

# Controle Digital

Pós-Graduação em Engenharia  
de Produção e Sistemas  
Computacionais

Mestrado Profissional -  
PURO/UFF

Prof. Luciano Bertini

# Introdução

- O objetivo é apresentar as noções básicas de duas ferramentas fundamentais para o projeto de sistemas digitais:
  - Transformada de Laplace
  - Transformada Z
- Referências:
  - Curso de Equações Diferenciais 18.03 - Prof. Arthur Mattuck - MIT OpenCourseWare
  - Katsuhiko Ogata - **Discrete-Time Control Systems** - 2nd Edition - Prentice Hall Int. - 1995
  - Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini - **Feedback Control of Dynamic Systems - Sixth Edition - Chapter 8 - Digital Control** - Pearson 2011

# Introdução

Where the Laplace Transform comes from (Arthur Mattuck, MIT)

Lec 19 | MIT 18.03 Differential Equations, Spring 2006  
Introduction to the Laplace Transform; Basic Formulas.  
<https://www.youtube.com/watch?v=sZ2qull6GEk>

Lec 20 | MIT 18.03 Differential Equations, Spring 2006  
Derivative Formulas;  
Using the Laplace Transform to Solve Linear ODE's.  
<https://www.youtube.com/watch?v=qZHseRxAWZ8>

View the complete course: <http://ocw.mit.edu/18-03S06>

# Introdução

- Como simular computacionalmente um sistema dinâmico? Como implementar um controle?

1) Representação matemática do sistema: modelo matemático.

