Sumário

Parte II
Números reais - operações e ordenação

Introdução

Um dos objetivos do nosso estudo dos reais é consolidar o conhecimento adquirido até aqui sobre os reais, com uma visão mais aprofundada, fazendo uso do que aprendemos em noções de lógica. A aplicação natural das propriedades dos reais é na resolução de equações e inequações, que surgem nos problemas de diversas áreas de conhecimento.

Nas simplificações das equações e inequações são usadas fortemente as propriedades dos reais. Infelizmente, é muito comum o aluno aplicar as propriedades de forma equivocada, ora porque são aplicadas sem os devidos cuidados de verificar as hipóteses em que é possível aplicar, ora porque no afã de simplificar, surgem propriedades que não existem.

Espera-se que ao final do estudo o aluno seja capaz de identificar corretamente quais propriedades podem ser usadas em simplificações de equações e inequações.

Como essa disciplina é oferecida apenas para os alunos do curso de Física, não há preocupação em provar todas as propriedades, mas caso o aluno tenha curiosidade de ver todas elas, pode consultar as notas de aula da disciplina Matemática Básica, oferecida para os alunos do curso de Matemática.

Historicamente os conjuntos numéricos, que são os naturais, os inteiros, os racionais, os irracionais, os reais e os complexos surgiram na mesma ordem em que são estudados nas escolas de Ensino Básico, Fundamental e Médio. A necessidade de estudo de um novo tipo de conjunto numérico sempre esteve de alguma forma vinculada à necessidade de ampliar as propriedades dos números para que pudessem resolver novos problemas.

Essa é a ordem natural de estudo e já foi vista por todos os alunos que entram na Universidade.

Agora vamos construir axiomaticamente os números reais, isto é, os números reais serão definidos como os números que satisfazem um determinado número de axiomas ou postulados, aceitos sem demonstração. Os outros conjuntos são subconjuntos dos reais e alguns axiomas dos reais não se aplicam nos subconjuntos, destacaremos quais não se aplicam.

Muitas vezes os axiomas também são chamados de propriedades ou propriedades básicas. É muito importante que tenhamos em mente esses axiomas, são eles que nos permitem encontrar novas definições e propriedades.

2 Operações, axiomas e propriedades dos reais

2.1 As operações Soma e Produto e os Axiomas Algébricos

Seja $\mathbb{R}$ um conjunto, chamado conjunto dos números reais ou conjunto dos reais.

Soma e ***Produto*** são operações aplicadas sobre quaisquer dois elementos $a, b \in \mathbb{R}$.

Única notação usual da soma de a e b: $a + b$ (leia-se a mais b)
Notações usuais do produto de a por b: $a \times b$, $a \cdot b$ e ab. (leia-se a vezes b)

Para $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ admitem-se verdadeiros os axiomas algébricos descritos a seguir.

	Axiomas da Soma	Axiomas do Produto
Lei do fechamento	$AS1:\ a + b \in \mathbb{R}$	$AP1:\ a \times b \in \mathbb{R}$
Lei associativa	$AS2:\ (a + b) + c = a + (b + c)$	$AP2:\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Lei comutativa	$AS3:\ a + b = b + a$	$AP3:\ a \times b = b \times a$
Lei do elemento neutro	$AS4:\ \exists\ \ 0 \in \mathbb{R};\ \ a + 0 = a$	$AP4:\ \exists\ \ 1 \in \mathbb{R},\ \ 1 \neq 0;\ \ a \times 1 = a$
Lei do elemento simétrico	$AS5:\ \forall a,\ \ \exists\ -a \in \mathbb{R};\ \ a + (-a) = 0$	$(diz - se:\ \ -a$ é o simétrico de $a)$
Lei do elemento inverso	$AP5:\ \forall a \neq 0,\ \exists\ \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R};\ \ a \times \dfrac{1}{a} = 1$	$(diz - se:\ \dfrac{1}{a}$ é o inverso de $a)$

	Axioma da Soma e Produto
Lei distributiva	$ASP:\ \ a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Observações:

- Foram atruibuídas letras (AS1, AS2, AP5, etc) apenas para facilitar, quando for preciso citar referências aos axiomas.
- Qualquer outra propriedade algébrica dos reais pode ser deduzida ou provada a partir desses axiomas. Listaremos algumas importantes, algumas são triviais de demonstrar, outras não.
- Os números reais, que são os elementos do conjunto dos reais, satisfazem esses axiomas, mas apenas esses axiomas não caracterizam os números reais, isto é, não são apenas os números reais que satisfazem esses axiomas. Os números racionais e os números complexos também satisfazem esses axiomas.
- Os números naturais surgiram historicamente com o objetivo de contar objetos, onde poderia juntar objetos e contar, isto é, somar, poderia juntar por grupos, isto é, multiplicar. Isto é, nos números naturais, poderiam definir as operações soma e multiplicação. A lei de formação dos naturais começou com o número 1, depois, somando 1 ao 1, obtém o 2, somando 1 ao 2, obtém o 3, depois foi estabelecido que todo número natural pode ser obtido como a soma de um outro número natural com o número 1 , isto é, todo número natural tem um sucessor, logo 8 é o sucessor de 7, 1001 é o sucessor de 1000, assim por diante.

  E assim, o conjunto dos naturais é $\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$, como já sabemos é denotado por $\mathbb{N}$.

  No conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais não existe o elemento neutro da soma, nem o elemento simétrico, mas existe o elemento neutro do produto, o único elemento que possui elemento inverso é o próprio elemento neutro 1.
- O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é formado pelos números naturais, pelo zero e pelos simétricos dos naturais. Isto é, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.

  No conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, os únicos números que possuem elemento inverso são o 1 e o -1.
- Agora vamos ver que a subtração, a divisão e as potências naturais podem ser definidas usando os axiomas algébricos.
- Outra notação para o elemento inverso de a é a^{-1}, isto é, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

2.2 Definição das operações subtração e divisão e da potência natural

Definição (*Subtração*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

A subtração b de a é denotada por $a - b$ e definida como a soma de a com o simérico de b.

Em símbolos, $a - b := a + (-b)$. (leia-se a menos b)

Definição (*Divisão*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

A divisão de a por b é denotada por $a \div b$ e definida como o produto de a pelo inverso de b.

Em símbolos, $a \div b := a \times \dfrac{1}{b}$. (leia-se a dividido por b) Outras notações: $a \div b = \dfrac{a}{b} = a/b$

Observação sobre a divisão por 0: como 0 não possui inverso, a divisão por zero não é definida.

Observação sobre os símbolos $''\ :=\ ''$ e $''\ \triangleq\ ''$, conhecidos como "por definição".

Esses dois símbolos têm exatamente o mesmo significado: a expressão do lado esquerdo do símbolo é nova, está sendo definida pela expressão do lado direito, que usa algo conhecido previamente. O símbolo $''\ \triangleq\ ''$ é mais usado em textos matemáticos, o símbolo $''\ :=\ ''$ também é usado em textos matemáticos mais recentes, é o mesmo símbolo usado em programas computacionais.

Definição (*Potência natural*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

A potência de a elevada à n é denotada por a^n e $a^n := \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n vezes}}$.

2.3 Transitividade da igualdade

Uma afirmação de caráter mais geral é usada nas demonstrações das propriedades:

- Transitividade da igualdade: $a = b$ e $b = c \Longrightarrow a = c$.

2.4 Propriedades algébricas

2.4.1 Propriedades algébricas básicas

Assim denominadas porque são bastante usadas, junto com os axiomas e as definições, para demonstrar outras propriedades também importantes.

Nas provas dessas propriedades são usados apenas os axiomas, mas isso não significa de forma alguma que é fácil descobrir como provar todas elas. Tente provar, provavelmente você perceberá a dificuldade em algumas delas.

Propriedade PA 1 ***A igualdade não se altera quando soma-se ou multiplica-se o mesmo número nos dois lados da igualdade.***

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

i) $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$ (preservação da igualdade na soma)

ii) $a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ (preservação da igualdade no produto)

Prova: nessa prova só é usada a lógica e os axiomas de fechamento da soma e do produto.

i) $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ pela lei do fechamento da soma, $a + c \in \mathbb{R}$, e sabemos, pela lógica, que $a + c = a + c$.
Por hipótese, $a = b$, logo, por lógica, $a = b$ e $a + c = a + c \overset{(*)}{\Longrightarrow} a + c = b + c$. ■
$(*)$ Como $b = a$, o valor a do lado direito da igualdade foi substituído pelo valor b.

ii) $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ pela lei do fechamento do produto, $a \cdot c \in \mathbb{R}$, e sabemos, pela lógica, que $a \cdot c = a \cdot c$.
Por hipótese, $a = b$, logo, por lógica, $a = b$ e $a \cdot c = a \cdot c \overset{(*)}{\Longrightarrow} a \cdot c = b \cdot c$. ■
$(*)$ Como $b = a$, o valor a do lado direito da igualdade foi substituído pelo valor b.

