3,

$$\begin{aligned} f'(X) \cdot V &= L'(X, \dots, X) \circ h'(X) \cdot V = L'(X, \dots, X) \cdot (V, \dots, V) \\ &= \sum_{i=1}^k L(X, \dots, X, \underbrace{V}_i, X, \dots, X) = \sum_{i=1}^k X^{i-1} V X^{k-i} \end{aligned}$$

No ponto  $X = \text{Id}$ , temos  $f'(\text{Id}) \cdot V = kV$ . Logo  $f'(\text{Id}) : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é um isomorfismo.

Pelo teorema da Aplicação Inversa, existem abertos  $V, W \subset \mathbb{R}^{n^2}$  tais que  $\text{Id} \in V$ ,  $f(\text{Id}) = \text{Id} \in W$  e  $f : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Isto é, para todo  $Y \in W$ , existe uma única matriz  $X \in V$  tal que  $X^k = Y$  e  $X$  (raiz  $k$ -ésima de  $Y$ ) é uma aplicação de classe  $C^\infty$  de  $Y$ . □

## 9 Aplicação: o Lema de Morse

Como ilustração sobre o emprego do Teorema da Aplicação Inversa, provaremos o *Lema de Morse*, segundo o qual, na vizinhança de um ponto crítico não-degenerado de uma função  $f$ , é possível tomar um sistema de coordenadas em relação ao qual  $f$  se exprime como uma forma quadrática com coeficientes constantes:

$$f(y) = \sum a_{ij} y_i y_j.$$

**Definição 9.1.** Um *sistema de coordenadas de classe  $C^k$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$*  é um difeomorfismo  $\xi : V \rightarrow U$  de classe  $C^k$  definido num aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$ . As coordenadas de um ponto  $p \in U$  no sistema  $\xi$  são os números  $y_1, \dots, y_m$  tais que  $y = (y_1, \dots, y_m) \in V$  e  $\xi(y) = p$ .

**Exemplo 9.1.** Seja  $\mathcal{P} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ . Então, no aberto  $U = \mathbb{R}^2 - \mathcal{P}$ , podemos introduzir um sistema de coordenadas  $\xi : V \rightarrow U$  de classe  $C^\infty$ , definido no aberto  $V = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  por  $\xi(r, \theta) = re^{i\theta} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

De fato, como  $\xi$  é injetora,  $\xi(V) = U$  e  $\det J\xi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \neq 0$ , temos, pelo Teorema da Aplicação Inversa, que  $\xi$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .

Se  $P = (x, y) = \xi(r, \theta)$  então  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância de  $P$  à origem e  $\theta$  é o ângulo, em radianos, que  $OP$  faz com o semi-eixo positivo das abscissas. Os números  $r$  e  $\theta$  são chamados as *coordenadas polares* do ponto  $P = (x, y)$ .

Mais geralmente, se  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  é qualquer semi-reta fechada partindo da origem que faz um ângulo  $\theta_0$  com o semi-eixo positivo das abscissas, podemos definir um sistema de coordenadas polares  $\xi : (0, \infty) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \rightarrow U = \mathbb{R}^2 - \mathcal{P}$  pela mesma fórmula  $\xi(r, \theta) = re^{i\theta}$ .  $\square$

**Exemplo 9.2.** Seja  $\mathcal{P} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$  e seja  $V = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . Então, a aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$  definida por

$$\xi(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi),$$

é um sistema de coordenadas de classe  $C^\infty$  no aberto  $\mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$ .

De fato, se  $P = (x, y, z) = \xi(r, \varphi, \theta)$ , então  $r$  é a distância de  $P$  à origem,  $\varphi$  é o ângulo que o raio  $OP$  faz com o semi-eixo positivo dos  $z$  e  $\theta$  é o ângulo que  $(x, y, 0)$  faz com o semi-eixo positivo dos  $x$ .

Com isto, é fácil verificar que  $\xi$  é injetora e  $\xi(V) = \mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$ . Além disso, como

$$\det J\xi(r, \varphi, \theta) = \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \varphi > 0,$$

temos que  $\xi$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .

Se  $P = (x, y, z) = \xi(r, \varphi, \theta)$ , os números  $r, \varphi, \theta$  são chamados as **coordenadas esféricas** do ponto  $P \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$   $\square$

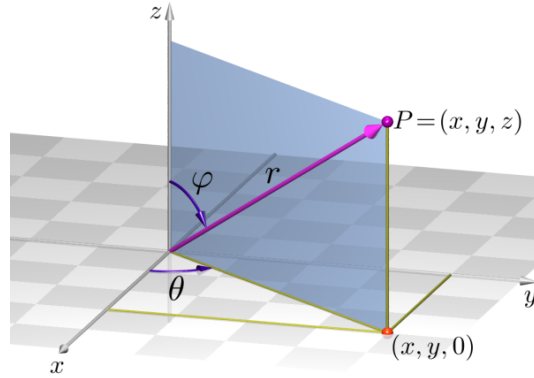


Fig. 5: Coordenadas esféricas  $(r, \varphi, \theta)$  do ponto  $P = (x, y, z)$

**Observação 9.1.** A introdução de um novo sistema de coordenadas numa região do espaço euclidiano tem por objetivo simplificar a descrição de certos conjuntos ou funções. Por exemplo, em coordenadas esféricas, a função  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  torna-se  $f \circ \xi(r, \varphi, \theta) = r$  e a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$  é descrita pela equação  $r = c$ .

O Lema de Morse diz que numa vizinhança de um ponto crítico não-degenerado é possível obter um sistema de coordenadas que simplifica bastante a forma da função.

### Lema 9.1. (Lema de Morse)

Seja  $\alpha$  um ponto crítico não-degenerado de uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Então existe um sistema de coordenadas  $\xi : V \rightarrow W$  de classe  $C^{k-2}$ , com  $\alpha \in W \subset U$ ,  $0 \in V$  e  $\xi(0) = \alpha$ , tal que

$$f(\xi(y)) - f(\alpha) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j,$$

para todo  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$ , onde  $a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\alpha)$ .

**Prova.**

Seja  $\delta > 0$  tal que  $B(\alpha; \delta) \subset U$ . Como  $f$  é de classe  $C^2$  e  $[\alpha, x] \subset U$  para todo  $x \in B(\alpha; \delta)$ , temos, pela Fórmula de Taylor com resto integral, que



$$\begin{aligned} x \in B(a; \delta) \implies f(x) &= f(a) + \int_0^1 (1-t) d^2f(a + t(x-a))(x-a)^2 dt \\ &= f(a) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - a)(x_j - a), \end{aligned}$$

onde,

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(x-a)) dt, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Como as funções  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  são de classe  $C^{k-2}$ ,  $k-2 \geq 1$ , temos, pela Regra de Leibniz, que as funções  $a_{ij} : B(a; \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^{k-2}$ , para todos  $i, j = 1, \dots, n$ . E, pelo Teorema de Schwarz, a matriz  $A(x) = (a_{ij}(x))$  é simétrica para todo  $x \in B(a; \delta)$ .

Assim, podemos escrever

$$f(x) = f(a) + \langle A(x)(x-a), (x-a) \rangle.$$

Como  $A_0 = A(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$  e  $a$  é um ponto crítico não-degenerado, temos que  $A_0$  é uma matriz simétrica invertível.

Seja  $C(x) = A_0^{-1} A(x)$ . Então  $C : B(a; \delta) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é de classe  $C^{k-2}$ ,  $A(x) = A_0 C(x)$  para todo  $x \in B(a; \delta)$  e  $C(a) = \text{Id}$ .

Pelo exemplo 8.5, existem abertos  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^{n^2}$  tais que  $\text{Id} \in V_1$ ,  $\text{Id} \in V_2$  e  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $\varphi(X) = X^2$ , é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Como  $C : B(a; \delta) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  é contínua e  $C(a) = \text{Id}$ , existe  $0 < \delta' < \delta$  tal que  $C(B(a; \delta')) \subset V_2$ .

Logo  $B = \varphi^{-1} \circ C$  é de classe  $C^{k-2}$ ,  $B(x)^2 = C(x)$  para todo  $x \in B(a; \delta')$  e  $B(a) = \text{Id}$ .

Então, como  $A(x) = A_0 C(x) = A_0 B(x)^2$  e  $A(x)$  é simétrica para todo  $x \in B(a; \delta)$ , temos, tomando transpostas, que:

$$A(x) = A_0 B(x)^2 = (B(x)^T)^2 A_0 \implies B(x)^2 = A_0^{-1} (B(x)^T)^2 A_0 = (A_0^{-1} B(x)^T A_0)^2.$$

Como  $A_0^{-1} B(a)^T A_0 = \text{Id}$ ,  $B(a) = \text{Id}$  e as aplicações

$$B : B(a; \delta') \rightarrow \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{e} \quad A_0^{-1} B(x)^T A_0 : B(a; \delta') \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

são contínuas, existe  $0 < \delta'' < \delta'$  tal que

$$x \in B(a; \delta'') \implies A_0^{-1} B(x)^T A_0 \in V_1 \quad \text{e} \quad B(x) \in V_1.$$

Logo  $B(x) = A_0^{-1} B(x)^T A_0$  para todo  $x \in B(a; \delta'')$ , pois  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  é um difeomorfismo.

Assim,  $A_0 B(x) = B(x)^T A_0$  e  $A(x) = A_0 B(x)^2 = B(x)^T A_0 B(x)$  e, portanto,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \langle A(x)(x-a), (x-a) \rangle = \langle B(x)^T A_0 B(x)(x-a), (x-a) \rangle \\ &= \langle A_0 B(x)(x-a), B(x)(x-a) \rangle. \end{aligned}$$

Seja  $\psi : B(a; \delta'') \longrightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação de classe  $C^{k-2}$  dada por  $\psi(x) = B(x)(x - a)$ . Se  $\phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação bilinear dada por  $\phi(B, y) = B \cdot y$  então, pela Regra da Cadeia, para todo  $x \in B(a; \delta'')$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$\begin{aligned}\psi'(x)v &= \phi'(B(x), (x - a)) (B'(x)v, v) \\ &= \phi(B'(x)v, (x - a)) + \phi(B(x), v) \\ &= \frac{\partial B}{\partial v}(x)(x - a) + B(x)v.\end{aligned}$$

Logo, para  $x = a$ ,  $\psi'(a) \cdot v = B(a) \cdot v = v$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $\psi'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação identidade.

Então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe  $0 < \delta''' < \delta''$  e um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $0 = \psi(a) \in V$  e  $\psi : W \longrightarrow V$  é um difeomorfismo de classe  $C^{k-2}$ , onde  $W = B(a; \delta''')$ .