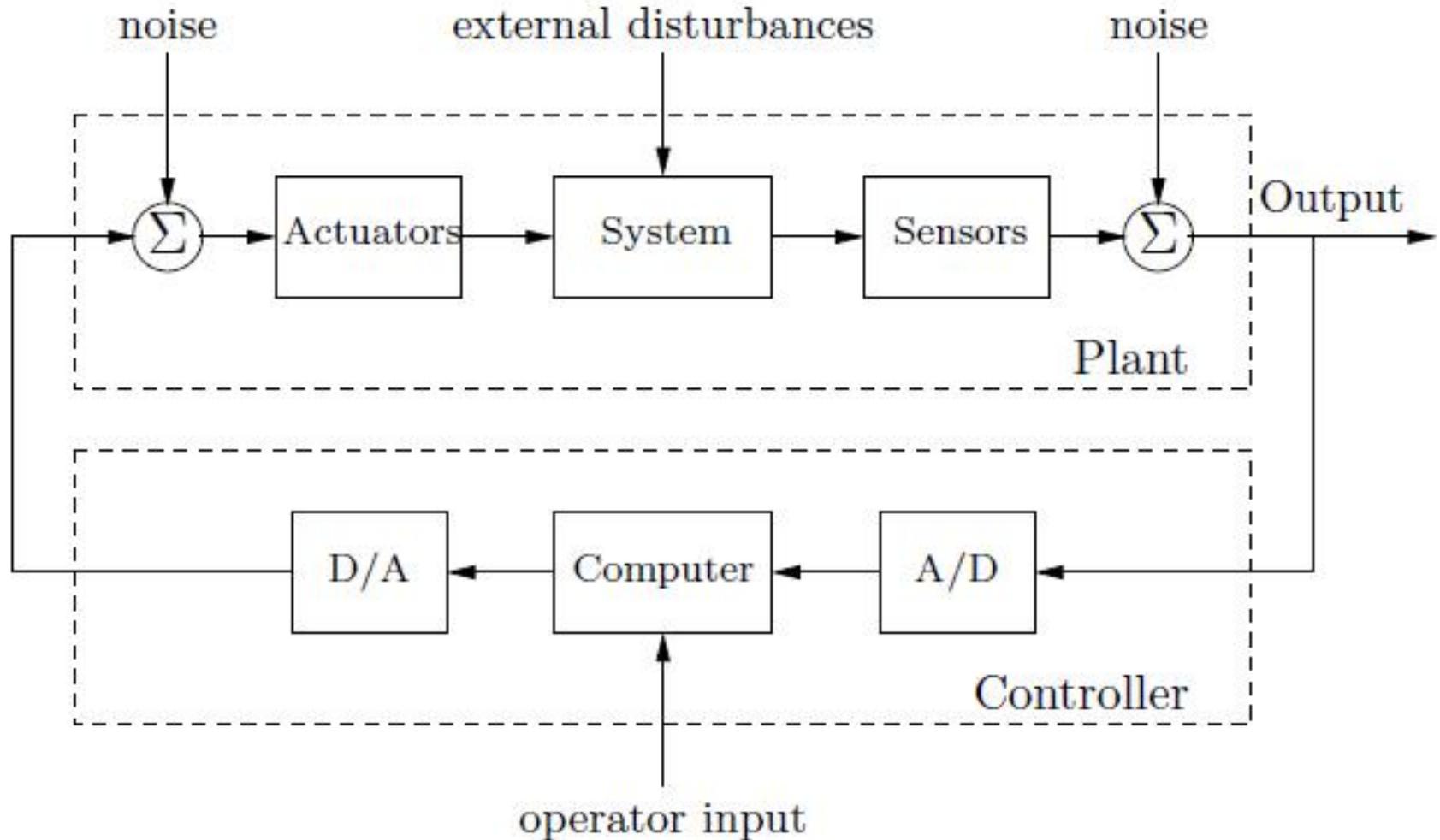
 Transformada de Laplace

2) Transformar a representação do sistema para um sistema de tempo discreto

 Transformada Z

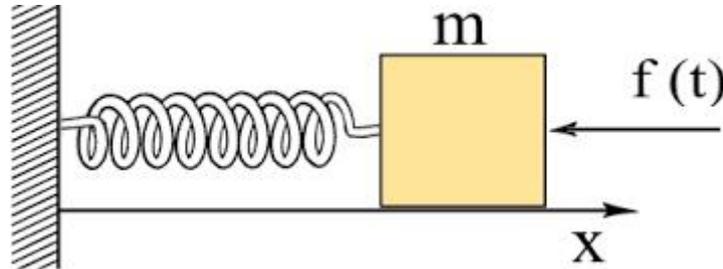
3) Implementação através de uma fórmula de recorrência

# Introdução



# Introdução

- Exemplo: sistema massa-mola



- Duas forças atuam:  $m \cdot a = m \frac{d^2x}{dt^2}$  e  $k \cdot x$ .
- Temos então:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = f(t)$$

# Introdução

Utilizando Laplace:

$$ms^2X(s) + kX(s) = F(s)$$

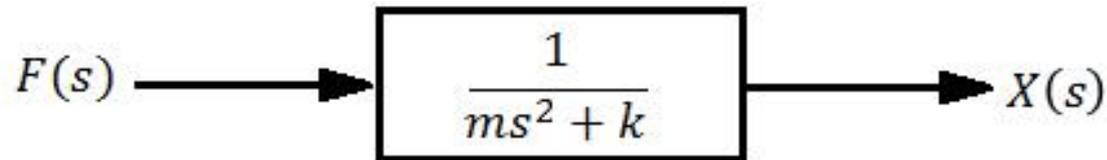
ou:

$$(ms^2 + k)X(s) = F(s)$$

ou:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

ou:



Obs: considerando condições iniciais nulas

# Introdução

A solução requer a transformada inversa:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{ms^2 + k} \right] * f(t) \\&= \frac{1}{\sqrt{mk}} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{(s^2 + \frac{k}{m})} \right] * f(t) \\&= \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) * f(t).\end{aligned}$$

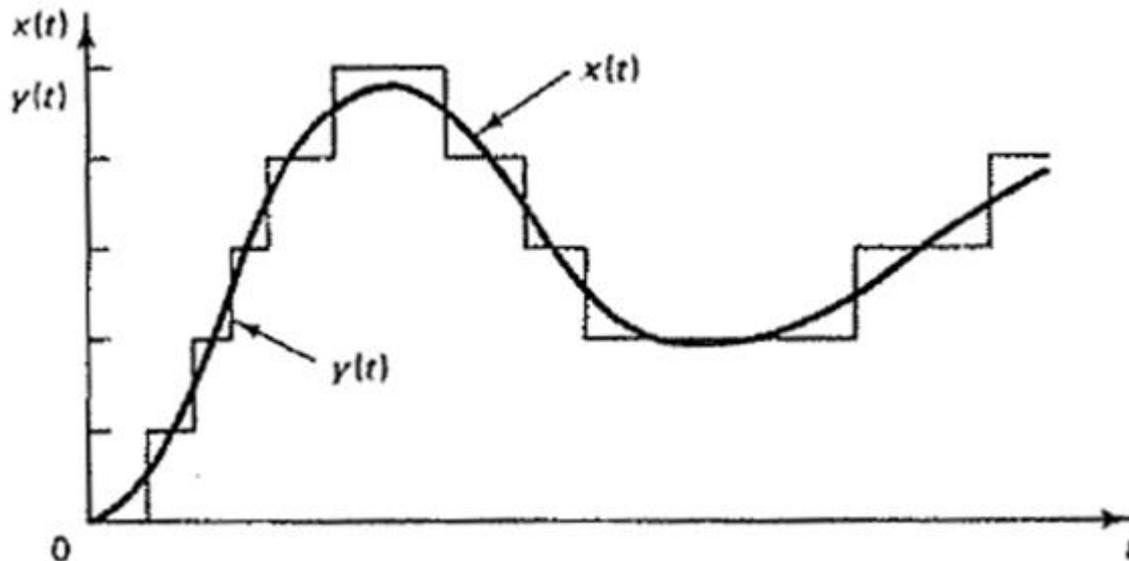
# Introdução

- Tabela da Transformada de Laplace:

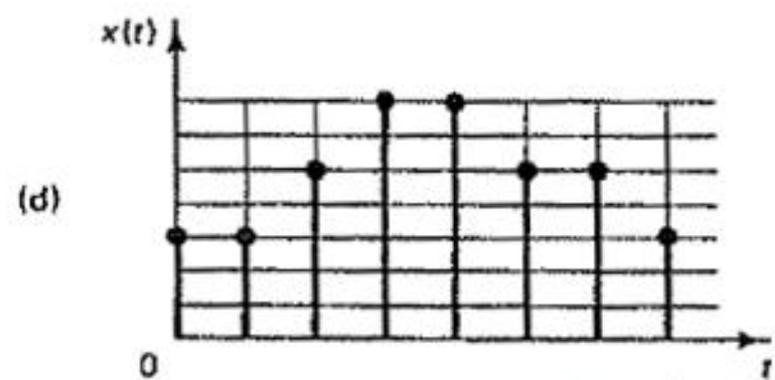
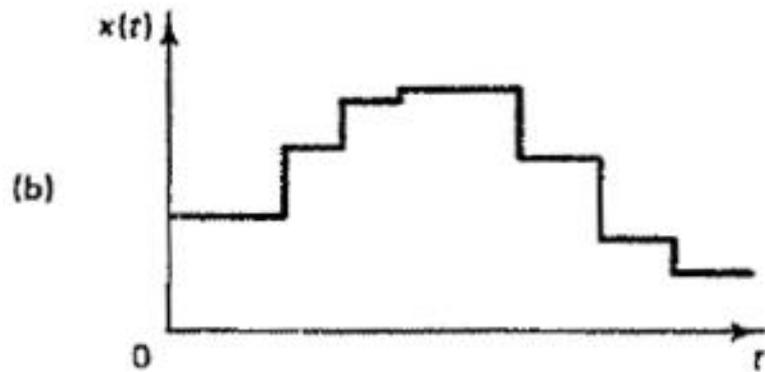
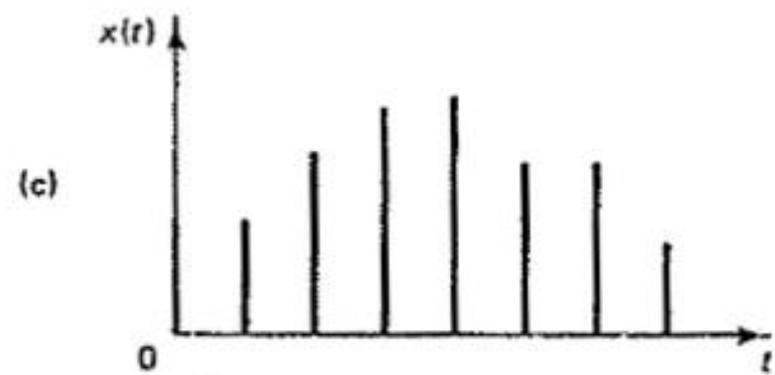
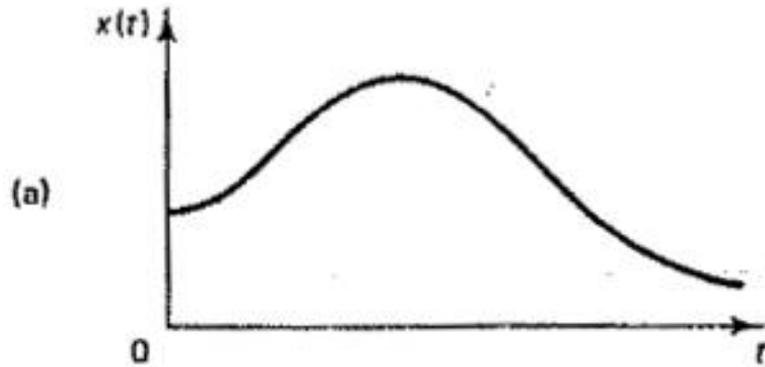
$f(t), t \geq 0$	$F(s)$	$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
1. $\delta(t)$	1	6. $te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
2. $u(t)$	$\frac{1}{s}$	7. $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
3. $t$	$\frac{1}{s^2}$	8. $\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
4. $t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	9. $\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
5. $e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	10. $e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$

# Introdução

- Sistemas de tempo discreto
  - É quando o sistema é representado por um ou mais sinais quantizados.
- A transformada Z permite obtermos uma equação que discretiza o sistema representado por Laplace.