Propriedade PA 2 ***Unicidade do elemento neutro da soma***

Primeira propriedade de unicidade do 0: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro da soma.
Escrita em símbolos: O único elemento $b \in \mathbb{R}$ que satisfaz $a + b = a, \forall a \in \mathbb{R}$ é o elemento 0.

Prova:
Suponha, por absurdo, que a tese é falsa, isto é, suponha que existe outro elemento neutro $0' \in \mathbb{R}$; $0' \neq 0$.
Por um lado, 0 é elemento neutro da soma $\Longrightarrow 0' + 0 = 0'$.
Por outro lado, $0'$ é elemento neutro da soma $\Longrightarrow 0 + 0' = 0$.
Mas, pela lei comutativa da soma, temos que $0' + 0 = 0 + 0' \overset{\text{transitivvidade da igualdade}}{\Longrightarrow} 0' = 0$.
Mas $0 = 0'$ e $0 \neq 0'$ não podem ocorrer simultaneamente,
portanto não é possível negar a tese, isto é, o elemento neutro $0 \in \mathbb{R}$ é único. ■

Segunda propriedade da unicidade do 0:

$$a + b = a \quad \text{para algum } a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad b = 0.$$

Prova:
$a + b = a \overset{\text{PA1}}{\Longrightarrow} (a + b) + (-a) = a + (-a) \overset{\text{AS2}}{\Longrightarrow} a + (b + (-a)) = a + (-a) \overset{\text{AS3}}{\Longrightarrow} a + ((-a) + b) = a + (-a) \overset{\text{AS2}}{\Longrightarrow} (a + (-a)) + b = a + (-a) \overset{\text{AS5}}{\Longrightarrow} 0 + b = 0 \overset{\text{AS3}}{\Longrightarrow} b + 0 = 0 \overset{\text{AS4}}{\Longrightarrow} b = 0$.

Propriedade PA 3 ***Unicidade do elemento neutro do produto***

Primeira propriedade de unicidade do 1: Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento neutro do produto.

Escrita em símbolos: o único elemento $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ que satisfaz $a \cdot b = a, \forall a \in \mathbb{R}$ é o elemento 1.

Prova:
Suponha, por absurdo, que existe outro elemento neutro $1' \in \mathbb{R}$; $1' \neq 0$, $1' \neq 1$.
Por um lado, 1 é elemento neutro do produto $\Longrightarrow 1' \cdot 1 = 1'$.
Por outro lado, $1'$ é elemento neutro do produto $\Longrightarrow 1 \cdot 1' = 1$.
Mas, pela lei comutativa do produto, temos que $1' \cdot 1 = 1 \cdot 1' \overset{\text{transitivvidade da igualdade}}{\Longrightarrow} 1' = 1$.
Mas $1 = 1'$ e $1 \neq 1'$ não podem ocorrer simultaneamente.
portanto não é possível negar a tese, isto é, o elemento neutro $1 \in \mathbb{R}$ é único. ■

Segunda propriedade da unicidade do 1:

$$a \cdot b = a, \quad \text{para algum } a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 1$$

Prova:

$$a \cdot b = a, \quad a \neq 0 \overset{\text{PA1 e AP5}}{\Longrightarrow} (a \cdot b) \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} \overset{\text{AP2}}{\Longrightarrow} a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} \overset{\text{AP3}}{\Longrightarrow} a \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot b\right) = a \cdot \frac{1}{a} \overset{\text{AP2}}{\Longrightarrow} \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = a \cdot \frac{1}{a} \overset{\text{AP5}}{\Longrightarrow} 1 \cdot b = 1 \overset{\text{AP3}}{\Longrightarrow} b \cdot 1 = 1 \overset{\text{AP4}}{\Longrightarrow} b = 1.$$

Propriedade PA 4 $0 + a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 5 $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 6 ***Unicidade do elemento simétrico***

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento simétrico.

Propriedade PA 7 ***Unicidade do elemento inverso***

Só existe um número real que satisfaz o axioma de existência de elemento inverso.

- Observação sobre notação de existência e unicidade.

O símbolo " $\exists!$ " significa "existe um único". Pelas propriedades acima,

- Podemos escrever $\exists!\ 0 \in \mathbb{R};\ a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$ e também $\exists!\ 1 \in \mathbb{R};\ a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.
- Dado $a \in \mathbb{R}$, podemos escrever, $\exists!\ -a \in \mathbb{R}$, e se $a \neq 0$ podemos escrever $\exists!\ \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 8 $-a + a = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 9 $\dfrac{1}{a} \cdot a = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ } e \text{ } a \neq 0$.

Propriedade PA 10 $-(-a) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (leia-se: a é o simétrico de $-a$).

Propriedade PA 11 $\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ } e \text{ } a \neq 0 \left(\text{leia-se: } a \text{ é o inverso de } \dfrac{1}{a}\right)$.

Propriedade PA 12 $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 13 $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Propriedade PA 14 $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1), \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

2.4.2 Outras propriedades algébricas importantes

As demontrações dessas propriedades são mais simples do que as demonstrações das propriedades básicas, vamos provar apenas algumas, outras serão deixadas como exercício. Antes de ver a demonstração de cada propriedade, tente provar sozinho.

Para provar cada propriedade podemos usar as definições, axiomas e propriedades disponíveis, por esse motivo a maneira de provar não é única. Quanto mais propriedades ficam disponiveis, maior é o número de maneitas diferentes de provar.

Quando aparecer o símbolo $'' :=\ ''$, significa que usamos alguma definição.

Propriedade PA 15 $\quad -(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b), \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$

Prova da primeira igualdade: $\quad -(a\cdot b) \overset{\text{PA14}}{=} (-1)\cdot(a\cdot b) \overset{\text{associativa}}{=} ((-1)\cdot(a))\cdot b \overset{\text{PA14}}{=} (-a)\cdot b$ ■

Prova da segunda igualdade: $-(a\cdot b) \overset{\text{PA14}}{=} (-1)\cdot(a\cdot b) \overset{\text{comutativa}}{=} (a\cdot b)\cdot(-1) \overset{\text{associativa}}{=} a\cdot(b\cdot(-1)) \overset{\text{PA14}}{=} a\cdot(-b)$ ■

Propriedade PA 16 $\quad (-a)\cdot(-b) = a\cdot b, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$

Prova: $\quad (-a)\cdot(-b) \overset{\text{PA15}}{=} -(a\cdot(-b)) \overset{\text{PA15}}{=}= -(-(a\cdot b)) \overset{\text{PA10}}{=} a\cdot b$ ■

Propriedade PA 17 $\quad \dfrac{a\cdot b}{c} = a\cdot\dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}\cdot b, \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0$

Prova da primeira igualdade: $\quad \dfrac{a\cdot b}{c} := (a\cdot b)\cdot\dfrac{1}{c} \overset{associativa}{=} a\cdot\left(b\cdot\dfrac{1}{c}\right) := a\cdot\dfrac{b}{c}$ ■

Prova da segunda igualdade: $\quad \dfrac{a\cdot b}{c} := (a\cdot b)\cdot\dfrac{1}{c} \overset{associativa}{=} a\cdot\left(b\cdot\dfrac{1}{c}\right) \overset{comutativa}{=} a\cdot\left(\dfrac{1}{c}\cdot b\right)$
$\overset{associativa}{=} \left(a\cdot\dfrac{1}{c}\right)\cdot b := \dfrac{a}{c}\cdot b$ ■

Propriedade PA 18 $\quad -\dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a} = \dfrac{1}{-a}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Prova da primeira igualdade: $\quad \dfrac{-1}{a} \overset{elemento\ neutro}{=} \dfrac{-1\cdot 1}{a} \overset{\text{PA17}}{=} -1\cdot\dfrac{1}{a} \overset{\text{PA14}}{=} -\dfrac{1}{a}$ ■

Prova da segunda igualdade: pela lei do elemento inverso, $\dfrac{1}{-a}$ é o elemento inverso de $-a$.

Por outro lado, $\quad (-a)\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right) \overset{\text{PA16}}{=} (a)\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right) \overset{elemento\ neutro}{=} 1.$

Logo $\dfrac{1}{-a}$ e $-\dfrac{1}{a}$ são os inversos de $-a$. Como o inverso é único, $\dfrac{1}{-a} = -\dfrac{1}{a}$ ■

Propriedade PA 19 $\quad \dfrac{1}{a\cdot b} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

Prova: Primeiro vamos verificar $\quad (a\cdot b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\right) = 1.$

$(a\cdot b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\right) \overset{\text{AP3}}{=} ab\cdot\left(\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{a}\right) \overset{\text{AP2}}{=} a\cdot\left(b\cdot\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{1}{a} \overset{\text{AP5}}{=} a\cdot(1)\cdot\dfrac{1}{a} \overset{\text{AP4}}{=} a\cdot\dfrac{1}{a} \overset{\text{AP5}}{=} 1.$

Assim, provamos que $\left(\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\right)$ é o elemento inverso de $(a\cdot b)$.