Assim, se  $\xi = \psi^{-1} : V \longrightarrow W$ , temos que  $\xi$  é um sistema de coordenadas de classe  $C^{k-2}$  no aberto  $W$  tal que  $\xi(0) = a$  e

$$f(\xi(y)) - f(a) = \langle A_0 y, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j. \blacksquare$$

**Corolário 9.1.** *Seja  $a$  um ponto crítico não-degenerado de uma função  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Então existe um sistema de coordenadas  $\eta : V_0 \longrightarrow W$  de classe  $C^{k-2}$ , com  $a \in W$ ,  $0 \in V_0$ ,  $\eta(0) = a$  e*

$$f(\eta(z)) - f(a) = -z_1^2 - \dots - z_i^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_m^2.$$

**Prova.**

Seja  $A_0 = (a_{ij})$  a matriz simétrica de entradas  $a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ , dada pelo Lema de Morse. Então existe uma base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_m\}$  de  $\mathbb{R}^m$  tal que  $A_0 u_j = \lambda_j u_j$  para todo  $j = 1, \dots, m$ . Como  $A_0$  é invertível,  $\lambda_j \neq 0$  para todo  $j = 1, \dots, m$ . Sejam  $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_i < 0$  e  $\lambda_{i+1} > 0, \dots, \lambda_m > 0$ , os autovalores negativos e positivos de  $A_0$ .

Para  $j \leq i$ , seja  $v_j = \frac{u_j}{\sqrt{-\lambda_j}}$  e, para  $j > i$ , seja  $v_j = \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}}$ .

Então  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^m$  tal que

$$\langle A_0 v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ -1 & \text{se } j = k \text{ e } j \leq i \\ 1 & \text{se } j = k \text{ e } j > i. \end{cases}$$

Consideremos agora a transformação linear invertível  $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $T e_j = v_j$  para todo  $j = 1, \dots, m$ . Sendo  $V_0 = T^{-1}(V)$ , onde  $V$  é o aberto que contém a origem obtido no Lema de Morse, temos que  $\eta = \xi \circ T : V_0 \longrightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^{k-2}$  tal que

$$\begin{aligned}
 f \circ \eta(z) - f(a) &= (f \circ \xi)(T(z)) - f(a) = \langle A_0 T(z), T(z) \rangle \\
 &= \left\langle A_0 \left( \sum_{j=1}^m z_j v_j \right), \sum_{k=1}^m z_k v_k \right\rangle \\
 &= \sum_{j,k=1}^m z_j z_k \langle A_0 v_j, v_k \rangle \\
 &= -z_1^2 - \dots - z_i^2 + z_{i+1}^2 + \dots + z_m^2,
 \end{aligned}$$

concluindo a prova do corolário. ■

**Observação 9.2.** O número  $i$  que aparece no corolário acima chama-se o *índice do ponto crítico*  $a$ . Quando  $i = m$ ,  $a$  é um ponto de máximo local para  $f$ ; se  $i = 0$ ,  $a$  é um ponto de mínimo local. Para  $0 < i < m$ ,  $a$  é um ponto de sela de índice  $i$ .

**Observação 9.3.** No caso  $m = 2$ , seja  $a \in U$  um ponto crítico não-degenerado da função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 3$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Pelo Lema de Morse, existe um sistema de coordenadas  $\eta : V_0 \rightarrow W$  de classe  $C^{k-2}$ , com  $0 \in V_0$ ,  $a \in W \subset U$ ,  $\eta(0) = a$ , tal que

$$f \circ \eta(z) - f(a) = \pm(z_1^2 + z_2^2) \quad \text{ou} \quad f \circ \eta(z) - f(a) = -z_1^2 + z_2^2.$$

Quando  $a$  é um ponto de máximo ou de mínimo local de  $f$ , temos que  $f \circ \eta(z) = f(a) - (z_1^2 + z_2^2)$  e  $f \circ \eta(z) = f(a) + z_1^2 + z_2^2$ , respectivamente. Logo as curvas de nível de  $f$  próximas de  $a$  são imagens pelo difeomorfismo  $\eta$  dos círculos  $z_1^2 + z_2^2 = \text{const.}$ , tendo, portanto, a forma dada pela figura 6. E quando  $a$  é um ponto de sela, temos que  $f \circ \eta(z) = f(a) - z_1^2 + z_2^2$ . Logo, as curvas de nível de  $f$  próximas de  $a$  são imagens pelo difeomorfismo  $\eta$  das curvas  $-y_1^2 + y_2^2 = \text{const.}$ , tendo a forma dada pela figura 7.

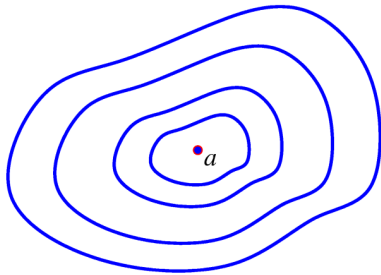


Fig. 6: Curvas de nível de  $f$  próximas do ponto crítico  $a$

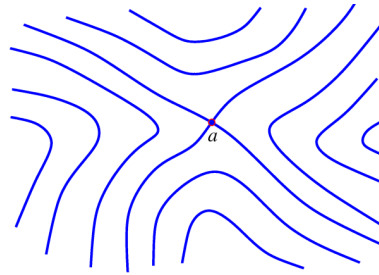


Fig. 7: Curvas de nível de  $f$  próximas do ponto crítico  $a$

**Observação 9.4.** Os três parágrafos seguintes têm objetivo semelhante ao deste: a partir de hipóteses sobre a derivada, obter sistemas de coordenadas convenientes, em relação aos quais a aplicação se exprime por meio de fórmulas simples.

## 10 Forma Local das Imersões

**Definição 10.1.** Uma *imersão* do aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que a derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear injetora para todo  $x \in U$ . Em particular  $m \leq n$ .

**Observação 10.1.** A composta de duas imersões é uma imersão.

**Observação 10.2.** Já vimos que a derivada  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$  é contínua no ponto  $a$  se, e só se,  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ . E, neste caso, se  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora então, pelo teorema 7.2, existe  $\delta > 0$  tal que  $f : B(a; \delta) \rightarrow f(B(a; \delta))$  é um homeomorfismo. Em particular,  $f|_{B(a; \delta)}$  é injetora.

**Exemplo 10.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  a aplicação de inclusão dada por  $f(x) = (x, 0)$ .

Como  $f$  é linear,  $f'(x) = f$  para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ . Logo  $f$  é uma imersão  $C^\infty$ .

Mostraremos que toda imersão de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , coincide localmente, após uma mudança do sistema de coordenadas, com a imersão  $f$  acima.  $\square$

**Exemplo 10.2.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Um caminho diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma imersão se, e só se, seu vetor velocidade  $f'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Então, para todo  $t \in I$ ,  $L = \{f(t) + sf'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$  é uma reta tangente à imagem  $f(I)$  no ponto  $f(t)$ . Como uma imersão pode não ser injetora, então, quando  $f(t_1) = f(t_2)$ , as duas retas tangentes  $L_1 = \{f(t_1) + sf'(t_1) \mid s \in \mathbb{R}\}$  e  $L_2 = \{f(t_2) + sf'(t_2) \mid s \in \mathbb{R}\}$  podem (ou não) ser distintas.

Mas, pelo teorema 7.1, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(t) \neq f(t_1)$  para todo  $t \in J = (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset I$ ,  $t \neq t_1$ . Assim,  $L_1$  é a única reta tangente no ponto  $f(t_1)$  para o caminho  $f|_J$ .

Por exemplo,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (t^3 - t, t^2)$ , é uma imersão de classe  $C^\infty$  da reta no plano tal que  $f(1) = f(-1) = (0, 1)$ . Como  $f'(1) = (2, 2)$  e  $f'(-1) = (2, -2)$ , temos que

$$L_1 = \{(0, 1) + s(1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} \neq L_2 = \{(0, 1) + s(1, -1) \mid s \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

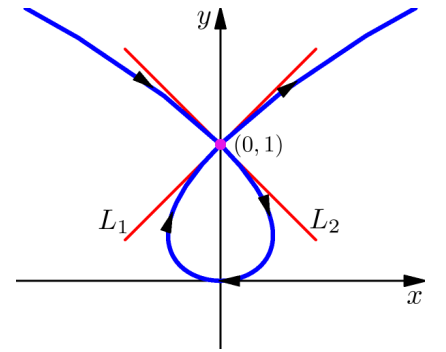


Fig. 8: Retas  $L_1$  e  $L_2$  tangentes à curva  $f$

**Exemplo 10.3.** Seja o caminho  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$  dado por  $g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ . Como  $g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ , temos que  $g$  não é imersão, pois  $g'(t) = 0$  para  $t = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

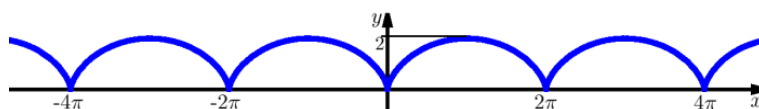


Fig. 9: Ciclóide

A imagem deste caminho é a curva chamada **ciclóide**. Ela possui uma infinidade de pontos angulares (**cúspides**), nos quais o vetor velocidade é igual a zero.  $\square$

**Observação 10.3.** Nem sempre podemos identificar os pontos onde a derivada de uma aplicação não é injetora pela forma geométrica de sua imagem. Por exemplo, a imagem do caminho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (t^3, t^3)$ , é uma reta. Para  $t = 0$ , o vetor velocidade  $f'(0) = (0, 0)$ , o que não se deve ao aspecto de  $f(\mathbb{R})$ , mas à maneira como a reta está parametrizada por  $f$ .

### Teorema 10.1. (Forma Local das Imersões)

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  uma aplicação fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$ . Se a derivada  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é injetora, existe um homeomorfismo  $h : Z \rightarrow V \times W$ , fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ , de um aberto  $Z$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$  que contém  $f(a)$  sobre um aberto  $V \times W$  em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  que contém  $(a, 0)$ , tal que

$$h \circ f(x) = (x, 0),$$

para todo  $x \in V$  e  $h$ .