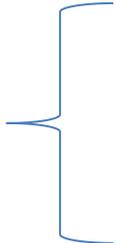


# Introdução



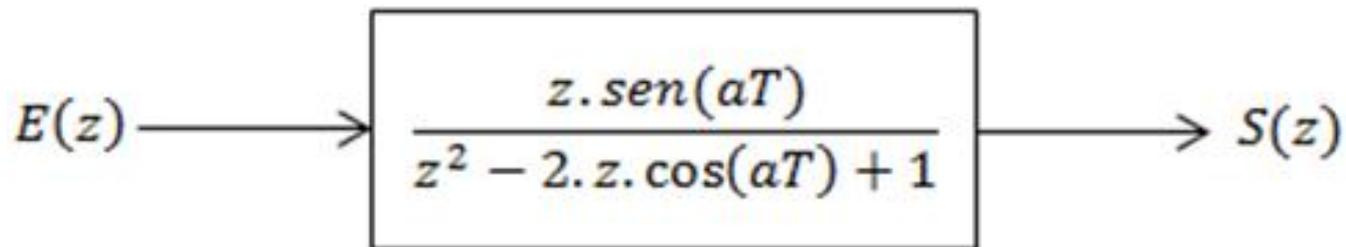
(a) Sinal analógico; (b) sinal quantizado e contínuo no tempo; (c) sinal amostrado; (d) sinal digital

# Introdução

- Sistemas de controle 
  - tempo contínuo
  - tempo discreto
- Sistemas de controle de **tempo discreto** possuem sinais amostrados ou digitais que só mudam em instantes discretos do tempo. São descritos por equações de diferenças (fórmulas de recorrência), após a discretização apropriada.
- Sistemas de controle de **tempo contínuo** possuem apenas sinais analógicos e contínuos. São descritos por equações diferenciais.

# Introdução

- Vamos continuar com o exemplo do sistema massa-mola. Podemos procurar em uma tabela qual a transformada Z para a função  $\text{sen}(at)$ :



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z \cdot \text{sen}(aT)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(aT) + 1}$$

- $T$  é o período de amostragem.

# Introdução

- Após aplicarmos a transformada Z inversa, obtém-se a expressão:

$$s(k) = 2 \cdot \cos(aT) \cdot s(k - 1) + \text{sen}(aT) \cdot e(k - 1) - s(k - 2)$$

- Que é uma fórmula de recorrência facilmente implementável em um computador.
- Ver simulação no [Excel](#).

# Transformada de Laplace

De onde vem a Transformada de Laplace?

**resposta:** vem das séries de potências, cuja aparência é:

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

usando uma notação computacional:

$$\sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x)$$

# Transformada de Laplace

Desejamos associar uma função  $A(x)$ , que é a soma da série de potências, com a sequência de valores definida por  $a(n)$ . Vejamos dois exemplos conhecidos:

$a(n)$	$A(x)$
$1$	$\frac{1}{1-x}$ se $-1 < x < 1$
$\frac{1}{n!}$	$e^x$

Para uma função em  $n$  associa-se uma função em  $x$ .

# Transformada de Laplace

← → [https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function)



WIKIPEDIA  
The Free Encyclopedia

- Main page
- Contents
- Featured content
- Current events
- Random article
- Donate to Wikipedia
- Wikipedia store

- Interaction
  - Help
  - About Wikipedia
  - Community portal
  - Recent changes
  - Contact page

- Tools
  - What links here
  - Related changes
  - Upload file
  - Special pages
  - Permanent link

Create account

Article [Talk](#)

[Read](#) [Edit](#) [View history](#) [Search](#)

## Exponential function

• • •

### Formal definition [\[edit\]](#)

*Main article: Characterizations of the exponential function*

The exponential function  $e^x$  can be characterized in a variety of equivalent ways. In particular it may be defined by the following power series:<sup>[4]</sup>

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Using an alternate definition for the exponential function leads to the same result when expanded as a Taylor series.

Less commonly,  $e^x$  is defined as the solution  $y$  to the equation

$$x = \int_1^y \frac{dt}{t}$$

It is also the following limit:<sup>[5]</sup>

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

# Transformada de Laplace

- E se quisermos tudo isso em modo contínuo e analógico, não no domínio discreto?