Como o elemento inverso de $(a\cdot b)$ é único e é igual a $\dfrac{1}{(a\cdot b)}$, temos que $\dfrac{1}{a\cdot b} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}$ ■

Propriedade PA 20 $\quad \dfrac{a\cdot b}{c\cdot d} = \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{d}, \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$

Prova: $\quad \dfrac{a\cdot b}{c\cdot d} := (a\cdot b)\cdot\dfrac{1}{c\cdot d} \overset{\text{PA19}}{=} (a\cdot b)\cdot\left(\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{d}\right) \overset{\text{AP2}}{=} a\cdot\left(b\cdot\dfrac{1}{c}\right)\cdot\dfrac{1}{d} \overset{\text{AP3}}{=} a\cdot\left(\dfrac{1}{c}\cdot b\right)\cdot\dfrac{1}{d}$
$\overset{\text{AP2}}{=} \left(a\cdot\dfrac{1}{c}\right)\cdot\left(b\cdot\dfrac{1}{d}\right) := \dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{d}$ ■

Propriedade PA 21 $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$

Prova: exercício.

Atenção: como esta propriedade é muito útil em simplificações, alguns pensam que basta trocar os numeradores com os denominadores e a propriedade continua valendo. Isso não é verdade.

Exercício: dê um contra-exemplo para mostrar que a igualdade $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$ <u>é falsa</u>.

Propriedade PA 22 $-(a+b) = -a-b, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$

Prova: exercício.

Propriedade PA 23 $-\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{-a-b}{c}, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$

Prova: exercício.

Propriedade PA 24 $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \quad a,b \neq 0.$

Prova: exercício.

Propriedade PA 25 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}, \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad b,c,d \neq 0.$

Prova: exercício.

2.4.3 Leis de cancelamento

Propriedade PA 26 ***Leis de cancelamento da soma e do produto (implicações)***

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

i) $a+c = b+c \Longrightarrow a = b$ (é a recíproca da preservação na soma)

ii) $a \cdot c = b \cdot c$ e $c \neq 0 \Longrightarrow a = b$ (<u>não é</u> a recíproca da preservação no produto)

Prova:

i) $a+c = b+c \overset{\text{PA1}}{\Longrightarrow} a+c+(-c) = b+c+(-c) \overset{\text{AS5}}{\Longrightarrow} a+0 = b+0 \overset{\text{AS4}}{\Longrightarrow} a = b$ ■

ii) $a \cdot c = b \cdot c$ e $c \neq 0 \overset{\text{PA1}}{\Longrightarrow} a \cdot c \cdot \dfrac{1}{c} = b \cdot c \cdot \dfrac{1}{c} \overset{\text{AP5}}{\Longrightarrow} a \cdot 1 = b \cdot 1 \overset{\text{AP4}}{\Longrightarrow} a = b$ ■

Observação. Essa propriedade é conhecida como a ″corta corta″, mas é preciso tomar todo o cuidado no produto, só pode cortar se tem certeza que o termo cortado é não nulo e a outra igualdade é verdadeira.

Veja esse exemplo:

$4 \cdot x = 3 \cdot x$, aplicando o ″corta corta″, $4\ \cancel{x} = 3\ \cancel{x}$, concluímos que $4 = 3$. Ué? o que houve?

Resposta: a igualdade $4x = 3x$ é verdadeira apenas quando $x = 0$, isto é, a hipótese da lei do cancelamento ($4 \cdot x = 3 \cdot x$ e $x \neq 0$) é falsa, não podemos aplicar a propriedade.

Lembre sempre
Só podemos aplicar uma propriedade quando
forem verdadeiras as hipóteses da propriedade.

Propriedade PA 27 ***Lei de cancelamento da soma (equivalência)***

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. Vale a seguinte propriedade: $a = b \Longleftrightarrow a+c = b+c$.

Prova: (releia as propriedades PA1 i) e PA26 i))

($\Longrightarrow$) Já está provada, é a propriedade PA1 i).

($\Longleftarrow$) Já está provada, é a propriedade PA26 i).

Observação: **no cancelamento do produto vamos precisar acrescentar** $c \neq 0$ **na hipótese para que seja verdadeira a equivalência.**
Isto é, sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, a seguinte afirmação, $a = b \Longleftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$ **É FALSA**,
É FALSA PORQUE ($\Longleftarrow$) **É FALSA**.

Contra-exemplo:
$a = 10$, $b = 2$, $c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, a hipótese $10 \times 0 = 2 \times 0$ é verdadeira e a tese $10 = 2$ é falsa.

Propriedade PA 28 ***Lei de cancelamento do produto (equivalência)***

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Vale a seguinte propriedade: $a = b \Longleftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$.

Prova: (releia as propriedades PA1 ii) e PA26 ii))

($\Longrightarrow$) Já está provada, é a propriedade PA1 ii).
($\Longleftarrow$) Já está provada, é a propriedade PA26 ii).

2.4.4 Lei do anulamento do produto

Propriedade PA 29 ***Lei do anulamento do produto***

Para $a, b \in \mathbb{R}$ vale a seguinte equivalência: $a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Prova:
($\Longleftarrow$) Por hipótese, $a = 0$ ou $b = 0$. Analisando cada um dos dois casos,
caso $a = 0 \Longrightarrow a \cdot b = 0 \cdot b = 0$
ou caso $b = 0 \Longrightarrow a \cdot b = a \cdot 0 = 0$
($\Longrightarrow$) Pela lógica, dado $a \in \mathbb{R}$, $a = 0$ ou $a \neq 0$. Por hipótese, $a \cdot b = 0$. Assim, temos
$a \cdot b = 0 \Longrightarrow a \cdot b = 0$ e $(a = 0$ ou $a \neq 0) \Longrightarrow (a \cdot b = 0$ e $a = 0)$ ou $(a \cdot b = 0$ e $a \neq 0)$
Analisando cada um dos dois casos,
caso $(a \cdot b = 0$ e $a = 0) \Longrightarrow a = 0$
ou caso $(a \cdot b = 0$ e $a \neq 0) \Longrightarrow \dfrac{1}{a} \cdot a \cdot b = \dfrac{1}{a} \cdot 0 \Longrightarrow 1 \cdot b = 0 \Longrightarrow b = 0$

Propriedade PA 30 *Para* $a, b \in \mathbb{R}$ *vale a seguinte equivalência:* $a \cdot c = b \cdot c \Longleftrightarrow a = b$ ou $c = 0$

Prova: é simples entender que é uma consequência da lei do anulamento.
$a \cdot c = b \cdot c \Longleftrightarrow a \cdot c + (-b \cdot c) = b \cdot c + (-b \cdot c) \Longleftrightarrow a \cdot c - b \cdot c = 0 \Longleftrightarrow (a - b) \cdot c = 0 \overset{\text{PA29}}{\Longleftrightarrow} a - b = 0$ ou $c = 0$
$\Longleftrightarrow a - b + b = 0 + b$ ou $c = 0 \Longleftrightarrow a + 0 = b$ ou $c = 0 \Longleftrightarrow a = b$ ou $c = 0$.

2.4.5 Igualdade de frações

Propriedade PA 31 ***Teste da igualdade de frações.***

Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$ é verdadeira a seguinte equivalência: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Você prestou atenção nas hipóteses $b, d \neq 0$? Sem essas hipóteses não vale a equivalência porque as expressões da igualdade do lado esquerdo não estariam definidas se tivessem denominadores nulos.

Prova: Exercício. Sugestão: use a propriedade PA28.

Propriedade PA 32 ***Simplificações em somas de frações (redução ao mesmo denominador).***

Para $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$, $b, d, p, q \neq 0$, valem as seguintes igualdades:

i) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

ii) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} - \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}$

iii) Quando m=bp=dq, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ap}{bp} + \dfrac{cq}{dq} = \dfrac{ap+cq}{m}$

Provas: Exercício.

Obs. Se $b, d, p, q \in \mathbb{N}$, m será um múltiplo comum de b e d.

2.4.6 Produtos notáveis

Propriedade PA 33 ***Principais produtos notáveis.***

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes igualdades.

i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

iii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

iv) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

v) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

vi) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

vii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

viii) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Prova: exercício. Provar da i) até a viii).

Há um produto notável importante que será estudado mais adiante, é o produto denominado Binômio de Newton. O Binômio de Newton estabelece uma fórmula para $(a+b)^n$.