Se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , é possível restringir  $V$ ,  $W$  e  $Z$ , se necessário, de modo que  $h$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

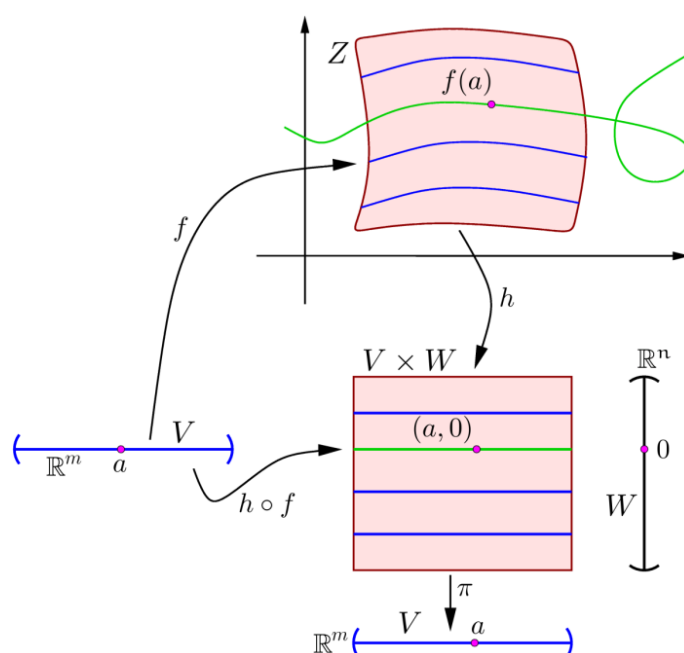


Fig. 10: Representação esquemática do Teorema da Forma Local das Imersões

**Prova.**

Seja  $E = f'(a)(\mathbb{R}^m)$ . Como  $f'(a)$  é injetora,  $\dim E = m$ . Sejam  $\{w_1, \dots, w_m\}$  uma base de  $E$ ,  $v_1, \dots, v_n$  vetores linearmente independentes tais que  $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_n\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^{m+n}$  e  $F$  o subespaço gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_n$ . Então  $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ .

Seja  $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  a aplicação definida por

$$\varphi(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^n y_i v_i,$$

onde  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Então, se  $v \in \mathbb{R}^m$  e  $w = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi'(a, 0)(v, w) = f'(a)v + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i. \quad (1)$$

**Afirmção:**  $\varphi$  é fortemente diferenciável no ponto  $(a, 0)$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= f(x) + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \varphi(a, 0) + \varphi'(a, 0) \cdot (x - a, y) + r_{(a, 0)}^{\varphi}(x, y) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \sum_{i=1}^n y_i v_i + r_{(a, 0)}^{\varphi}(x, y) \\ \implies r_{(a, 0)}^{\varphi}(x, y) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = r_a^f(x). \end{aligned}$$

Como  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, x' \in B(a; \delta) \subset \mathbb{R}^m \implies \|r_a^f(x) - r_a^f(x')\| \leq \varepsilon \|x - x'\|_s.$$

Então,

$$\begin{aligned} (x, y), (x', y') \in B(a; \delta) \times \mathbb{R}^n \implies \|r_{(a, 0)}^{\varphi}(x, y) - r_{(a, 0)}^{\varphi}(x', y')\| &= \|r_a^f(x') - r_a^f(x)\| \leq \varepsilon \|x - x'\|_s \\ &\leq \varepsilon (\|x' - x\|_s + \|y' - y\|_s) \\ &= \varepsilon \|(x, y) - (x', y')\|_s. \end{aligned}$$

Logo  $\varphi$  é fortemente diferenciável no ponto  $(a, 0)$ , concluindo a prova da afirmação.

Além disso, como  $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é injetora e  $\mathbb{R}^{m+n} = f'(a)(\mathbb{R}^m) \oplus F$ , temos, por (1), que  $\varphi'(a, 0) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem um aberto contendo  $(a, 0)$ , o qual podemos supor da forma  $V \times W$ , onde  $0 \in W \subset \mathbb{R}^n$  e  $a \in V \subset U$ , e um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , com  $f(a) \in Z$ , tais que  $\varphi : V \times W \longrightarrow Z$  é um homeomorfismo e  $h = \varphi^{-1} : Z \longrightarrow V \times W$  é fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ . Como  $\varphi(x, 0) = f(x)$ , temos que  $hf(x) = h\varphi(x, 0) = (x, 0)$  para todo  $x \in V$ .

Quando  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então  $\varphi$  também é de classe  $C^k$ . Pelo Teorema da Aplicação Inversa,  $V$ ,  $W$  e  $Z$  podem ser tomados de modo que  $\varphi : V \times W \longrightarrow Z$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$ , cujo inverso  $h$  é também de classe  $C^k$ . ■

**Exemplo 10.4.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3)$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é injetora no ponto  $a = (a_1, a_2) \in U$ , ou seja, a matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $a$ ,

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) \end{pmatrix},$$

tem posto 2.

Então  $Jf(a)$  possui um menor de ordem 2 não-nulo.

Se, por exemplo,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

então  $\{f'(a)e_1, f'(a)e_2, \bar{e}_3\}$ , onde  $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ , é uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Nesse caso, definimos  $\varphi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\varphi(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y) + z)$ .

Observe que

$$\det J\varphi(a, 0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pela forma local das imersões, existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^2$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $Z \subset \mathbb{R}^3$  tais que  $a \in V$ ,  $0 \in I$ ,  $f(a) \in Z$ ,  $\varphi : V \times I \longrightarrow Z$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  e  $h \circ f(x, y) = (x, y, 0)$  para todo  $x, y \in V$ , onde  $h = \varphi^{-1} : Z \longrightarrow V \times I$  é também de classe  $C^k$ .  $\square$

**Corolário 10.1.** *Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$ , com  $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  injetora. Então, existe um aberto  $V$ , com  $a \in V \subset U$ , tal que  $f : V \longrightarrow f(V)$  é um homeomorfismo e o homeomorfismo inverso  $f^{-1} : f(V) \longrightarrow V$  é a restrição de uma aplicação contínua  $\xi : Z \longrightarrow V$  definida num aberto  $Z$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$ ,  $f(V) \subset Z$ , fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ . Se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então  $\xi$  pode ser tomada de classe  $C^k$ .*

**Prova.**

Seja  $h : Z \longrightarrow V \times W$  a aplicação obtida no teorema acima. Então  $f(V) \subset Z$ . Seja  $\xi : Z \longrightarrow V$  a aplicação definida por  $\xi(z) = \pi \circ h(z)$ , onde  $\pi : V \times W \longrightarrow V$ ,  $\pi(x, y) = x$ , é a projeção sobre a primeira coordenada.

Então  $\xi$  é contínua, pois  $h$  é contínua e  $\pi$  é de classe  $C^\infty$ . Além disso,  $\xi$  é fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ .

De fato,

$$\xi(f(a)) = \pi \circ h(f(a)) = a, \quad \xi'(f(a))(w) = \pi'(h(f(a))) \circ h'(f(a))(w) = \pi(h'(f(a))(w)),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \pi(h(z)) = \xi(f(a)) + \xi'(f(a))(z - f(a)) + r_{f(a)}^\xi(z) \\ &= \pi(h(f(a))) + \pi(h'(f(a))(z - f(a))) + r_{f(a)}^\xi(z). \end{aligned}$$

Então  $r_{f(a)}^\xi(z) = \pi(r_{f(a)}^h(z))$ . Como  $h$  é fortemente diferenciável em  $f(a)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z, w \in B(f(a); \delta) \implies \|r_{f(a)}^h(z) - r_{f(a)}^h(w)\|_S \leq \varepsilon \|z - w\|.$$

Logo, como

$$\|\pi\| = \sup\{\|\pi(x, y)\|_S \mid \|(x, y)\|_S = 1\} = \sup\{\|x\|_S \mid \|x\|_S + \|y\|_S = 1\} = 1,$$

temos que

$$\begin{aligned} z, w \in B(f(a); \delta) \implies \|r_{f(a)}^\xi(z) - r_{f(a)}^\xi(w)\|_S &= \|\pi(r_{f(a)}^h(z) - r_{f(a)}^h(w))\|_S \\ &\leq \|r_{f(a)}^h(z) - r_{f(a)}^h(w)\|_S \\ &\leq \varepsilon \|z - w\|. \end{aligned}$$

Portanto  $\xi$  é fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ .

Se  $f$  é de classe  $C^k$ , temos, pelo teorema acima, que  $h$  é de classe  $C^k$ . Logo  $\xi = \pi \circ h$  é de classe  $C^k$ .

Como  $\xi f(x) = \pi h(f(x)) = \pi(x, 0) = x$  para todo  $x \in V$ , temos que  $f : V \longrightarrow f(V)$  é uma bijeção e  $\xi|_{f(V)} = f^{-1} : f(V) \longrightarrow V$ .

Então  $f : V \longrightarrow f(V)$  é um homeomorfismo, pois, pela observação 7.6, podemos tomar  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $a \in V$ , de modo que  $f : V \longrightarrow f(V)$  seja contínua, uma vez que  $f$  é fortemente diferenciável em  $a$ . ■

**Observação 10.4.** Como consequência deste corolário, temos que se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é injetora, então  $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é injetora para todo  $x$  num aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^m$  que contém  $a$ .

De fato, como  $\xi \circ f(x) = x$  para todo  $x \in V$ , temos que  $\xi'(f(x)) \circ f'(x) = \text{Id} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ . Logo  $f'(x)$  é injetora para todo  $x \in V$ .

Este resultado pode ser provado diretamente.



De fato, seja  $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  uma transformação linear injetora.

Então a matriz  $A = (a_{ij})$  de  $T$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^{m+n}$  tem  $m$  colunas linearmente independentes e, portanto,  $m$  linhas linearmente independentes, pois posto-linha de uma matriz = posto-coluna da matriz.

Sejam  $A_{i_1} = (a_{i_1 1}, \dots, a_{i_1 m}), \dots, A_{i_m} = (a_{i_m 1}, \dots, a_{i_m m})$  os  $m$  vetores-linha de  $A$  linearmente independentes,  $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, m+n\}$ .

Como  $A_{i_k} \in \mathbb{R}^m$  para todo  $k = 1, \dots, m$ ,  $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^m$  e, portanto, o determinante da matriz  $m \times m$  cujas linhas são  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  é diferente de zero.

Sendo a aplicação  $\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada transformação linear  $S$  o determinante da matriz  $m \times m$  cujas linhas são as linhas  $i_1, \dots, i_m$  da matriz de  $S$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^{m+n}$ , é contínua e  $\varphi(T) \neq 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|S - T\| < \varepsilon \implies \varphi(S) \neq 0$ .

Além disso, como  $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{m+n})$  é contínua, tomando  $T = f'(a)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon.$$

Logo  $\varphi(f'(x)) \neq 0$  para todo  $x \in B(a; \delta)$ , ou seja,  $f'(x)$  tem posto  $m$  e, portanto, é injetora para todo  $x \in B(a; \delta)$ .

## 11 Forma Local das Submersões

**Definição 11.1.** Uma aplicação diferenciável  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é uma **submersão** quando  $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear sobrejetora para todo  $x \in U$ . Em particular,  $m \geq n$ .

**Observação 11.1.** Como um funcional linear é sobrejetivo ou nulo, temos que uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma submersão se, e só se,  $df(x) \neq 0$  para todo  $x \in U$ , ou seja, se, e só se,  $\text{grad } f(x) \neq 0$  para todo  $x \in U$ .