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

↓

$$t: 0 \leq t < \infty$$

$$\int_0^{\infty} a(t)x^t dt = A(x)$$

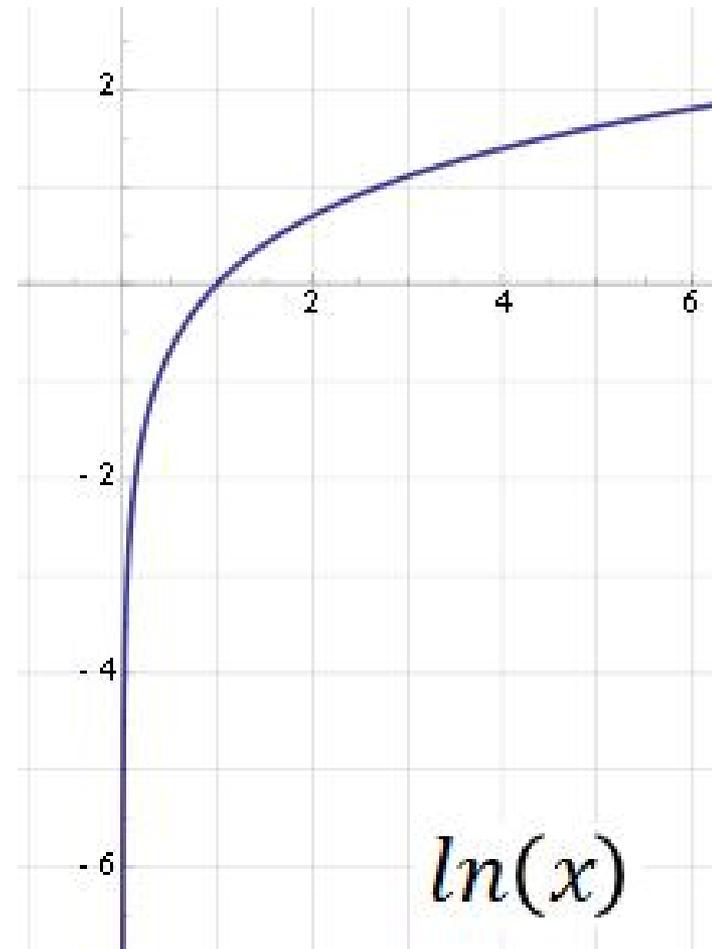
- Vamos tornar a expressão mais conveniente colocando a base  $e$ , fazendo:

$$x = e^{\ln(x)}$$

$$x^t = \left(e^{\ln(x)}\right)^t$$

# Transformada de Laplace

- Para que a integral tenha convergência,  $x$  deve ser menor que 1.
- Também  $x$  não pode ser negativo, para evitarmos números complexos.
- Então na prática teremos  $0 < x < 1$ , intervalo no qual  $\ln(x) < 0$ .
- Sendo assim,  $-\ln(x) > 0$ .



# Transformada de Laplace

- Vamos então adotar uma variável  $s = -\ln(x)$  que será sempre positiva.
- Por último, substituindo  $a(t)$  por  $f(t)$ , teremos a expressão conhecida como transformada de Laplace:

$$\int_0^{\infty} f(t) (e^{\ln(x)})^t dt = A(x)$$

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

# Transformada de Laplace

- Laplace é uma transformada linear, que vem do fato de que a própria integral é um operador linear, ou seja:

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(c \cdot f) = c \cdot \mathcal{L}(f)$$

# Transformada de Laplace

Exemplos de Cálculo

1. Calcule  $F(s)$  para  $f(t) = 1$ .

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$F(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt$$

$$\int_0^R e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^R = \frac{e^{-sR} - 1}{-s}$$

$$F(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-sR} - 1}{-s} = \frac{0 - 1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

# Transformada de Laplace

2. Calcule  $F(s)$  para  $f(t) = e^{at}$

Vamos calcular o caso mais genérico para  $f(t) \cdot e^{at}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt &= \\ \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{(a-s)t} dt &= \\ \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} dt &= \\ &= F(s - a), \quad \text{se } s > a \end{aligned}$$

A transformada de Laplace de  $e^{at} \cdot f(t)$  é  $F(s - a)$ . Isso é chamado **deslocamento exponencial na frequência**.

Portanto, para  $f(t) = e^{at}$ , temos  $F(s) = \frac{1}{s-a}$ ,  $s > a$ .

# Transformada de Laplace

3. Calcule  $F(s)$  para  $f(t) = \text{sen}(at)$  e para  $f(t) = \text{cos}(at)$

Para funções com senos e cossenos, basta observar que o resultado obtido para  $f(t) = e^{at}$  também funciona se  $a$  for um número complexo.

Assim a transformada de Laplace para senos e cossenos pode ser derivada da fórmula de Euler:

$$e^{iat} = \cos(at) + i\text{sen}(at)$$

$$e^{-iat} = \cos(at) - i\text{sen}(at)$$

# Transformada de Laplace

$$\cos(at) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia} \right)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2} \left( \frac{2s}{s^2 + a^2} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

$$\text{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(at)] = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right)$$

$$\mathcal{L}[\text{sen}(at)] = \frac{1}{2i} \left( \frac{2ia}{s^2 + a^2} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