2.5 Implicações e equivalências em expressões e em equações

Agora temos por objetivo justificar o uso das propriedades algébricas para simplificar expressões e equações.

Primeiro vamos precisar responder às seguintes perguntas:

2.5.1 O que é uma expressão? o que é uma equação? o que é uma solução de equação?

A palavra expressão em matemática é usada quando conectamos elementos de um conjunto por operações entre esses elementos. Exemplos de expressões são:

(a) $2 \times (4-\pi)$; (b) $\dfrac{3}{2 \times 4^2 - 26 - 6}$; (c) $4 + \log_{10} 3$; (d) $\dfrac{3}{2 \times x^2 - 32}; x \in \mathbb{R}$ (e) $m + \log_{10} n; m, n \in \mathbb{Q}$.

No exemplo (a) podemos avaliar a expresssão, o resultado é um número real bem definido. No exemplo (c) podemos avaliar a expressão, o logarítmo de um número na base 10 pode ser avaliado em qualquer número positivo, o resultado será um número real. Já no exemplo (b) não é possível avaliar a expressão porque para avaliar a expressão o denominador tem que ser não nulo, isto é o resultado da expressão não está definido.

Quando são colocadas letras na expressão, as letras são chamadas de variáveis ou constantes e sempre é preciso ficar claro em que conjunto universo podemos escolher elementos para substituir no lugar da(s) letra(s) para avaliar a expressão, ou seja encontrar um resultado bem conhecido para a expressão. A letra é chamada de variável quando podemos escolher mais que um elemento do conjunto universo para substituir no lugar da letra e é chamada constante quando podemos atribuir apenas um elemento.

Uma ***expressão algébrica na variável*** $x \in U$**,** que podemos denotar por $E(x)$ ou por qualquer letra no lugar de E, é uma expressão em que aparecem uma ou mais das seguintes operações algébricas: soma, produto, subtração, divisão, potenciação ou radiciação entre valores de um conjunto e a variável x.

Exemplos de expressões algébricas em $x \in \mathbb{R}$:

$E(x) = 4x^2 + 2x - 1 + \dfrac{x}{x - \dfrac{1}{x-2}}$; $F(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x-1}$.

Denominamos ***domínio de definição da expressão*** ou simplesmente ***domínio da expressão***, o maior subconjunto do conjunto universo U em que a expressão está bem definida, ou seja, em que é possível avaliar a expressão.

Numa expressão $E(x)$ podem aparecer várias expressões, neste caso o domínio da expressão $E(x)$ é a interseção dos domínios de cada expressão contida em $E(x)$.

Chamamos de restrições de $E(x)$ as condições que devem ser satifeitas para que as expressões que aparecem em $E(x)$ sejam bem definidas.

No exemplo $E(x)$ acima, as restrições sâo: $x-2\neq 0$ e $x-\dfrac{1}{x-2}\neq 0$.

Para encontrar os valores possíveis de x, precisamos aplicar propriedades algébricas e resolver equações, falaremos sobre isso na próxima seção.

No exemplo $F(x)$ acima, as restrições sâo: $x\geq 0$ e $x-1\geq 0$.

Ainda não fizemos a revisão da operação algébrica radiciação, será feita mais adiante. Para encontrar os valores possíveis de x, teremos que aplicar propriedades de ordem e resolver inequações, que serão vistas nas próximas seções.

Existem expressões em x que não são expressões algébricas.

Exemplo de expressões não algébricas em x: $E(x)=2\,\mathrm{sen}\,(x)+4\cos(2x)$; $E(x)=3\log_{10}(2x)+3\log_2(3x)$.

As expressões trigonométricas e logarítmicas serão revisadas com detalhes em Matemática Básica I.

Uma ***equação em*** x é uma igualdade entre duas expressões distintas $E(x)$ e $F(x)$ definidas em U, ou seja

$$E(x)=F(x),\quad x\in U$$

.

O domínio da equação é a interseção dos domínios de $E(x)$ e $F(x)$.

Dado um valor fixo ou constante a diz-se que $x=a$ é uma ***solução da equação*** $E(x)=F(x)$, ou simplesmente a é uma solução da equação $E(x)=F(x)$ se substituirmos x pelo valor fixo a em $E(x)$ e em $F(x)$, os resultados forem iguais.

Exemplo: na equação $4x^3-10x=12+6x,\ \ x\in\mathbb{R}$, temos que $E(x)=4x^3-10x$ e $F(x)=12+6x$.

Para $x=-1$ avaliamos:
$E(-1)=4(-1)^3-10(-1)=4(-1)+10=-4+10=6$ e $F(-1)=12+6(-1)=12-6=6$.
Resultados iguais implica que $x=-1$ é solução da equação.

Para $x=1$ avaliamos:
$E(1)=4(1)^3-10(1)=4-10=6$ e $F(1)=12+6(1)=12+6=18$.
Como os resultados são diferentes, $x=-1$ não é solução da equação.

2.5.2 O que são expressões equivalentes?

Diz-se que duas **expressões são iguais ou equivalentes em x $\in$ A** quando para todo $x\in A$, se subtituirmos o valor x nas duas expressões, os resultados obtidos nas duas expressões são iguais.

Quando transformamos uma expressão $E(x)$ em outra expresssão através da aplicação sucessiva de propriedades algébricas sobre os termos constantes e sobre o termo variável x da expressão $E(x)$, obtemos uma nova expressão $F(x)$ na variável x.

Alguns casos de aplicação de propriedades das operações algébricas em que obtemos expressões equivalentes:

- Se somarmos e subtrairmos uma mesma expressão $G(x)$ a qualquer expressão $H(x)$ que faça parte da expressão original $E(x)$ então será obtida uma nova expressão igual ou equivalente à original.

  Justificativa

  Sendo $H(x)$ uma expressão que faz parte da expressão original $E(x)$.

  Somando e subtraindo uma expressão $G(x)$ a H(x), obtemos $H(x)+G(x)-G(x)=H(x)+0=H(x)$.

Assim não alteramos a expressão $H(x)$, consequentemente não alteramos a expressão $E(x)$.

Exemplo 1 $\quad E(x) = 4x^2 + 8x - 1$ e vamos somar e subtrair 4 a $E(x)$.

$F(x) = E(x) + 4 - 4 = 4x^2 + 8x - 1 + 4 - 4 = 4x^2 + 8x + 4 - 1 - 4 = = 4(x^2 + 2x + 1) - 5 = 4(x+1)^2 - 5.$

Assim, as expressões $E(x) = 4x^2 + 8x - 1$ e $F(x) = 4(x+1)^2 - 5$ são iguais ou equivalentes.

Exemplo 2 $\quad E(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ e vamos somar e subtrair 1 a $x - 2$.

$$F(x) = \frac{x-2+1-1}{x-1} = \frac{x-1-2+1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1}.$$

Assim, as expressões $E(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ e $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$ são iguais ou equivalentes.

Exemplo 3 $\quad E(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ e vamos somar e subtrair x a $x^2 + 1$.

$$F(x) = \frac{x^2+x-x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Assim, as expressões $E(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$ e $F(x) = 1 - \dfrac{x}{x^2+x+1}$ são iguais ou equivalentes.

- Se multiplicarmos e dividirmos uma mesma expressão $G(x)$ não nula em $x \in A$ por qualquer expressão $H(x)$ que faça parte da expressão original $E(x)$ então será obtida uma nova expressão igual ou equivalente à expressão original em $x \in A$.

  Justificativa

  Se $H(x)$ é uma expressão que faz parte da expressão original $E(x)$.

  Multiplicando e dividindo $H(x)$ por uma expressão $G(x)$, onde x é tal que $G(x) \neq 0$, obtemos:

  $H(x) \cdot \dfrac{G(x)}{G(x)} = H(x) \cdot 1 = H(x), \quad$ onde x é tal que $G(x) \neq 0$

  Assim não alteramos a expressão $H(x)$, consequentemente não alteramos a expressão $E(x)$ para x tal que $G(x) \neq 0$.

  Exemplo $\quad E(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, vamos multiplicar e dividir por $(\sqrt{x} - 1)$, para $x \neq 1$.

  $$F(x) = \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{\left((\sqrt{x})^2 - 1^2\right)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)} = \sqrt{x} - 1 \quad \text{para} \quad x \neq 1.$$

  Assim, as expressões $E(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ e $F(x) = \sqrt{x} - 1$ são iguais ou equivalentes para $x \neq 1$.

Vale a pena observar que algumas operações algébricas aplicadas sobre uma expressão, não conduzem a uma nova expressão igual ou equivalente à expressão original, isto é, conduzem a uma nova expressão que não é equivalente à expressão original.