**Observação 11.2.** A composta de duas submersões é uma submersão.

**Definição 11.2.** Uma decomposição em soma direta do tipo  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  significa que se fez uma partição  $\{1, \dots, m+n\} = I \cup J$ , onde  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$  e  $J = \{j_1, \dots, j_n\}$  são disjuntos.

Dada a partição, consideramos  $\mathbb{R}_I^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$  como o subespaço gerado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$  e  $\mathbb{R}_J^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$  como o subespaço gerado por  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_n}\}$ .

Então todo vetor  $z \in \mathbb{R}^{m+n}$  se escreve, de modo único, como  $z = x + y$ , onde  $x \in \mathbb{R}_I^m$  e  $y \in \mathbb{R}_J^n$ . Assim,  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  é a soma direta dos subespaços  $\mathbb{R}_I^m$  e  $\mathbb{R}_J^n$ .

Uma vez dada a decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ , escrevemos os elementos de  $\mathbb{R}^{m+n}$  como pares  $z = (x, y)$ , onde  $x \in \mathbb{R}_I^m$  e  $y \in \mathbb{R}_J^n$ .

Por exemplo, seja  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_I^2 \oplus \mathbb{R}_J$ , onde  $I = \{1, 3\}$  e  $J = \{2\}$ , ou seja,  $\mathbb{R}_I^2$  é gerado por  $\{e_1, e_3\}$  e  $\mathbb{R}_J$  é gerado por  $\{e_2\}$ . Então todo  $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$  se escreve como  $z = (x, y)$ , onde  $x = (z_1, 0, z_3)$  e  $y = (0, z_2, 0)$ .

**Observação 11.3.** Dada uma transformação linear sobrejetora  $T : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , existe uma decomposição em soma direta do tipo  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  tal que a restrição  $T|_{\mathbb{R}_J^n} : \mathbb{R}_J^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo.

De fato, como os vetores  $\{Te_1, \dots, Te_{m+n}\}$  geram  $\mathbb{R}^n$ , existe  $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, m+n\}$  tal que  $\{Te_{j_1}, \dots, Te_{j_n}\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$  é o conjunto dos índices restantes, a partição  $\{1, \dots, m+n\} = I \cup J$  fornece a decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ .

Então  $T|_{\mathbb{R}_J^n} : \mathbb{R}_J^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, pois transforma a base  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_n}\}$  de  $\mathbb{R}_J^n$  na base  $\{Te_{j_1}, \dots, Te_{j_n}\}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $A = (a_{ij})$  a matriz  $n \times (m+n)$  da transformação linear  $T$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^{m+n}$  e  $\mathbb{R}^n$ .

Então  $T|_{\mathbb{R}_J^n}$  é um isomorfismo se, e só se, a submatriz  $n \times n$  da matriz  $A$  cujas colunas são as  $n$  colunas da matriz  $A$  cujos índices pertencem ao conjunto  $J$  tem determinante diferente de zero.

**Exemplo 11.1.** Dada uma decomposição em soma direta do tipo  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ , seja  $f : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  a projeção sobre a segunda coordenada, ou seja,  $f(x, y) = y = (y_{j_1}, \dots, y_{j_n})$ .

Como  $f$  é linear, temos  $f'(x, y) = f$  para todo  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ . Logo  $f$  é uma submersão e a matriz Jacobiana de  $f$  tem como linhas os vetores  $e_{j_1}, \dots, e_{j_n}$  da base canônica de  $\mathbb{R}^{m+n}$ .  $\square$

**Definição 11.3.** Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  e seja  $E \subset \mathbb{R}^m$  um subespaço vetorial. Dizemos que  $f$  é *diferenciável ao longo de  $E$  no ponto  $a$*  quando existe uma transformação linear  $\partial_E f(a) : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , chamada a *derivada de  $f$  ao longo de  $E$  no ponto  $a$* , tal que

$$v \in E, a + v \in U \implies f(a + v) = f(a) + \partial_E f(a) \cdot v + r(v),$$

$$\text{com } \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v \in E}} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

**Observação 11.4.** Se  $f$  é diferenciável no ponto  $a$ , então  $f$  é diferenciável neste ponto ao longo de qualquer subespaço  $E \subset \mathbb{R}^m$  com  $\partial_E f(a) = f'(a)|_E$ .

**Definição 11.4.** Dadas uma decomposição em soma direta do tipo  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  e uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , a derivada de  $f$  no ponto  $a$  ao longo de  $\mathbb{R}_I^m$ , caso exista, é indicada por  $\partial_1 f(a)$  e a derivada de  $f$  no ponto  $a$  ao longo de  $\mathbb{R}_J^n$ , caso exista, é representada por  $\partial_2 f(a)$ . Estas são as *derivadas parciais de  $f$  no ponto  $a$  relativamente à decomposição  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$* .

**Observação 11.5.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável no ponto  $a$ , então  $\partial_1 f(a) = f'(a)|_{\mathbb{R}_I^m}$ ,  $\partial_2 f(a) = f'(a)|_{\mathbb{R}_J^n}$  e, para qualquer  $u = (v, w) \in \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ ,  

$$f'(a)u = f'(a)(v + w) = f'(a)v + f'(a)w = \partial_1 f(a)v + \partial_2 f(a)w.$$

**Observação 11.6.** Mesmo no caso da decomposição usual  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser diferenciável ao longo de cada um dos subespaços  $\mathbb{R}$  sem ser diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

O teorema abaixo diz que, dada uma submersão  $f$  de classe  $C^1$ , é possível obter novas coordenadas em torno de cada ponto do seu domínio de modo que  $f$  seja a projeção sobre as  $n$  últimas coordenadas, ou seja, o exemplo 11.1 é, localmente, o caso mais geral de uma submersão.

### Teorema 11.1. (Forma Local das Submersões)

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$  e fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$ . Se  $f'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora ou, mais precisamente, se é dada uma decomposição em soma direta do tipo  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  tal que  $a = a_1 + a_2 = (a_1, a_2)$  e a derivada parcial  $\partial_2 f(a) = f'(a)|_{\mathbb{R}_J^n} : \mathbb{R}_J^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, então existem abertos  $V, W$  e  $Z$ , com  $a \in Z \subset U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $\tilde{a}_1 \in V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f(a) \in W \subset \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $h : V \times W \rightarrow Z$  fortemente diferenciável no ponto  $(\tilde{a}_1, f(a))$  tal que

$$f \circ h(\tilde{x}, w) = w,$$

para todo  $(\tilde{x}, w) \in V \times W$ , onde  $\tilde{a}_1 = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ . Se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , podemos restringir  $V, W$  e  $Z$ , se necessário, de modo que  $h$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

#### Prova.

Seja  $c = f(a)$  e consideremos a função  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  definida por

$$\varphi(x, y) = (\tilde{x}, f(x, y)) = ((z_{i_1}, \dots, z_{i_m}), f(x, y)),$$

onde  $z = x + y$ . Então,

$$\varphi'(a)(v, w) = (\tilde{v}, f'(a)(v, w)) = (\tilde{v}, \partial_1 f(a)v + \partial_2 f(a)w), \text{ onde } v = \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k e_{i_k} \text{ e } \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m).$$

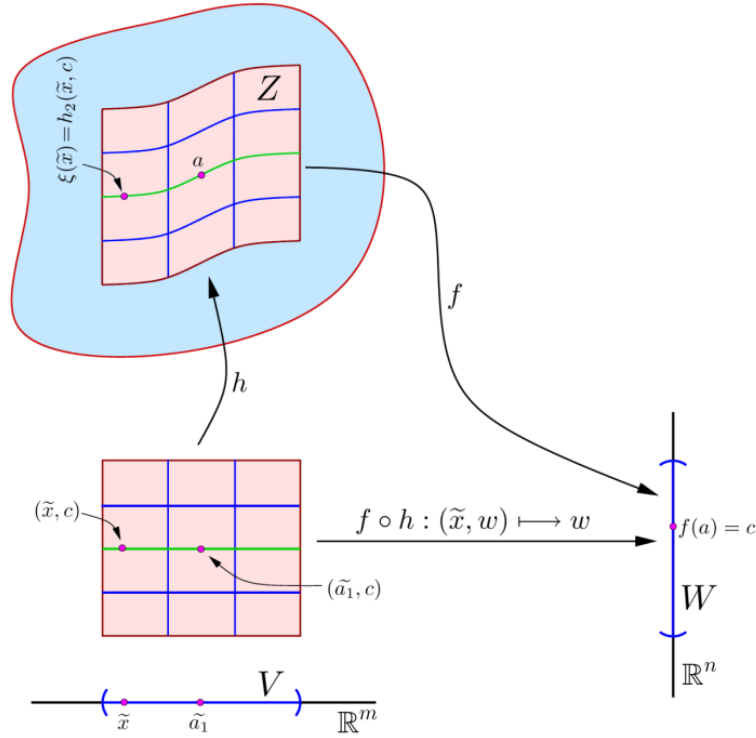


Fig. 11: Representação esquemática do teorema da forma local das submersões

**Afirmção:**  $\varphi$  é fortemente diferenciável no ponto  $a = (a_1, a_2) = a_1 + a_2$ .

De fato, como

$$\varphi(x, y) = (\tilde{x}, f(x, y)) = (\tilde{a}_1, f(a)) + ((\tilde{x} - \tilde{a}_1), f'(a)(x + y - (a_1 + a_2))) + r_a^\varphi(x, y),$$

temos que

$$r_a^\varphi(x, y) = (0, r_a^f(x + y)).$$

Como  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a = a_1 + a_2$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} z = x + y, \quad z' = x' + y' \in B(a; \delta) &\implies \|r_a^f(x + y) - r_a^f(x' + y')\|_s \leq \varepsilon \|x + y - (x' + y')\| \\ &= \varepsilon \|z - z'\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \|r_a^\varphi(x, y) - r_a^\varphi(x', y')\|_s &= \|(0, r_a^f(x + y) - r_a^f(x' + y'))\|_s \\ &= \|r_a^f(z) - r_a^f(z')\|_s \leq \varepsilon \|z - z'\|. \end{aligned}$$

Logo  $\varphi$  é fortemente diferenciável no ponto  $a = (a_1, a_2)$ . ■

Além disso,  $\varphi'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, pois dado  $(\tilde{v}, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e, considerando os vetores

$$v = \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k e_{i_k} \in \mathbb{R}_I^m \quad \text{e} \quad w = (\partial_2 f(a))^{-1}(z - \partial_1 f(a)v) \in \mathbb{R}_J^n,$$

temos, para  $u = (v, w) = v + w$ , que:

$$\varphi'(a)u = (\tilde{v}, \partial_1 f(a)v + \partial_2 f(a)w) = (\tilde{v}, \partial_1 f(a)v + z - \partial_1 f(a)v) = (\tilde{v}, z).$$

Logo  $\varphi'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Inversa,  $\varphi$  é um homeomorfismo, com inverso  $h$  fortemente diferenciável no ponto  $\varphi(a) = (\tilde{a}_1, f(a)) = (\tilde{a}_1, c)$ , de um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$  contendo  $a$  sobre um aberto contendo  $(\tilde{a}_1, c)$ , o qual pode ser tomado da forma  $V \times W$ , com  $V$  aberto em  $\mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{a}_1 \in V$ , e  $W$  aberto em  $\mathbb{R}^n$ ,  $c \in W$ .