- Somar a mesma expressão ao numerador e ao denominador de uma expressão não conduz a uma expressão equivalente.

  Exercício 1: Verifique que $\dfrac{x+a}{x-a} \neq \dfrac{x+a+a}{x-a+a}, \quad \forall a \neq 0.$

  Exercício 2: Sejam $P(x), Q(x), H(x)$ expressões em x tais que $H(x) \neq 0$ e $Q(x) + H(x) \neq 0$.

  Prove que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)+H(x)}{Q(x)+H(x)} \Longleftrightarrow P(x) = Q(x).$

- Elevar uma expressão ao quadrado não conduz a uma expressão equivalente.

  Exercício: Verifique que $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ e $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ não são equivalentes.

2.5.3 O que são equações equivalentes?

Considere duas equações em $x \in A$, $F(x) = G(x)$ e $K(x) = L(x)$.

Essas equações são ditas equivalentes em $x \in A$ quando

$x \in A$ é solução de $F(x) = G(x) \iff x \in A$ é solução de $L(x) = K(x)$.

Isto significa que:
$x \in A$ é solução de $F(x) = G(x) \implies x \in A$ é solução de $L(x) = K(x)$
e
$x \in A$ é solução de $L(x) = K(x) \implies x \in A$ é solução de $F(x) = G(x)$

2.5.4 Simplificar expressões é o mesmo que simplificar equações?

A resposta é não.

Simplificar uma expressão $E(x),\ x \in A$ significa aplicar sucessivamente propriedades algébricas sobre a expressão $E(x),\ x \in A$ para obter uma nova expressão $F(x),\ x \in A$ igual ou equivalente à expressão original $E(x),\ x \in A$.

Simplificar uma equação $E(x) = F(x),\ x \in A$ significa aplicar sucessivamente propriedades algébricas sobre as expressôes $E(x)$ e $F(x),\ x \in A$ para obter uma nova equação $K(x) = L(x),\ x \in A$.

Observações importantes sobre simplificação de equação:

- As expressões $K(x)$ e $L(x)$ obtidas da simplificação da equação $E(x) = F(x)$ não são equivalentes às respectivas expressões $E(x)$ e $F(x)$.

  Exemplo

  $F(x) = 4x^2$ e $G(x) = 8x - 4$ na equação original $4x^2 = 8x - 4$.

  Podemos aplicar a propriedades de cancelamento da soma $a = b \iff a+c = b+c$ e da multiplicação para $c \neq 0$, temos $a = b \iff a \cdot c = b \cdot c$. E também a propriedade $a^2 = 0 \iff a = 0$ (não foi dada, prove).

  Aplicando as propriedades para simplificar,

  $$4x^2 = 8x - 4 \overset{+(-8x+4)}{\iff} 4x^2 + (-8x+4) = 8x - 4 + (-8x+4) \iff 4x^2 - 8x + 4 = 0 \iff 4(x^2 - 2x + 1) = 0$$
  $$\overset{\div 4 \neq 0}{\iff} \frac{4}{4}(x^2 - 2x + 1) = \frac{0}{4} \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

  Assim na simplificação obtivemos como última equação $x = 1$, isto é, temos $K(x) = x$ e $L(x) = 1$.

  $F(x) = 4x^2$ e $K(x) = x$ não são equivalentes.

  $G(x) = 8x - 4$ e $L(x) = 1$ não são equivalentes.

- Porque as soluções da última equação simplificada são as únicas candidatas a soluções da primeira equação?

  Isso é uma questão de lógica.

  Ao resolver equações, nas simplificações estaremos usando propriedades. É muito comum escrevermos uma equação embaixo da outra, sem explicitar se a propriedade usada na simplificação é uma propriedade de equivalência ou se é uma propriedade só de implicação, isto é, não vale a recíproca da simplificação.

  Veja, tanto nas propriedades de equivalência quanto nas propriedades de implicação usadas nas simplificações, temos:

  $x \in A$ é solução da equação $E(x) = F(x) \implies x \in A$ é solução da equação $K(x) = L(x)$.

  Sabemos que $p \implies q$ é o mesmo que $\sim q \implies \sim p$.

  Aplicando essa propriedade de lógica, temos que:

  $x \in A$ não é solução da equação $K(x) = L(x) \implies x \in A$ não é solução da equação $F(x) = G(x)$.

  Isto é, para ser solução da equação original $F(x) = G(x)$ é necessário ser solução da equação simplificada $K(x) = L(x)$.

- Quando podemos afirmar que todas as soluções da última equação simplificada são exatamente as soluções da equação original?

  Resposta: quando todas as propriedades usadas nas simplificações foram propriedades de equivalência, garantimos que as soluções da última equação são todas as soluções da primeira equação.

  Exemplo

  No exemplo anterior, todas as simplificações foram de equivalência. Logo, como a única solução da última equação é $x = 1$ então a única solução da equação original $4x^2 = 8x - 4$ será $x = 1$.

- Quando é preciso testar se as soluções da última equação simplificada são exatamente as soluções da primeira equação?

  Resposta: Quando nas simplificações foi usada pelo menos uma propriedade em que só vale a implicação, isto é, não vale a recíproca da propriedade usada.

  Exemplo: Queremos resolver a equação $\sqrt{x} = 6 - x$.

  Para resolver, vamos usar a propriedade $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$. Exercício: prove que a recíproca é falsa, isto é, $a^2 = b^2 \not\Longrightarrow a = b$.

  $\sqrt{x} = 6 - x \Longrightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \Longleftrightarrow x = 36 - 12x + x^2 \Longleftrightarrow x^2 - 12x + 36 - x = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$
  $\Longleftrightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} \Longleftrightarrow x = \dfrac{13 \pm 5}{2} \Longleftrightarrow x = 9 \;\text{ ou }\; x = 4.$

  Testando as soluções na equação original,

  Para $x = 4$, temos $\sqrt{4} = 2$ e $6 - 4 = 2$. Logo a equação $\sqrt{x} = 6 - x$ é verdadeira para $x = 4$.

  Para $x = 9$, temos $\sqrt{9} = 3$ e $6 - 9 = -3$. Logo a equação $\sqrt{x} = 6 - x$ é falsa para $x = 9$.

  Assim, a única solução é $x = 4$.

Lembre sempre

Para resolver equações é preciso saber bem

as propriedades algébricas.

2.6 Axiomas e propriedades de ordem

2.6.1 Axiomas de ordem

Os seguintes axiomas (ou propriedades) são aceitos, sem demonstração.

Axioma da ordem 1. Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira:

(i) a é positivo (ii) $a = 0$ (iii) $-a$ é positivo

Conhecido como "propriedade de tricotomia da ordem".

Quando $-a$ é positivo, diz-se que a é negativo.

Axioma da ordem 2. Dados $a,\ b \in \mathbb{R}$ vale as afirmação:

a é positivo e b é positivo $\Longrightarrow$ $a + b$ é positivo e $a \cdot b$ é positivo.

Conhecido como " propriedade de fechamento da ordem ", na soma e no produto.

Consequência imediata dos axiomas: 1 é positivo e -1 é negativo.

Prova: sabemos que $1 \neq 0$ porque 0 é o único elemento neutro da soma e 1 é o único elemento neutro do produto, logo pelo axioma 1, temos dois casos excludentes:

caso (i) 1 é positivo.

caso (iii) -1 é positivo.

Neste caso, pelo axioma 2, concluímos que $(-1)(-1)$ é positivo. (*)

Por outro lado, por propriedades algébricas, sabemos que $(-1)(-1) = (1)(1) = 1$ (**).

Por (*) e (**), concluímos que o número 1 é positivo.

Essa conclusão contradiz o axioma 1, pois não é possivel as duas afirmações serem verdadeiras simultaneamente: -1 é positivo e 1 é positivo.

Logo, não é possível supor -1 positivo. Só restou o caso (i) 1 é positivo.

Nessa prova vimos que -1 não é positivo.
Como sabemos que $-1 \neq 0$, só resta a possibilidade $-(-1)$ é positivo, isto é, -1 é negativo.

Definição. Ordenação dos números reais. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$,

Diz-se que a *é maior do que* b se $a - b$ é positivo e denota-se por $a > b$.

Diz-se que a *é menor do que* b se $b - a$ é positivo e denota-se por $a < b$.

Consequência da definição: caso particular, $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$:

Diz-se que a *é maior do que* 0 se $a - 0 = a$ é positivo, isto é, se a é positivo e denota-se por $a > 0$.

Diz-se que a *é menor do que* 0 se $0 - a = -a$ é positivo, isto é, se a é negativo e denota-se por $a < 0$.

2.6.2 Propriedades de ordem

A partir dos axiomas da ordem, prova-se outras propriedades de ordem. Aqui estão listadas algumas delas. Outras, que não estão listadas, podem ser demonstradas a partir dos axiomas e das propriedades listadas aqui. Só veremos a demonstrações de algumas delas, as outras o aluno curioso pode ver no texto ″Notas de aula″ da disciplina Matemática Basica oferecida para os alunos do Curso de Matemática.

Propriedade PO 1 Dado $a \in \mathbb{R}$, uma e só uma das três possibilidades é verdadeira:

(i) $a > 0$ (ii) $a = 0$ (iii) $a < 0$

Também é conhecida por ″tricotomia da ordem″.

Propriedade PO 2 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$.

Conhecida como ″propriedade de monotonicidade da adição″ ou ″lei de preservação da ordem na adição″.

Prova: $a < b \overset{\textit{menor do que}}{\Longrightarrow} b - a > 0 \Longrightarrow b - a + 0 > 0 \Longrightarrow b - a + c + (-c) > 0 \Longrightarrow b + c - a - c > 0$
$\Longrightarrow b + c - (a + c) > 0 \Longrightarrow b + c > a + c \Longrightarrow a + c < b + c$. ■

Propriedade PO 3 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

Conhecida como ″propriedade de monotonicidade do produto″ ou ″lei de preservação da ordem no produto″.

Prova: $a < b$ e $c > 0 \Longrightarrow b > a$ e $c > 0 \Longrightarrow b - a > 0$ e $c > 0 \overset{\text{axioma 2}}{\Longrightarrow} (b - a) \cdot c > 0$
$bc - ac > 0 \Longrightarrow bc > ac \Longrightarrow ac < bc$. ■

Propriedade PO 4 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c < 0$, vale a implicação: $a < b \Longrightarrow a \cdot c > b \cdot c$.

Conhecida como ″lei de inversão da ordem no produto″.

Prova: $a < b$ e $c < 0 \overset{\text{menor do que}}{\Longrightarrow} b - a > 0$ e $0 - c > 0 \Longrightarrow b - a > 0$ e $-c > 0 \overset{\text{axioma 2}}{\Longrightarrow} (b - a) \cdot (-c) > 0$
$b \cdot (-c) - a \cdot (-c) > 0 \Longrightarrow -bc + ac > 0 \Longrightarrow ac - bc > 0 \overset{\text{maior do que}}{\Longrightarrow} ac > bc$. ■

Propriedade PO 5 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < b$ e $b < c \Longrightarrow a < c$.

Conhecida como ″propriedade transitiva da ordem″.

Prova: $a < b$ e $b < c \Longrightarrow b - a > 0$ e $c - b > 0 \overset{\text{axioma 2}}{\Longrightarrow} b - a + c - b > 0 \Longrightarrow c - a + b - b > 0$
$c - a + 0 > 0 \Longrightarrow c - a > 0 \Longrightarrow c > a \Longrightarrow a < c$. ■

Propriedade PO 6 (outra tricotomia). Dados $a, b \in \mathbb{R}$, uma e só uma das possibilidades é verdadeira:

(i) $a < b$ (ii) $a = b$ (iii) $a > b$

Prova: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, podemos calcular $b - a$.

Aplicando a propriedade PO 1 (segunda tricotomia) em $a - b$, temos 3 casos distintos:
(i) $a - b < 0$ (ii) $a - b = 0$ (iii) $a - b > 0$
Mas, aplicando as definições de maior do que e menor do que, a cada um deles, temos respectivamente:
(i) $a < b$ (ii) $a = b$ (iii) $a > b$ ∎

Propriedade PO 7 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$.

Prova: Vamos separar em ida ($\Longrightarrow$) e volta ($\Longleftarrow$).
($\Longrightarrow$) É a própria PO 2.
($\Longleftarrow$) $a + c < b + c \overset{\text{PO 2}}{\Longrightarrow} a + c + (-c) < b + c + (-c) \Longrightarrow a + 0 < b + 0 \Longrightarrow a < b$. ∎

Propriedade PO 8 Dado $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, valem as equivalências:

(i) $a > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$ (ii) $a < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$

Propriedade PO 9 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow ac < bc$.
Prova: Vamos separar em ida ($\Longrightarrow$) e volta ($\Longleftarrow$).
($\Longrightarrow$) É a própria PO 3.
($\Longleftarrow$) $ac < bc$ e $c > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} ac < bc$ e $\dfrac{1}{c} > 0 \overset{\text{PO 3}}{\Longrightarrow} ac\dfrac{1}{c} < bc\dfrac{1}{c} \Longrightarrow a \cdot 1 < b \cdot 1 \Longrightarrow a < b$. ∎

Propriedade PO 10 Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c < 0$, vale a equivalência: $a < b \Longleftrightarrow ac > bc$.

Prova: Exercício.

Propriedade PO 11 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:

(i) $a < 0 \Longleftrightarrow -a > 0$ (ii) $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$ (iii) $a < b \Longleftrightarrow -a > -b$ (iv) $a > b \Longleftrightarrow -a < -b$.

Propriedade PO 12 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as equivalências:

(i) $ab > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b < 0)$

(ii) $ab < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ e } b < 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b > 0)$

Provas: Vamos provar (i). Exercício: provar (ii)
(i) ($\Longleftarrow$) Hipótese: $(a > 0 \text{ e } b > 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b < 0)$
Analisando cada um dos dois casos,
<u>Caso 1</u> $(a > 0 \text{ e } b > 0) \overset{\text{axioma2}}{\Longrightarrow} a \cdot b > 0$.
<u>Caso 2</u> $(a < 0 \text{ e } b < 0) \overset{\text{PO 11}}{\Longrightarrow} -a > 0$ e $-b > 0 \overset{\text{axioma2}}{\Longrightarrow} (-a)(-b) > 0 \Longrightarrow a \cdot b > 0$.

($\Longrightarrow$) Hipótese: $ab > 0$.
Pela tricotomia da ordem, sabemos que $a = 0$ ou $a < 0$ ou $a > 0$.
Analisando cada um deles,
<u>Caso 1</u> $a = 0 \Longrightarrow ab = 0 \cdot b = 0$. Logo o caso $a = 0$ e $ab > 0$ é falso.
<u>Caso 2</u> $a > 0$ e $ab > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} > 0$ e $ab > 0 \overset{\text{PO 3}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} \cdot ab > \dfrac{1}{a} \cdot 0 \Longrightarrow 1 \cdot b > 0 \Longrightarrow b > 0$.
Logo, nesse caso, $a > 0$ e $b > 0$.
<u>Caso 3</u> $a < 0$ e $ab > 0 \overset{\text{PO 8}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} < 0$ e $ab > 0 \overset{\text{PO 4}}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{a} \cdot ab < \dfrac{1}{a} \cdot 0 \Longrightarrow 1 \cdot b < 0 \Longrightarrow b < 0$.
Logo, nesse caso, $a < 0$ e $b < 0$. ∎

Propriedade PO 13 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.

Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$ temos que $a^2 > 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: use $a^2 = a \cdot a$ e o axioma 2.

Propriedade PO 14 Dado $a \in \mathbb{R}$, não vale a recíproca da propriedade anterior, isto é, $a^2 > 0 \not\Longrightarrow a > 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: apresente um contra-exemplo.

Propriedade PO 15 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a implicação: $a < 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.

Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a < 0$ temos que $a^2 > 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: use $a^2 = a \cdot a = (-a)(-a) = (-a)^2$, a propriedade PO11 e o axioma 2.

Propriedade PO 16 Dado $a \in \mathbb{R}$, vale a equivalência: $a \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 > 0$.

Outra forma de escrever essa propriedade é: para todo $a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ se e só se $a^2 > 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: para $a \neq 0$ separe nos dois casos possíveis e excludentes, $a > 0$ e $a < 0$.

Propriedade PO 17 Dado $a \in \mathbb{R}$, valem as equivalências: (i) $a > 0 \Longleftrightarrow a^3 > 0$ (ii) $a < 0 \Longleftrightarrow a^3 < 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: use $a^3 = a^2 \cdot a$, axiomas e propriedades anteriores.

2.6.3 Podemos trocar $'' < ''$ por $'' \leq ''$ e $'' > ''$ por $'' \geq ''$?

A resposta é SIM, em todos os axiomas e propriedades podemos trocar.

Mas é preciso entender o que isso significa. Lembre que $a \leq b$ significa $a = b$ ou $a < b$, são casos excludentes.