Então

$$h(\tilde{x}, w) = h_1(\tilde{x}, w) + h_2(\tilde{x}, w) = (h_1(\tilde{x}, w), h_2(\tilde{x}, w)),$$

onde  $h_1 : V \times W \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h_2 : V \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Como  $(\tilde{x}, w) = \varphi h(\tilde{x}, w) = \varphi(h_1(\tilde{x}, w) + h_2(\tilde{x}, w))$ , temos que  $h_1(\tilde{x}, w) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k}$  e  $f(h(\tilde{x}, w)) = w$  para todo  $(\tilde{x}, w) \in V \times W$ , onde  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$ .

Se  $f$  é de classe  $C^k$ , então  $\varphi$  é de classe  $C^k$ . Pelo Teorema da Aplicação Inversa,  $V$ ,  $W$  e  $Z$  podem ser tomados de modo que  $\varphi$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$  de  $Z$  sobre  $V \times W$  e, portanto, seu inverso  $h$  também é de classe  $C^k$ .

**Corolário 11.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$ . Se  $f'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora, então existe um aberto  $Z$  contendo  $a$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$  tal que  $f|_Z$  é uma aplicação aberta, ou seja, para todo  $A \subset Z$  aberto,  $f(A)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Em particular,  $f(a) \in \text{int } f(U)$ .*

**Prova.**

Seja  $h : V \times W \rightarrow Z$  o homeomorfismo dado pelo teorema acima, e seja  $A \subset Z$  um conjunto aberto. Então

$$f(A) = f \circ h \circ h^{-1}(A) = \pi \circ h^{-1}(A).$$

Como  $h$  é contínua,  $h^{-1}(A)$  é um conjunto aberto e, portanto,  $\pi(h^{-1}(A))$  é aberto, pois a projeção  $\pi : V \times W \rightarrow W$  é uma aplicação aberta.

Logo  $f(A)$  é aberto para todo aberto  $A \subset Z$ . ■

**Corolário 11.2.** *Toda submersão de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , é uma aplicação aberta.*

**Observação 11.7.** Na decomposição  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ ,  $\mathbb{R}_J^n$  é o subespaço de  $\mathbb{R}^{m+n}$  gerado pelos vetores  $e_j$ ,  $j \in J = \{j_1, \dots, j_n\}$  da base canônica de  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Então a derivada parcial  $\partial_2 f(a) : \mathbb{R}_J^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo se, e só se, a matriz

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha) \right)_{n \times n}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{j_1, \dots, j_n\},$$

obtida da matriz Jacobiana de  $f$  no ponto  $\alpha$  escolhendo as  $n$  colunas cujos índices pertencem a  $J$ , tem determinante diferente de zero.

**Observação 11.8.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$  e  $f'(\alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora para algum  $\alpha \in U$ , então  $f'(z) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora para todo  $z$  num aberto  $Z$  contendo  $\alpha$ .

De fato, seja  $h : V \times W \rightarrow Z$  o difeomorfismo de classe  $C^k$  dado pela forma local das submersões. Como  $f \circ h = \pi$ , temos, pela Regra da Cadeia, que para todo  $(x, w) \in V \times W$ ,

$$f'(h(x, w)) h'(x, w) = \pi'(x, w) = \pi.$$

Logo  $f'(z)$  é sobrejetora para todo  $z \in Z$ , pois  $Z = h(V \times W)$  e  $\pi$  é uma transformação linear sobrejetora.

Este resultado também pode ser provado diretamente como no caso das imersões, pois  $f'(\alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora se, e só se, a matriz Jacobiana  $Jf(\alpha)$  tem um menor de ordem  $n$  com determinante  $\neq 0$  (ver observação 10.4).

### Teorema 11.2. (Teorema da Aplicação Implícita)

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ , fortemente diferenciável no ponto  $\alpha \in U$ , com  $f(\alpha) = c$ . Se  $f'(\alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora ou, mais precisamente, se  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_1^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  é uma decomposição em soma direta tal que  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  e a derivada  $\partial_2 f(\alpha) : \mathbb{R}_J^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, então existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^m$  contendo  $\widetilde{\alpha}_1$  e  $Z \subset U \subset \mathbb{R}^{m+n}$  contendo  $\alpha$ , com a seguinte propriedade: para cada  $\widetilde{x} \in V$  há um único  $\xi(\widetilde{x}) \in \mathbb{R}_J^n$  tal que  $(x, \xi(\widetilde{x})) \in Z$  e  $f(x, \xi(\widetilde{x})) = c$ , onde  $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$  e  $x = \sum_{i=1}^m x_i e_{i_k}$ .

A aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}_J^n$  assim definida é fortemente diferenciável no ponto  $\widetilde{\alpha}_1$  e sua derivada neste ponto é

$$\xi'(\widetilde{\alpha}_1) \cdot \widetilde{v} = -(\partial_2 f(\alpha))^{-1} \circ (\partial_1 f(\alpha)) \cdot v,$$

para todo  $\widetilde{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ , onde  $v = \sum_{k=1}^m v_k e_{i_k}$ .

Se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então  $\xi$  é de classe  $C^k$  e sua derivada num ponto qualquer  $\widetilde{x} \in V$  é

$$\xi'(\widetilde{x}) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ [\partial_1 f(x, \xi(x))].$$

Em resumo:  $f^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico da aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}_J^n$  fortemente diferenciável no ponto  $\widetilde{\alpha}_1$ . Se  $f$  é de classe  $C^k$ , então  $\xi$  é de classe  $C^k$ .

A aplicação  $\xi$ , diz-se *definida implicitamente* pela equação  $f(x, y) = c$ .

**Observação 11.9.** Se  $\xi(\tilde{x}) = \sum_{\ell=1}^n \xi_{\ell}(\tilde{x})e_{j_{\ell}}$ , então

$$\text{Graf}(\xi) = \left\{ \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + \sum_{\ell=1}^n \xi_{\ell}(\tilde{x}) e_{j_{\ell}} \left| \tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in V \right. \right\}.$$

**Prova.**

Seja  $h : V \times W \longrightarrow Z$  o homeomorfismo fortemente diferenciável no ponto  $(\widetilde{a_1}, f(a)) = (\widetilde{a_1}, c)$ , dado pela forma local das submersões, onde  $h(\widetilde{a_1}, f(a)) = a$  e

$$h(\tilde{x}, w) = (x, h_2(\tilde{x}, w)) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + h_2(\tilde{x}, w).$$

Defina a aplicação  $\xi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\xi(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x}, c)$ . Então,

$$(x, \xi(\tilde{x})) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + \xi(\tilde{x}) \in Z \quad \text{e} \quad f(x, \xi(\tilde{x})) = f(h(\tilde{x}, c)) = c,$$

para todo  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in V$ .

Reciprocamente, se  $(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + \sum_{\ell=1}^n y_{\ell} e_{j_{\ell}} \in Z$ ,  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m) \in V$  e  $f(x, y) = c$ , então

$$(x, y) = h \circ \varphi(x, y) = h(\tilde{x}, c) = (x, h_2(\tilde{x}, c)) = (x, \xi(\tilde{x})).$$

Logo  $y = \xi(\tilde{x})$ .

Então, para cada  $\tilde{x} \in V$  existe um único  $\xi(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, \xi(\tilde{x})) \in Z$  e  $f(x, \xi(\tilde{x})) = c$ .

Como  $\xi(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x}, c)$  para todo  $\tilde{x} \in V$  e  $h_2 : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é fortemente diferenciável no ponto  $(\widetilde{a_1}, c)$ , temos que  $\xi$  é fortemente diferenciável no ponto  $\widetilde{a_1}$ .

Além disso, se  $f$  é de classe  $C^k$ , então  $\xi$  é de classe  $C^k$ , pois  $h_2$  é de classe  $C^k$ .

Finalmente, derivando a igualdade  $f(x, \xi(\tilde{x})) = c$ , quando  $f$  é de classe  $C^k$ , obtemos, pela Regra da Cadeia, que:

$$0 = f'(x, \xi(\tilde{x}))(v, \xi'(\tilde{x})\tilde{v}) = \partial_1 f(x, \xi(\tilde{x}))v + \partial_2 f(x, \xi(\tilde{x})) \cdot \xi'(\tilde{x})\tilde{v},$$

para todo  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^m$ , onde  $v = \sum_{k=1}^m v_k e_{i_k}$  e  $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_m)$ , ou seja,

$$\xi'(\tilde{x})\tilde{v} = -[\partial_2 f(x, \xi(\tilde{x}))]^{-1} [\partial_1 f(x, \xi(\tilde{x}))] \cdot v.$$

Se  $f$  é apenas fortemente diferenciável no ponto  $a = (a_1, a_2)$ , temos que  $\xi$  é fortemente diferenciável no ponto  $\widetilde{a_1}$  e  $(a_1, \xi(\widetilde{a_1})) = h(\widetilde{a_1}, c) = a$ .

Logo, pela regra da cadeia, para todo  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^m$ :

$$\xi'(\widetilde{a_1})\tilde{v} = -[\partial_2 f(a)]^{-1} [\partial_1 f(a)] v. \blacksquare$$

**Exemplo 11.2.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f = (f_1, f_2)$ , uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tal que, no ponto  $a = (a_1, a_2, a_3) \in U$ ,  $f'(a) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é sobrejetora.

Suponhamos que  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_I \oplus \mathbb{R}_J^2$  é uma decomposição de  $\mathbb{R}^3$ , onde  $I = \{2\}$ ,  $J = \{1, 3\}$ , ou seja,  $\mathbb{R}_I$  é gerado por  $\{e_2\}$  e  $\mathbb{R}_J^2$  é gerado por  $\{e_1, e_3\}$  e, além disso,  $f'|_{\mathbb{R}_J^2}(a)$  é um isomorfismo.

Definimos  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi(x, y, z) = (y, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)).$$

Então  $\varphi(a) = (a_2, f(a))$  e

$$J\varphi(a) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

pois estamos supondo que  $\{f'(a)e_1, f'(a)e_3\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ .

Logo, pela forma local das submersões, existem abertos  $Z \subset \mathbb{R}^3$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $W \subset \mathbb{R}^2$ , tais que  $a \in Z$ ,  $a_2 \in I$ ,  $f(a) \in W$ ,  $\varphi : Z \rightarrow I \times W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $h = \varphi^{-1} : I \times W \rightarrow Z$ ,

$$h(x, y, z) = (h_2^{(1)}(x, y, z), x, h_2^{(2)}(x, y, z))$$

é também de classe  $C^k$ ,  $f \circ h(x, y, z) = (y, z)$ , ou seja,

$$f(h_2^{(1)}(x, y, z), x, h_2^{(2)}(x, y, z)) = (y, z)$$

para todo  $(x, y, z) \in I \times W$ .

Então, se  $f(a) = c = (c_1, c_2)$ , temos que

$$f(h_2^{(1)}(x, c_1, c_2), x, h_2^{(2)}(x, c_1, c_2)) = (c_1, c_2) = c,$$

para todo  $x \in I$ . Logo  $f^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico da aplicação de classe  $C^k$   $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}_J^2$ , dada por

$$\xi(x) = h_2^{(1)}(x, c_1, c_2)e_1 + h_2^{(2)}(x, c_1, c_2)e_3,$$

ou seja,

$$f^{-1}(c) \cap Z = \left\{ \left( h_2^{(1)}(x, c_1, c_2), x, h_2^{(2)}(x, c_1, c_2) \right) \mid x \in I \right\}. \quad \square$$

## 12 O Teorema do Posto

**Definição 12.1.** O *posto de uma transformação linear*  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a dimensão da imagem  $T(\mathbb{R}^m)$ , ou seja, o número máximo de vetores LI entre os vetores  $T(e_1), \dots, T(e_m)$ , ou, equivalentemente, o número máximo de colunas LI da matriz de  $T$ . Portanto, o posto de  $T$  é



também o número máximo de linhas linearmente independentes da matriz de  $T$ .

**Observação 12.1.** O posto de  $T$  é igual a  $r$  se, e só se, a matriz de  $T$  possui um determinante menor  $r \times r$  não-nulo, mas qualquer determinante menor de ordem  $r + 1$  é igual a zero.

**Definição 12.2.** O *posto de uma aplicação diferenciável*  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  num ponto  $x \in U \subset \mathbb{R}^m$  é o posto da sua derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Observação 12.2.** O posto de  $f$  no ponto  $x$  é  $\leq m$  e  $\leq n$ .

- Uma imersão  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , tem posto  $m$  em todos os pontos  $x \in U$  e  $m \leq n$ .
- Uma submersão  $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem posto  $n$  em todos os pontos  $x \in U$  e  $m \geq n$ .

Portanto, imersões e submersões são aplicações de *posto máximo*.

**Observação 12.3.** O posto de uma aplicação diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em geral, varia de ponto para ponto.

Quando  $n = 1$ , o posto de  $f$  é 1 nos pontos regulares e zero nos pontos críticos de  $f$ .

Se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é holomorfa e  $f = u + iv$ , então seu posto em um ponto  $(x, y) \in U$  só pode ser 2 ou 0.

De fato, pelas equações de Cauchy-Riemann

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\det Jf(x, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 = 0$$

se, e só se,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ , ou seja, se, e só se,  $Jf(x, y)$  é a matriz nula.

Finalmente, a aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y) = (x^3, y^2)$ , tem matriz Jacobiana  $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$ .

Logo:

- $f$  tem posto 2 nos pontos  $(x, y)$ , com  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ ;
- $f$  tem posto 1 nos pontos  $(x, 0)$ , com  $x \neq 0$  e nos pontos  $(0, y)$ , com  $y \neq 0$ ;
- $f$  tem posto 0 na origem.

**Observação 12.4.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^1$ , o posto de  $f$  é uma função semi-contínua inferiormente com valores inteiros. Isto é, se posto  $f(a) = r$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a; \delta) \subset U$  e o posto de  $f$  em  $x$  é  $\geq r$  para todo  $x \in B(a; \delta)$ .

De fato, como o posto de  $f$  em  $a$  é igual a  $r$ , existe um determinante menor  $r \times r$  da matriz  $Jf(a)$  que é diferente de zero.

Logo, como  $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que este menor é não-nulo em todos os pontos da bola de centro  $a$  e raio  $\delta$ .

Então, pela observação 12.1, o posto de  $f$  em  $x$  é  $\geq r$  para todo  $x \in B(a; \delta)$ .

**Definição 12.3.** Dada uma decomposição  $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$ , dizemos que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^{m+n}$  é **verticalmente convexo** quando

$$(x, y'), (x, y'') \in X \implies [(x, y'), (x, y'')] \subset X,$$

ou seja,  $x + (1-t)y' + ty'' \in X$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Exemplo 12.1.** Se  $X = V \oplus W = \{x + y \mid x \in V, y \in W\}$ , onde  $V \subset \mathbb{R}_I^m$  e  $W \subset \mathbb{R}_J^n$  é convexo, então  $X$  é verticalmente convexo.  $\square$

**Lema 12.1.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^n$  um aberto verticalmente convexo. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  possui segunda derivada parcial  $\partial_2 f$ , a qual é identicamente nula em  $U$ , então  $f$  independe da segunda variável, isto é,  $f(x, y_1) = f(x, y_2)$  para quaisquer  $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ .

**Prova.**

Sejam  $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ , e seja  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  o caminho  $\lambda(t) = f(x + (1-t)y_1 + ty_2)$ . Então, como  $y_2 - y_1 \in \mathbb{R}_J^n$ ,

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + y_1 + (t+s)(y_2 - y_1)) - f(x + y_1 + t(y_2 - y_1))}{s} \\ &= \partial_2 f(x + y_1 + t(y_2 - y_1)) (y_2 - y_1) = 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Logo  $\lambda$  é constante em  $[0, 1]$ . Em particular,  $\lambda(0) = \lambda(1)$ , ou seja,  $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ .  $\blacksquare$

**Lema 12.2.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^{m+p}$  um subespaço vetorial de dimensão  $m$ . Então existe uma decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^p$  tal que a projeção sobre a primeira coordenada  $\pi : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}_I^m$ ,  $\pi(x, y) = x$ , aplica  $E$  isomorficamente sobre  $\mathbb{R}_I^m$ .

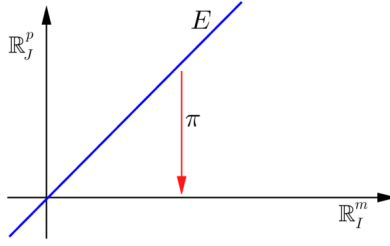


Fig. 12: A projeção  $\pi$  é um isomorfismo de  $E$  sobre  $\mathbb{R}_I^m$

### Prova.

Seja  $\{u_1, \dots, u_m\}$  uma base de  $E$ . Se  $E = \mathbb{R}^{m+p}$ , não há nada a demonstrar. Se  $E \neq \mathbb{R}^{m+p}$ , existe  $j_1 \in \{1, \dots, m+p\}$  tal que  $e_{j_1} \notin E$ . Então  $\{u_1, \dots, u_m, e_{j_1}\}$  são LI e geram um subespaço  $E_1$  de  $\mathbb{R}^{m+p}$  de dimensão  $m+1$ . Se  $E_1 \neq \mathbb{R}^{m+p}$ , existe  $j_2 \in \{1, \dots, m+p\}$  tal que  $e_{j_2} \notin E_1$ . Então  $\{u_1, \dots, u_m, e_{j_1}, e_{j_2}\}$  são LI e geram um subespaço de  $\mathbb{R}^{m+p}$  de dimensão  $m+2$ . Prosseguindo desta maneira, obtemos  $p$  vetores  $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ , da base canônica de  $\mathbb{R}^{m+p}$  tais que  $\{u_1, \dots, u_m, e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^{m+p}$ .

Sejam  $\mathbb{R}_J^p$  o subespaço gerado por  $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\}$  e  $\mathbb{R}_I^m$  o subespaço gerado por  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ , onde  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m+p\} - \{j_1, \dots, j_p\}$ .

Assim,  $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^p$  e  $\mathbb{R}^{m+p} = E \oplus \mathbb{R}_J^p$ .

Seja  $\pi : \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^p \longrightarrow \mathbb{R}_I^m$  a projeção sobre a primeira coordenada, ou seja, se  $z = x + y$ ,  $x \in \mathbb{R}_I^m$  e  $y \in \mathbb{R}_J^p$ , então  $\pi(z) = x$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}_I^m$ . Então existem  $x_1 \in E$  e  $y_1 \in \mathbb{R}_J^p$  tais que  $x = x_1 + y_1$ .

Logo  $x = \pi(x) = \pi(x_1 + y_1) = \pi(x_1)$  e, portanto,  $\pi|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}_I^m$  é sobrejetora.

Como  $\dim E = m = \dim \mathbb{R}_I^m$ , temos que  $\pi|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}_I^m$  é um isomorfismo. ■

### Teorema 12.1. (Teorema do Posto)

Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+p}$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , e posto constante  $m$  em cada ponto do aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ . Então, para cada ponto  $\alpha \in U$ , existem um difeomorfismo  $\alpha$  de um aberto  $V \times W$  em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  sobre um aberto  $Z \subset U$  contendo o ponto  $\alpha$  e um difeomorfismo  $\beta$  de um aberto  $Z' \subset \mathbb{R}^{m+p}$ , tal que  $f(Z) \subset Z'$ , sobre um aberto  $V \times W'$  em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ , ambos de classe  $C^k$ , tais que, para todo  $(x, y) \in V \times W$ :

$$\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0).$$

**Descrição do Teorema do Posto:** Cada uma das fibras da vizinhança  $Z$  de  $\alpha$  é transformada por  $f$  num único ponto, do mesmo modo que cada segmento vertical  $x \times W$  em  $V \times W$  é transformado por  $\beta \circ f \circ \alpha$  no ponto  $(x, 0)$ .

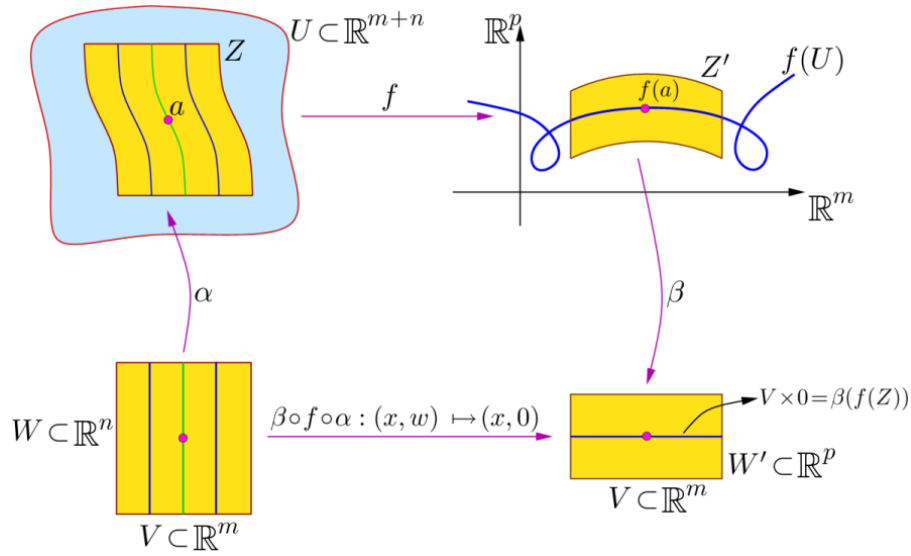


Fig. 13: Representação esquemática do Teorema do Posto

### Prova.

Seja  $E = f'(a)(\mathbb{R}^{m+n}) \subset \mathbb{R}^{m+p}$ .