Quando escrevemos $a \leq b \Longrightarrow c \leq d$ significa que:
$a = b \Longrightarrow c \leq d \Longrightarrow c = d$ ou $c < d$. Isto é, $a = b \Longrightarrow c = d$ ou $c < d$ (ou exclusivo)
ou (exclusivo)
$a < b \Longrightarrow c \leq d \Longrightarrow c = d$ ou $c < d$. Isto é, $a < b \Longrightarrow c = d$ ou $c < d$ (ou exclusivo)

Ou ainda, $a \leq b \Longrightarrow c = d$ ou $c < d$ (ou exclusivo)

Exemplo. Vamos verificar que a seguinte afirmação é verdadeira $x \leq 2 \Longrightarrow x \leq 3$.
Prova: $x \leq 2 \Longrightarrow x = 2$ ou $x < 2 \Longrightarrow (x = 2$ ou $x < 2)$ e $2 < 3 \Longrightarrow (x = 2$ e $2 < 3)$ ou $(x < 2$ e $2 < 3)$ $\Longrightarrow (x < 3)$ ou $(x < 3) \Longrightarrow x < 3 \Longrightarrow x \leq 3$.

Propriedade PO 18 Vale a seguinte implicação: $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow a^2 \geq 0$.

Prova: Exercício. Sugestão: para $x \in \mathbb{R}$ considere os 2 casos possíveis e excludentes $x = 0$ e $x \neq 0$ e use propriedades anteriores.

Preste atenção para a grande importância dessa propriedade.

Como é uma implicação, podemos afirmar: para todo número real, o seu quadrado é positivo ou nulo. Ou dito de outra forma, o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo.

Podemos pensar em um outro conjunto que satisfaça todas as propriedades algébricas apresentadas até aqui, mas que não satisfaça essa propriedade, isto é, um conjunto onde o seu quadrado pode ser um número negativo.

É justamente pensando nisso que historicamente surgiram os números complexos. Isto é, existem outros números que não são os reais, cujo quadrado é um número negativo. Estudaremos os números complexos no final desse período.

2.7 Representação geométrica dos reais

Quando há uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos A e B, de forma que a todo elemento de A corresponde um e só um elemento de B e a todo elemento de B corresponde um e só um elemento de A, diz-se que há uma ***correspondência um a um*** entre A e B ou há uma ***correspondência biunívoca*** entre A e B.

Há uma importante propriedade que diz que a todo ponto da reta corresponde um e só um número real e a todo número real corresponde um e só um ponto da reta, isto é, existe uma correspondência um a um ou biunívoca entre os pontos da reta e os números reais. A prova dessa propriedade requer conceitos vistos apenas em um curso mais avançado de Matemática. Os números reais são representados nos pontos de uma semireta especial descrita na próxima seção.

2.7.1 A reta numérica ou reta orientada

Os números reais são marcadas sobre uma semireta denominada ***reta numérica*** ou ***reta orientada*** da seguinte forma:

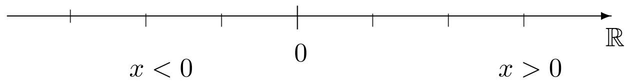
- escolhe-se um ponto para representar o número 0;
- escolhe-se um ponto à direita do ponto que representa o número 0 para representar o número 1;
- a unidade de medida é a distância entre os pontos que representam os números 0 e 1;
- se $b > a$, o ponto que representa o número b está situado à direita do ponto que representa o número a e dista $b - a$ unidades do ponto que representa o número a; ou, escrito de outra forma, o ponto que representa o número a está situado à esquerda do ponto que representa o número b e dista $b - a$ unidades do ponto que representa o número b.

Observe que:

- se $x > 0$ então o ponto que representa x está situado à direita do ponto que representa o número 0 e dista $x - 0 = x$ unidades do ponto que representa o número 0;

- se $x < 0$ então o ponto que representa x está situado à esquerda do ponto que representa o número 0 e dista $0 - x = -x$ unidades do ponto que representa o número 0.

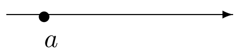
- como existe uma correspondência um a um entre pontos da reta e números reais é usual nos referirmos a ponto x da reta ou número x da reta, ou seja, não será feita distinção entre ponto ou número da reta numérica.



2.7.2 Intervalos

Intervalos são subconjuntos especiais dos números reais e há uma correpondência um a um com subconjuntos de pontos da reta numérica. A seguir listamos os intervalos com suas correspondências em três formas distintas, símbólica, descrição usando-se a notação de conjunto e símbolos de maior ou menor ou igual e represetação geométrica. Também listamos a classificação de cada um deles.

Considere $a,\ b \in \mathbb{R},\ \ a \neq b,$ onde a e b são constantes.

Símbolo	Descrição	Representação geométrica	Classificação
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$		*aberto e limitado*
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$		*fechado e limitado*
$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$		*limitado (nem aberto, nem fechado)*
$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$		*limitado (nem aberto, nem fechado)*
(a,∞)	$\{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$		*aberto e ilimitado*
$(-\infty,b)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$		*aberto e ilimitado*
$[a,\infty)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$		*fechado e ilimitado*
$(-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$		*fechado e ilimitado*
$(-\infty,\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\}$		*aberto, fechado e ilimitado*
$[a,a]$	$\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq a\} = \{a\}$		*fechado e limitado (degenerado, reduzido a ponto)*

2.7.3 Análise de sinal de expressões

Analisar o sinal de uma expressão $E(x)$ significa:

1. Encontrar todos os números reais, isto é, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que é possível calcular $E(x)$.

   Nesse caso os possíveis valores de x formam um conjunto, é o domínio da expressão.

   Dependendo da expressão, esse conjunto é um intervalo ou uma união de intervalos disjuntos (intervalos disjuntos são intervalos que não têm nenhum ponto em comum).

2. Encontrar todos os números reais, isto é, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $E(x) = 0$.

   Dependendo da expressão, esse conjunto é o conjunto vazio ou um conjunto de pontos isolados.

3. Encontrar todos os números reais, isto é, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $E(x) > 0$.

   Dependendo da expressão, esse conjunto é o conjunto vazio ou um intervalo ou uma união de intervalos disjuntos.

4. Encontrar todos os números reais, isto é, todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $E(x) > 0$.

   Dependendo da expressão, esse conjunto é o conjunto vazio ou um intervalo ou uma união de intervalos disjuntos.

Visualização da análise de sinal

Suponha que o resultado da análise de sinal de uma expressão $E(x)$, é o seguinte:

1. O domínio é o conjunto $(-\infty, a) \cup [b, c]$, onde $a < b < c$.
2. $E(x) = 0$ para os seguintes valores de x : $x_1,\ x_2,\ b,\ x_3$, onde $x_1 < x_2 < a$ e $b < x_3 < c$.
3. $E(x) > 0$ para para os valores de x tais que $x < x_1$ ou $x_2 < x < a$ ou $b < x < x_3$.
4. $E(x) > 0$ para para os valores de x tais que $x_1 < x < x_2$ ou $x_3 < x \leq c$.

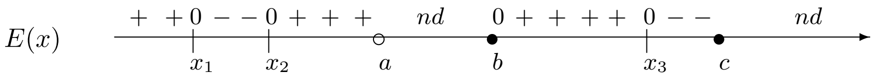
A **visualização da análise de sinal na reta numérica** pode ser feita da seguinte forma:

Primeiro identificamos o domínio: marcamos na reta numerica os extremos dos intevalos do domínio da expressão, onde os extremos que fazem parte do domínio são marcados com ″bola cheia″ e os que não fazem parte do domínio são marcados com ″bola vazia″. A seguir, marcamos com a sigla ″nd″ (significa não definido) os pontos que não fazem parte do domínio.

Depois identificamos os sinais: primeiro marcamos os pontos onde a expressão se anula escrevendo cada ponto e o número 0 logo acima desse pontos. Por último escrevemos sinais ″+″ nos intervalos onde a expressão é positiva e escrevemos sinais ″−″ nos intervalos onde a expressão é negativa.

Se estivermos analisando mais de uma expressão, vamos precisar de uma reta para cada expressão, nesse caso, é bom escrever a expressão ao lado da reta em que está representada a análise de sinal.

A seguir está representada a análise de sinal na reta numérica correspondente ao resultado da análise de sinal, descrito acima.



A **visualização da análise de sinal em tabela** pode ser feita da seguinte forma:

Na primeira linha estarão representados os seguintes valores de x, os extremos dos intervalos do domínio e os pontos onde a expressão se anula, escrevemos também cada intervalo entre esses pontos, ver abaixo. Na segunda linha escrevemos a análise de sinal marcando nd, 0, + e −, na mesma coluna dos correspondentes valores escritos na primeira linha.

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < a$	a	$a < x < b$	b	$b < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < c$	c	$x > c$
$E(x)$	+	0	−	0	+	nd	nd	0	+	0	−	−	nd

OBS. Não há como dizer o que é mais simples, usar a reta numérica ou a tabela para analisar o sinal, isso depende de cada expressão que estamos analisando.

A seguir vamos ver um exemplo onde vamos usar apenas a tabela, nesse caso é mais simples.