Como  $\dim E = m$ , pelo lema 12.2, existe uma decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}_I^m \oplus \mathbb{R}_J^p$  tal que a projeção sobre a primeira coordenada  $\bar{\pi} : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}_I^m$ ,  $\bar{\pi}(x, w) = x$ , é um isomorfismo quando restrita a  $E$ , ou seja,  $\bar{\pi} : E \rightarrow \mathbb{R}_I^m$  é um isomorfismo.

Seja  $T : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$  a transformação linear tal que  $T(e_k) = e_{i_k}$ ,  $k = 1, \dots, m$  e  $T(e_k) = e_{j_{k-m}}$ ,  $k = m+1, \dots, m+p$ , e seja  $\pi = L \circ T^{-1} \circ \bar{\pi}$ , onde  $L : \mathbb{R}^m \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dada por  $L(x, 0) = x$ .

Logo  $(\pi \circ f)'(a) = \pi \circ f'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é sobrejetora. Então, pela Forma Local das Submersões, existe um difeomorfismo  $\alpha$  de classe  $C^k$  de um aberto  $V_0 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  sobre um aberto  $Z_0$  contendo  $a$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$  tal que  $\pi \circ f \circ \alpha(x, w) = x$ .

Assim,  $f \circ \alpha(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + \lambda(x, y)$ , onde a aplicação  $\lambda : V_0 \times W \rightarrow \mathbb{R}_J^p$ , dada por

$$\lambda(x, y) = \sum_{\ell=1}^p \lambda_\ell(x, y) e_{j_\ell}, \text{ é de classe } C^k.$$

Observe que  $T^{-1} \circ f \circ \alpha(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1(x, y), \dots, \lambda_p(x, y))$ .

**Afirmção:**  $\partial_2 \lambda = 0$ .

De fato, a matriz Jacobiana de  $T^{-1} \circ f \circ \alpha$  tem a forma  $\begin{pmatrix} I_{m \times m} & O_{m \times n} \\ A_{p \times m} & B_{p \times n} \end{pmatrix}_{(m+p) \times (m+n)}$ , onde  $I_{m \times m}$  é a matriz identidade  $m \times m$ ,  $O_{m \times n}$  é a matriz nula  $m \times n$  e  $B = \left( \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_k} \right)_{p \times n}$ .

Como  $\text{posto}(T^{-1} \circ f \circ \alpha) = \text{posto}(f \circ \alpha) = \text{posto}(f) = m$ , temos que  $B = 0$ , ou seja,  $\partial_2 \lambda = 0$ , provando a afirmação.

Além disso, como  $W$  pode ser tomado convexo, temos que  $V_0 \times W$  é verticalmente convexo e, portanto, pelo lema 12.1,  $\lambda(x, y)$  não depende da variável  $y$ .

Seja  $\alpha(a_1, a_2) = a$  e consideremos a injeção  $i : V_0 \rightarrow V_0 \times W$  dada por  $i(x) = (x, a_2)$ . Então a aplicação  $f \circ \alpha \circ i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ ,  $f \circ \alpha \circ i(x) = \sum_{k=1}^m x_k e_{i_k} + \lambda(x, a_2)$ , é de classe  $C^k$  e sua derivada no ponto  $a_1$ ,  $(f \circ \alpha \circ i)'(a_1) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ , é injetora, pois

$$(f \circ \alpha)'(i(a_1))(i'(a_1))v = (f \circ \alpha)'(a_1, a_2)(v, 0) = \sum_{k=1}^m v_k e_{i_k} + \lambda'(a_1, a_2)(v, 0).$$

Além disso, como  $\lambda$  independe de  $y$ , para todo  $(x, y) \in V_0 \times W$ :

$$f \circ \alpha \circ i(x) = f \circ \alpha(x, a_2) = f \circ \alpha(x, y).$$

Pela Forma Local das Imersões, existe um difeomorfismo  $\beta : Z' \rightarrow V \times W'$  de classe  $C^k$  tal que  $Z'$  é um aberto contendo  $f(a)$  em  $\mathbb{R}^{m+p}$ ,  $V \subset V_0$  aberto de  $\mathbb{R}^m$  com  $a_1 \in V$ ,  $W'$  aberto de  $\mathbb{R}^p$  com  $0 \in W'$  e  $\beta \circ f \circ \alpha \circ i(x) = (x, 0)$  para todo  $x \in V$ . Logo,  $\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0)$  para todo  $(x, y) \in V \times W$ . ■

**Corolário 12.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , com posto constante no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Então:*

**(a)**  *$f$  é localmente injetora se, e só se,  $f$  é uma imersão.*

**(b)**  *$f$  é aberta se, e só se,  $f$  é uma submersão.*

**Prova.**

**(a) ( $\Leftarrow$ )** Se  $f$  é uma imersão de classe  $C^1$ , então  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora para todo  $a \in U$ . Logo, pelo teorema 7.2,  $f$  é localmente injetora.

Ou ainda, pela Forma Local das Imersões, para cada  $a \in U$ , existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$ , com  $V \subset U$  e  $a \in V$ , e um difeomorfismo  $\beta : Z \rightarrow V \times W$  tal que  $\beta \circ f(x) = (x, 0)$  para todo  $x \in V$ . Logo  $f|_V$  é injetora.

**( $\Rightarrow$ )** Suponhamos que  $\text{posto}(f) = p < m$ . Então, pelo Teorema do Posto, a aplicação  $\beta \circ f \circ \alpha : (x, y) \mapsto (x, 0)$ , definida no produto  $V \times W$  dos abertos  $V \subset \mathbb{R}^p$  e  $W \subset \mathbb{R}^{m-p}$  não é injetora.

Como  $\beta$  e  $\alpha$  são difeomorfismos, temos que  $f$  não é injetora em aberto algum contendo  $a$ , um absurdo.

Logo  $\text{posto}(f) = m$ , ou seja,  $f$  é uma imersão.

**(b) ( $\Leftarrow$ )** Segue do corolário 11.2.

**( $\Rightarrow$ )** Suponhamos que  $\text{posto}(f) = p < n$ . Sejam os difeomorfismos  $\beta$  e  $\alpha$  dados pelo Teorema do Posto. Então  $\beta \circ f \circ \alpha(x, y) = (x, 0)$  para todo  $x \in V$ ,  $y \in W$ , onde  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^p$ ,  $W$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{m-p}$ ,  $(x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ .

Logo  $\beta \circ f \circ \alpha(V \times W) = \beta \circ f(Z) = V \times \{0\}$ , onde  $Z$  é um aberto de  $\mathbb{R}^m$  que contém  $a$ , mas  $f(Z) = \beta^{-1}(V \times \{0\})$  não é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , uma contradição.

Assim,  $\text{posto}(f) = n$ , ou seja,  $f$  é uma submersão. ■

**Teorema 12.2.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  e, para cada  $r = 0, 1, \dots, p = \min\{m, n\}$ , seja  $A_r$  o interior do conjunto dos pontos de  $U$  nos quais  $f$  tem posto  $r$ . Então o conjunto aberto  $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p$  é denso em  $U$ .*

**Prova.**

Seja  $V \subset U$  um aberto não-vazio.

**Afirmção:**  $V \cap A \neq \emptyset$ .

De fato, como o posto de  $f$  só assume um número finito de valores, existe  $a \in V$  tal que  $r = \text{posto}(f(a)) = \max\{\text{posto}(f(x)) \mid x \in V\}$ .

Então, pela observação 12.4, existe  $\delta > 0$  tal que  $B(a; \delta) \subset V$  e  $\text{posto}(f(x)) \geq r$  para todo  $x \in B(a; \delta)$ . Logo  $\text{posto}(f(x)) = r$  para todo  $x \in B(a; \delta)$  e, portanto,  $B(a; \delta) \subset A_r$ .

Assim,  $\emptyset \neq B(a; r) \subset A_r \cap V \subset A \cap V$ . ■

**Observação 12.5.** Em geral,  $A_r = \emptyset$  para alguns  $r = 0, 1, \dots, p$ .

**Observação 12.6.** O conjunto  $A_p$  (que é igual a  $A_m$  se  $m \leq n$  e igual a  $A_n$  se  $n \leq m$ ) é o conjunto dos pontos  $x \in U$  nos quais o posto de  $f'(x)$  é igual a  $p$ , pois tal conjunto é sempre aberto, pela observação 12.4. Portanto, no caso  $r = p$ , não precisamos tomar o interior.

**Corolário 12.2.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Então existe um subconjunto aberto e denso  $A \subset U$  tal que  $f$  tem posto constante em cada componente conexa de  $A$ .*

**Prova.**

Seja o conjunto aberto e denso  $A = A_0 \cup \dots \cup A_p$  dado pelo teorema anterior. Como os abertos  $A_0, A_1, \dots, A_p$  são dois a dois disjuntos, temos que se  $C$  é uma componente conexa de  $A$  e  $C \cap A_j \neq \emptyset$  para algum  $j = 0, 1, \dots, r$ , então  $C \subset A_j$ , pois, caso contrário,

$$C = (A_j \cap C) \cup \left( \left( \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p A_k \right) \cap C \right)$$

seria uma cisão não-trivial de  $C$ . Logo  $f$  tem posto constante  $j$  em  $C$ . ■

**Corolário 12.3.** *Se a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é localmente injetora, então  $m \leq n$  e o conjunto dos pontos  $x \in U$  nos quais  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora é aberto e denso em  $U$ .*

*Prova.*

Seja a decomposição  $A = A_0 \cup \dots \cup A_p$  dada pelo teorema 12.2. Em cada aberto  $A_i \neq \emptyset$ ,  $i = 0, \dots, p$ ,  $f$  é localmente injetora e tem posto constante. Logo, pelo corolário 12.1,  $f|_{A_i}$  é uma imersão. Então  $m \leq n$  e  $A_i = \emptyset$  para todo  $i = 0, \dots, m-1$ , ou seja,  $p = m$  e  $A = A_m$ . Além disso, pela observação 12.6,  $A_m = \{x \in U \mid f'(x) \text{ é injetora}\}$ .

Portanto, o conjunto dos pontos  $x \in U$  nos quais  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetora é um conjunto aberto e denso em  $U$ . ■

**Corolário 12.4.** *Se a aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  é aberta, então  $n \leq m$  e o conjunto dos pontos  $x \in U$  nos quais a derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetora é aberto e denso em  $U$ .*

*Prova.*

Seja a decomposição  $A = A_0 \cup \dots \cup A_p$  dada pelo teorema 12.2. Como em cada aberto  $A_i \neq \emptyset$ ,  $f|_{A_i}$  é uma aplicação aberta de posto constante temos, pelo corolário 12.1, que  $f|_{A_i}$  é uma submersão. Logo  $n \leq m$  e  $A_i = \emptyset$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Ou seja,  $p = n$  e  $A = A_n$ . Então, pela observação 12.6,  $A_n = \{x \in U \mid f'(x) \text{ é sobrejetora}\}$ .

Assim, o conjunto  $\{x \in U \mid f'(x) \text{ é sobrejetora}\}$  é aberto e denso em  $U$ . ■

**Observação 12.7.** Quando  $m = 1$ , o corolário 12.3 pode ser demonstrado sem a ajuda do Teorema do Posto.

De fato, se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho diferenciável, dizer que  $f'(x)$  é injetora equivale a dizer que o vetor velocidade é  $\neq 0$  no ponto  $x \in I$ .

Como  $f$  é de classe  $C^1$ , o conjunto  $A = \{x \in I \mid f'(x) \neq 0\}$  é aberto.

Além disso, como  $f$  é localmente injetora, não pode existir um intervalo aberto  $J \subset I$  tal que  $A \cap J = \emptyset$ , ou seja, não pode existir  $J \subset I$  tal que  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in J$ , pois, neste caso,  $f$  seria constante em  $J$ , e assim,  $f$  não seria localmente injetora.

No caso  $n = 1$ , o corolário 12.4 também pode ser provado diretamente.

De fato, se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então  $f'(x)$  é sobrejetora se, e só se,  $df(x) \neq 0$ . Logo, como  $f$  é de classe  $C^1$ , temos que  $A = \{x \in U \mid df(x) \neq 0\}$  é um conjunto aberto.

Além disso, se  $A$  não fosse denso em  $U$ , seu complementar conteria uma bola aberta  $B$ . Como  $df(x) = 0$  para  $x \in B$  e  $B$  é conexo,  $f$  seria constante em  $B$  e, portanto,  $f(B)$  seria um conjunto formado por apenas um ponto, logo não poderia ser aberto. Assim,  $A$  é denso em  $U$ .

## Apêndice I

Já vimos que o Teorema da Aplicação Implícita pode ser obtido a partir do Teorema da Aplicação Inversa. Vamos provar que a recíproca também é verdadeira.

**Prova.**

De fato, seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação fortemente diferenciável no ponto  $a \in U$  (ou de classe  $C^k$ ) tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo.

Como  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  e  $f'(a)$  é injetora, existe, pelo teorema 7.2, um aberto  $U_0 \subset U$ , com  $a \in U_0$ , tal que  $f : U_0 \rightarrow f(U_0)$  é um homeomorfismo.

Consideremos a aplicação  $F : \mathbb{R}^m \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $F(x, y) = x - f(y)$ .

Se  $f$  é de classe  $C^k$  então  $F$  é de classe  $C^k$ , e se  $f$  é fortemente diferenciável no ponto  $a$  então  $F$  é fortemente diferenciável no ponto  $(f(a), a)$ .

De fato, como

$$F(x, y) = x - f(y) = F(f(a), a) + (x - f(a)) - f'(a)(y - a) + r_{(f(a), a)}^F(x, y),$$

temos que

$$r_{(f(a), a)}^F(x, y) = -f(y) + f(a) + f'(a)(y - a) = -r_a^f(y).$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} x, x' \in B(a; \delta) &\implies \|r_a^f(y') - r_a^f(y)\| \leq \varepsilon \|y' - y\|_S \\ &\implies \|r_{(f(a), a)}^F(x', y') - r_{(f(a), a)}^F(x, y)\| = \|r_a^f(y') - r_a^f(y)\| \leq \varepsilon \|y' - y\|_S \\ &\leq \varepsilon (\|y' - y\|_S + \|x' - x\|_S) \\ &= \varepsilon \|(y', x') - (y, x)\|_S, \end{aligned}$$

para todos  $y, y' \in \mathbb{R}^m$ .



Além disso, como  $g'(f(a), a)(v, w) = v - f'(a)w$ , temos que  $F'(f(a), a)(0, w) = -f'(a)w$  e, portanto,  $\partial_2 F(f(a), a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo, uma vez que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Implícita, existem um aberto  $V \subset \mathbb{R}^m$  e um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^m \times U_0$ ,  $f(a) \in V$  e  $(f(a), a) \in Z$ , com a seguinte propriedade: para cada  $x \in V$  existe um único  $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^m$  tal que  $(x, \varphi(x)) \in Z$  e  $F(x, \varphi(x)) = x - f(\varphi(x)) = F(f(a), a) = 0$ , ou seja, para cada  $x \in V$  existe um único  $y = \varphi(x) \in U_0$  tal que  $(x, \varphi(x)) \in Z$  e  $f(\varphi(x)) = x$ .

Então  $V \subset f(U_0)$  e, como  $f : U_0 \rightarrow f(U_0)$  é um homeomorfismo,  $U_1 = f|_{U_0}^{-1}(V)$  é um aberto que contém o ponto  $a$ . Assim,  $f : U_1 \rightarrow V$  é um homeomorfismo do aberto  $U_1$  sobre o aberto  $V$ , cuja inversa  $\varphi = f^{-1}$  é, pelo Teorema da Aplicação Implícita, fortemente diferenciável no ponto  $f(a)$ . E se  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $\varphi = f^{-1}$  é de classe  $C^k$  e, portanto,  $f : U_1 \rightarrow V$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ . ■

## Apêndice II

Lembremos os enunciados dos Teoremas da Aplicação Implícita (simplificado) e da Aplicação Inversa.

### Teorema. (da Aplicação Implícita)

Seja  $g : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ). Suponha que  $g(x_0, y_0) = c$  e  $\partial_2 g(x_0, y_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um isomorfismo para um certo  $(x_0, y_0) \in U$ . Então existem abertos  $Z \subset U$ , com  $(x_0, y_0) \in Z$ , e  $V \subset \mathbb{R}^m$ , com  $x_0 \in V$ , tais que  $g^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico de uma aplicação  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , ou seja, para todo  $x \in V$  existe um único  $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, \varphi(x)) \in Z$  e  $g(x, \varphi(x)) = c$ .

### Teorema. (da Aplicação Inversa)

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Suponha que  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um isomorfismo para um certo  $a \in U$ . Então existem abertos  $V$  e  $W$  em  $\mathbb{R}^n$ , com  $a \in V \subset U$ , tais que  $f : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

Provaremos o Teorema da Aplicação Inversa usando duas vezes o Teorema da Aplicação Implícita.

Seja  $F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação dada por  $F(x, y) = x - f(y)$ .

Então  $F$  é uma aplicação de classe  $C^k$  e  $\partial_2 F(b, a) = -f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, onde  $b = f(a)$  e  $F(b, a) = f(a) - f(a) = 0$ .

Pelo Teorema da Aplicação Implícita, existem abertos  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  e  $Z_1 \subset \mathbb{R}^n \times U$ , com  $b \in V_1$  e  $(b, a) \in Z_1$ , tais que  $F^{-1}(0) \cap Z_1$  é o gráfico de uma aplicação  $\varphi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , isto é, para cada  $x \in V_1$  existe um único  $y = \varphi(x) \in U$  tal que  $(x, \varphi(x)) \in Z_1$  e  $F(x, \varphi(x)) = x - f(\varphi(x)) = 0$ . Observe que  $\varphi(b) = a$ .

Como  $f(\varphi(x)) = x$  para todo  $x \in V_1$ , temos que  $\varphi$  é injetora e  $f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot v = v$  para todos  $x \in V_1$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ . Logo  $\varphi'(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo.

Considere agora a aplicação  $G : U \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $G(z, w) = z - \varphi(w)$ . Então  $G$  é uma aplicação de classe  $C^k$  e  $\partial_2 G(\varphi(b), b) = -\varphi'(b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Aplicação Implícita, existem abertos  $V \subset \mathbb{R}^n$  e  $Z \subset U \times V_1$ , com  $\varphi(b) = a \in V$  e  $(\varphi(b), b) = (a, f(a)) \in Z$ , tais que  $G^{-1}(0) \cap Z$  é o gráfico de uma aplicação  $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , isto é, para cada  $z \in V$  existe um único  $w = \xi(z) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(z, \xi(z)) \in Z$  e  $G(z, \xi(z)) = z - \varphi(\xi(z)) = 0$ .

Assim,  $\xi(a) = f(a)$ ,  $\xi(z) \in V_1$  e  $\varphi(\xi(z)) = z$ , para todo  $z \in V$ . Logo  $f(\varphi(\xi(z))) = f(z)$ , para todo  $z \in V$ .

Como  $f \circ \varphi(x) = x$ , para todo  $x \in V_1$ , temos que  $\xi(z) = f(z)$  e portanto,  $\varphi(f(z)) = z$ , para todo  $z \in V$ .

**Afirmção:**  $f : V \rightarrow f(V)$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  sobre o aberto  $f(V)$ .

De fato, sendo  $\varphi(f(z)) = z$ , para todo  $z \in V$ , temos que  $f$  é injetora em  $V$ .

Como  $\varphi(f(V)) = V$ ,  $f(V) \subset V_1$  e  $\varphi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação contínua e injetora, temos que  $\varphi^{-1}(V) = f(V)$  é um aberto de  $V_1$  e, portanto, de  $\mathbb{R}^n$ .

Além disso, como  $\varphi : f(V) \rightarrow V$  é a inversa de  $f : V \rightarrow f(V)$  e  $\varphi : f(V) \rightarrow V$  é uma aplicação de classe  $C^k$ , temos que  $f : V \rightarrow f(V)$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  do aberto  $V$ , que contém  $a$ , sobre o aberto  $W = f(V)$ .  $\square$

A versão “fortemente diferenciável” do Teorema da Aplicação Inversa se prova de modo análogo, usando a versão “fortemente diferenciável” do Teorema da Aplicação Implícita. Necessitamos apenas provar que a aplicação  $F$ , definida na demonstração acima, é fortemente diferenciável em  $(f(a), a)$  (ver Apêndice I).

Assim, a aplicação  $\varphi : V_1 \rightarrow U$ , neste caso, é fortemente diferenciável em  $b$  e, portanto,  $V_1$  pode ser tomado de modo que  $\varphi$  seja contínua em  $V_1$ .

**F I M**