Exemplo Suponha que queremos analisar o sinal de $E(x) = \dfrac{A(x)B(x)}{C(x)D(x)}$. Suponha também que já conhecemos a análise de sinal de cada uma das expressões que aparecem no numerador e no denominador de $E(x)$.

Podemos analisar o sinal de cada expressão e aplicar a propriedade PO12 para analisar o sinal do produto ou quociente de duas expressões. É fácil entender que quando temos o produto ou quociente de várias expressões, se for par o número de expressões negativas, o resultado é positivo e se for ímpar o resultado é negativo.

Como na expressão dada temos o produto ou quociente com quatro termos, fica menos trabalhoso se fizermos a análise de sinal em uma única tabela, com a análise de sinal de cada expressão em uma linha, no final colocamos a expressão $E(x)$ e aplicamos a regra do produto de termos positivos e negativos.

Temos que ter o cuidado de colocar os valores de x na primeira linha de forma que apareçam os extremos dos intervalos do domínio de cada expressão e os valores de x onde cada expressão se anula, e esses valores devem estar ordenados.

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	x_4	$x_4 < x < x_5$	x_5	$x > x_5$
$A(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$B(x)$	nd	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$C(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$D(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$E(x)$	nd	nd	$-$	nd	$+$	0	$-$	0	$+$	nd	$-$

2.8 Implicações e equivalências em inequações

Da mesma forma que observamos no item 2.4, vamos responder algumas perguntas.

2.8.1 O que é uma desigualdade? O que é uma inequação?

Dados dois números $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que $a = b$ ou $a \neq b$. Como $a \neq b$ significa que $a > b$ ou $a < b$, nos dois casos, diz-se que há uma *desigualdade entre* a e b.

Considere $A \in \mathbb{R}$.
Uma inequação em $x \in A$ é uma desigualdade entre duas expressões $E(x)$ e $F(x)$ definidas em $x \in A$.

Assim, $E(x) < F(x), \quad x \in A$ e $E(x) > F(x), \quad x \in A$ são inequações em $x \in A$.

Observamos que $E(x) \leq F(x), \quad x \in A$ é na verdade uma forma de escrever uma equação e inequação simultaneamente, mas é usual nos referimos apenas como inequação. Idem para $E(x) \geq F(x), \quad x \in A$.

Exemplo de inequação algébrica: $\dfrac{1}{x-1} > 4 - \dfrac{2-x}{x-4}, \quad x \in A = \{x \in \mathbb{R};\ \ x \neq 1, \ \ x \neq 4\}$.

Exemplo de inequação não algébrica: $1 - \operatorname{sen}^2(2x - 3\pi) < \cos^2(2x), \quad x \in A = \mathbb{R}$.

2.8.2 O que é uma solução de inequação?

Um valor fixo a ***é uma solução de uma inequação em*** **x** se ao atribuírmos o valor fixo a à variável x, a desigualdade da inequação é verdadeira.

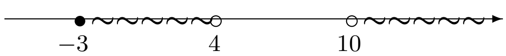
A solução de uma inequação é o conjunto de todas as soluções da inequação.

A solução de uma inequação é um subconjunto dos números reais, que pode ser o próprio conjunto dos reais, um subconjunto próprio e não vazio dos reais ou o conjunto vazio.

2.8.3 Como representar as soluções de uma inequação?

A solução pode ser apresentada como um único intervalo ou como uma união de dois ou mais intervalos disjuntos.

- Usar as notações de maior, igual ou menor, por exemplo, $\{x \in \mathbb{R};\ \ -3 \leq x < 4 \ \text{ ou } \ x > 10\}$.
- Usar os símbolos de intervalos, por exemplo, $[-3, 4) \cup (10, \infty)$.
- Representar na reta numérica, por exemplo,



2.8.4 Podemos simplificar inequações exatamente da mesma forma que simplificamos equações?

A resposta é não. Motivo: as propriedades das equações e das inequações nem sempre são as mesmas.

Exemplo: Resolver a equação $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x+4}{x}$ e a inequação $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{x+4}{x}$.

Para resolver a equação, vamos usar a propriedade: para $c, d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.
Assim, para $x \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$, temos que

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x+4}{x} \iff$$

$$x^2 = (x-2)(x+4) \iff$$

$$x^2 = x^2 - 2x + 4x - 8 \iff$$

$$0 = 2x - 8 \iff 8 = 2x \iff 4 = x$$

Solução da equação: $x = 4$

Agora, imaginando que existe uma propriedade análoga para resolver a inequação, vamos substituir $'' = ''$ por $'' < ''$ em tudo.

Assim, para $x \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$, temos que

$$\frac{x}{x-2} < \frac{x+4}{x} \iff$$

$$x^2 < (x-2)(x+4) \iff$$

$$x^2 < x^2 - 2x + 4x - 8 \iff$$

$$0 < 2x - 8 \iff 8 < 2x \iff 4 < x$$

Solução da inequação: $x > 4$

Agora, vamos testar se a solução da inequação está correta em alguns valores arbitrários de x.

Substituindo $x = 6 > 4$ nos dois lados da inequação original, $\dfrac{6}{6-2} = \dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{6+4}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$. De fato, $\dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{3}$.

Substituindo $x = 1 < 4$ nos dois lados da inequação original, $\dfrac{1}{1-2} = -1$ e $\dfrac{1+4}{1} = 5$. Vemos, $-1 < 5$.

Mas, $x = 1 < 4$ não faz parte da solução encontrada. Logo, **a solução da inequação está errada**.

Isto significa que foi cometido algum erro na resolução da inequação. Antes de ler a observação abaixo, tente descobrir onde foi cometido o erro.

Aqui está o erro. Foi dito, imaginando que existe uma propriedade análoga, essa propriedade não existe !!!.

Contra-exemplos:

Em dois exemplos numéricos vamos verificar que a propriedade $c, d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \iff ad < bc$ é FALSA, isto é, vamos verificar que nesses exemplos a expressão do lado esquerdo da desigualdade é verdadeira, mas, no entando, a expressão do lado direito da mesma desigualdade é falsa. Feito isso, concluímos que a implicação é falsa, portanto a equivalência é falsa.

Primeiro contra-exemplo: $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = 3$.
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{-1} = -1$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{2}{3}$, como $-1 < \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ é verdadeira.
$ad = 1 \cdot 3 = 3$ e $bc = (-1) \cdot 2 = -2$, como $3 > -2$, $ad < bc$ é falsa.

Segundo contra-exemplo: $a = 3$, $b = 6$, $c = -2$, $d = -1$.
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{-2}{-1} = 2$, como $\dfrac{1}{2} < 2$, $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ é verdadeira.
$ad = 3 \cdot (-1) = -3$ e $bc = (6) \cdot (-2) = -12$, como $-3 > -12$, $ad < bc$ é falsa.

Voltando a inequação, $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{x+4}{x}$, vamos resolvê-la, agora corretamente, isto é, usando propriedades algébricas para simplificar expressões e usando as propriedades de implicação ou de equivalência relativas à ordem dos números reais.

$$\frac{x}{x-2} < \frac{x+4}{x} \quad \overset{\text{PO2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+4}{x} < \frac{x+4}{x} - \frac{x+4}{x}$$

. Usando propriedades algébricas para simplificar cada lado,

$$\frac{x^2-(x-2)(x+4)}{x(x-2)} < 0$$

$$\frac{x^2-(x^2+4x-2x-8)}{x(x-2)} < 0$$

$$\frac{x^2-(x^2+2x-8)}{x(x-2)} < 0$$

$$\frac{8-2x}{x(x-2)} < 0$$

Para resolver essa inequação podemos analisar o sinal de cada uma das três expressões e depois usar tabela de sinais.

Analisando o sinal de $8-2x$, o domínio é o conjunto dos reais e
$8-2x=0 \iff 2x=8 \iff x=4$
$8-2x>0 \iff 8-2x+2x>0+2x \iff 8>2x \iff x<4$

Analisando o sinal de $x-2$, o domínio é o conjunto dos reais e
$x-2=0 \iff x=2$
$x-2>0 \iff x-2+2>0+2 \iff x>2$

x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<4$	4	$x>4$
$8-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{8-2x}{x(x-2)}$	$+$	nd	$-$	nd	$+$	0	$-$

Logo a solução da inequação é $\{x \in \mathbb{R};\ 0<x<2 \text{ ou } x>4\} = (0,2)\cup(4,\infty)$.

Quando podemos afirmar que a solução da última inequação simplificada é exatamente a solução da inequação original?
Resposta: quando todas as propriedades algébricas e de ordem usadas nas simplificações foram propriedades de equivalência, garantimos que a solução da última inequação é a solução da primeira.

Lembre sempre

Para resolver inequações é preciso saber bem

as propriedades algébricas e as propriedades de ordem.