# Transformada de Laplace

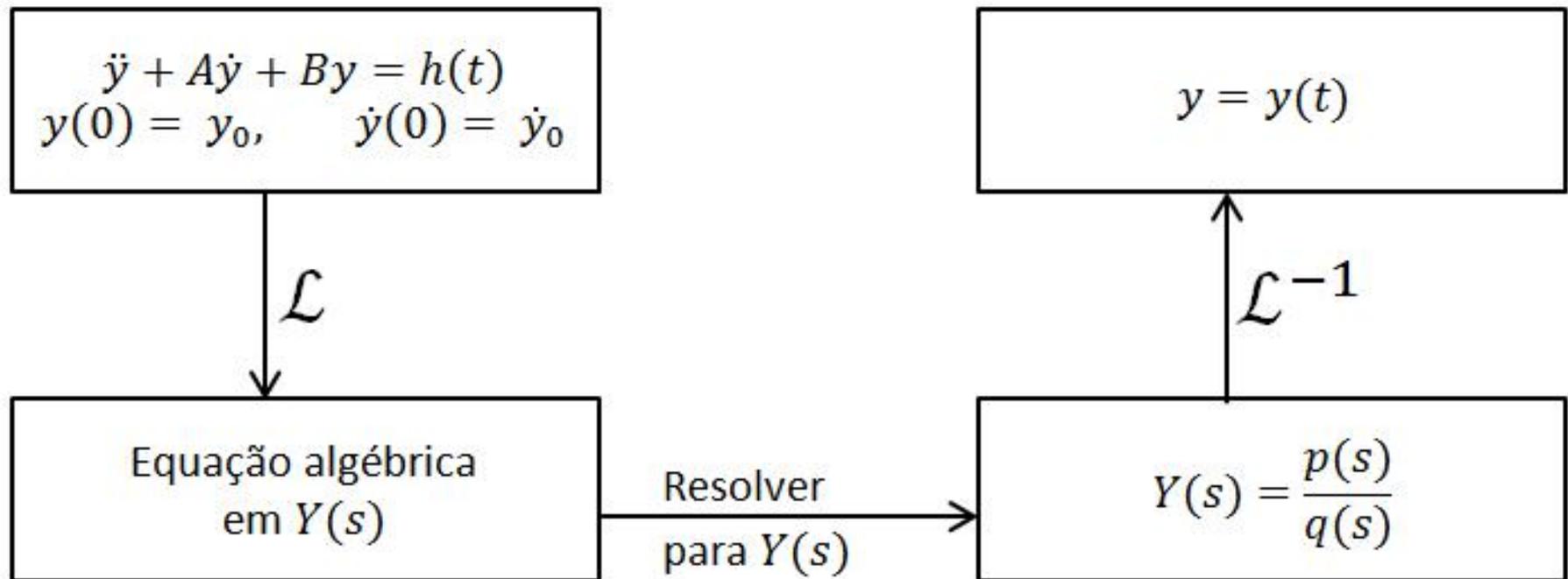
## Transformada Inversa

- É um pouco mais difícil calcular a transformada inversa.
- Geralmente utiliza-se o método da decomposição em frações parciais para reduzir a expressão em casos mais simples encontrados em tabelas.
- Um exemplo:

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

# Transformada de Laplace

## Solução de equações diferenciais



# Transformada de Laplace

## Fórmulas derivativas

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

Com a integração por partes ( $uv = \int uv' dt + \int u'v dt$ ), fazendo  $v' = f'(t)$  e  $u dt = e^{-st} dt$ , obtemos:

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)f(t)e^{-st} dt$$

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = 0 - f(0).1 + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt =$$

$$= 0 - f(0).1 + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

# Transformada de Laplace

## Fórmulas derivativas

Analogamente obtém-se para a derivada segunda. Porém não é necessário resolver novamente a integral por partes. Podemos escrever  $f''(t) = [f'(t)]'$ . Ou seja, seja  $g(t) = f'(t)$ :

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Portanto, as fórmulas para a transformada de Laplace da primeira e da segunda derivadas são:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

# Transformada de Laplace

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial:

$$y'' - y = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - f'(0) - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2 Y(s) - s - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)(s^2 - 1) = s + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + s + 1}{s+1}$$

$$Y(s)(s+1)(s-1) = \frac{s^2 + s + 1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)^2(s-1)}$$

# Transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)}$$

E agora?

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s - 1)} = \frac{-1/2}{(s + 1)^2} + \frac{C}{s + 1} + \frac{3/4}{s - 1}$$

O termo do meio não pode ser obtido pela técnica do curto-circuito. Substituindo  $s = 0$ :

$$-1 = -1/2 + C - 3/4$$

$$C = 1/4$$

Portanto:

$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s + 1)^2} + \frac{1/4}{s + 1} + \frac{3/4}{s - 1}$$

# Transformada de Laplace

Finalmente:

$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{3/4}{s-1}$$

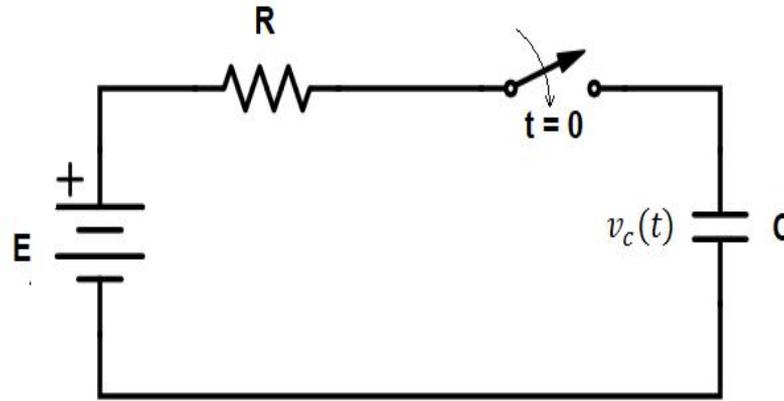
$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

Sabemos que para  $f(t) = e^{at}$ , temos  $F(s) = \frac{1}{s-a}$ , e para  $f(t) = t$ , temos  $F(s) = \frac{1}{s^2}$  (tabelas), obtemos:

$$y(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^t$$

# Transformada de Laplace

Exemplo 2: Encontre  $v_c(t)$  no circuito abaixo após o fechamento da chave em  $t = 0$ . Considere  $v_c(0) = 0$ .



As equações do circuito são:

$$v_c + R \cdot i = E, \quad i = C \frac{dv_c}{dt}$$
$$v_c + RC \frac{dv_c}{dt} = E, \quad v_c(0) = 0$$

# Transformada de Laplace

Primeira solução: por variáveis separáveis

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{E - v_c}{RC} = \left(-\frac{1}{RC}\right)(v_c - E)$$

$$\frac{dv_c}{(v_c - E)} = \left(-\frac{1}{RC}\right) dt$$

$$\int \frac{1}{(v_c - E)} dv_c = \int \left(-\frac{1}{RC}\right) dt$$

$$\int_{v_c(0)}^{v_c(t)} \frac{1}{(x - E)} dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{RC}\right) dy$$

$$\ln(x - E) \Big|_{v_c(0)}^{v_c(t)} = \left(-\frac{y}{RC}\right) \Big|_0^t$$

# Transformada de Laplace

$$\ln(v_c(t) - E) - \ln(v_c(0) - E) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) - E = (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = E + (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}, \quad v_c(0) = 0$$

$$v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

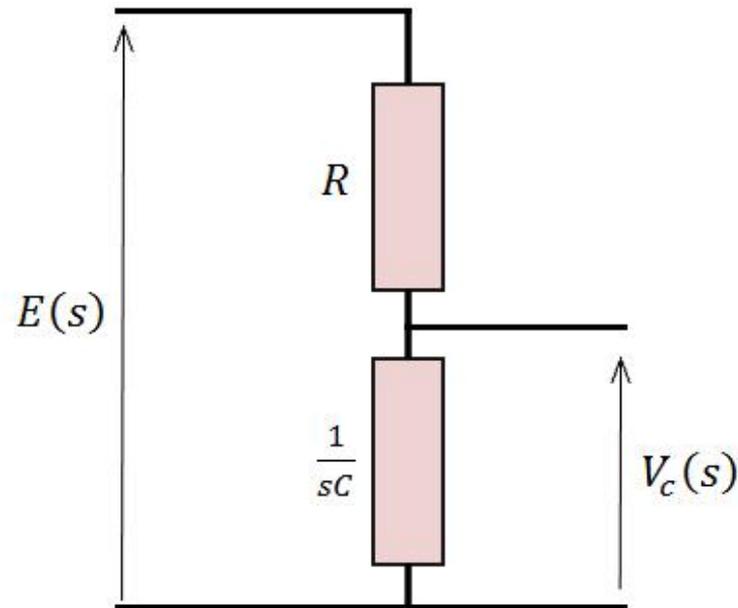
# Transformada de Laplace

Solução usando Laplace:

- Vamos considerar desde o início que  $v_c(0) = 0$ .
- A análise do circuito usando Laplace não requer a escrita das equações diferenciais.
- Basta considerar o elemento capacitor como uma impedância de  $1/sC$  ohms.

# Transformada de Laplace

- O circuito pode ser visto como um divisor de tensão:



$$V_c(s) = E(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

# Transformada de Laplace

Como  $E(t) = E$ , então  $E(s) = E/s$ . Substituindo, obtemos:

$$V_c(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$
$$V_c(s) = \frac{E}{s(sRC + 1)}$$

Separando em frações parciais:

$$V_c(s) = \frac{E}{s} + \frac{-ERC}{sRC + 1}$$
$$V_c(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s + 1/RC}$$

Resultado:

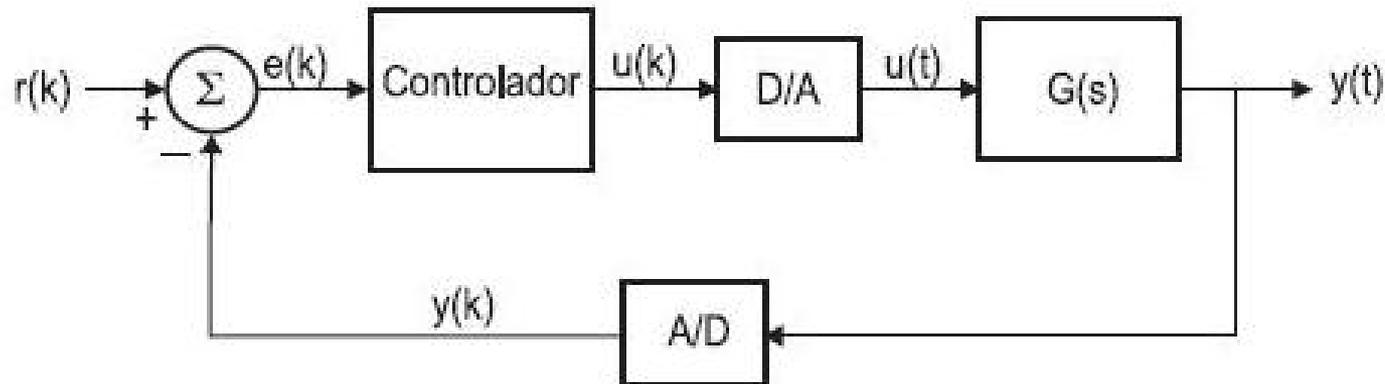
$$v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

# A Transformada Z

- A transformada Z é uma ferramenta matemática frequentemente usada na análise e síntese de sistemas de controle de tempo discreto.
- Permite a representação de um comportamento dinâmico em um ambiente computacional, pois a modelagem baseia-se em uma sequência de valores discretos.
- Tal situação ocorre porque, para que o computador leia uma variável analógica contínua de um processo, é preciso convertê-la para um formato digital amostrado periodicamente.

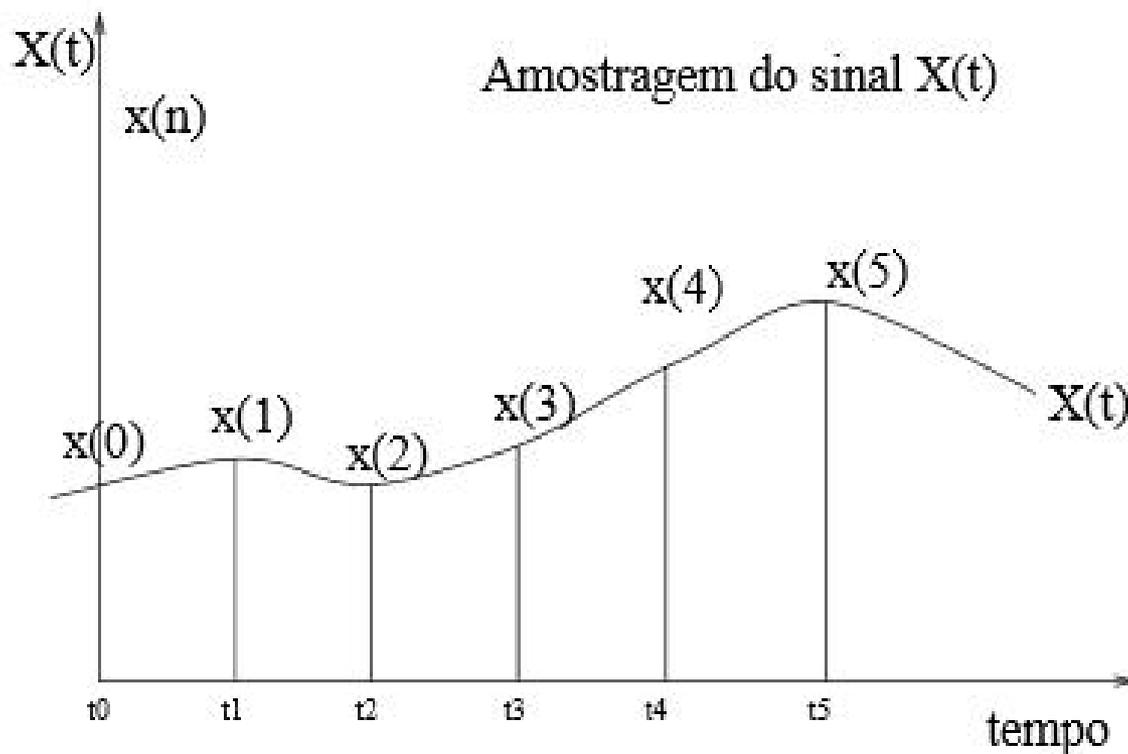
# A Transformada Z

- Por esse motivo um sistema de controle digital é também chamado de sistema de controle de tempo discreto.



# A Transformada Z

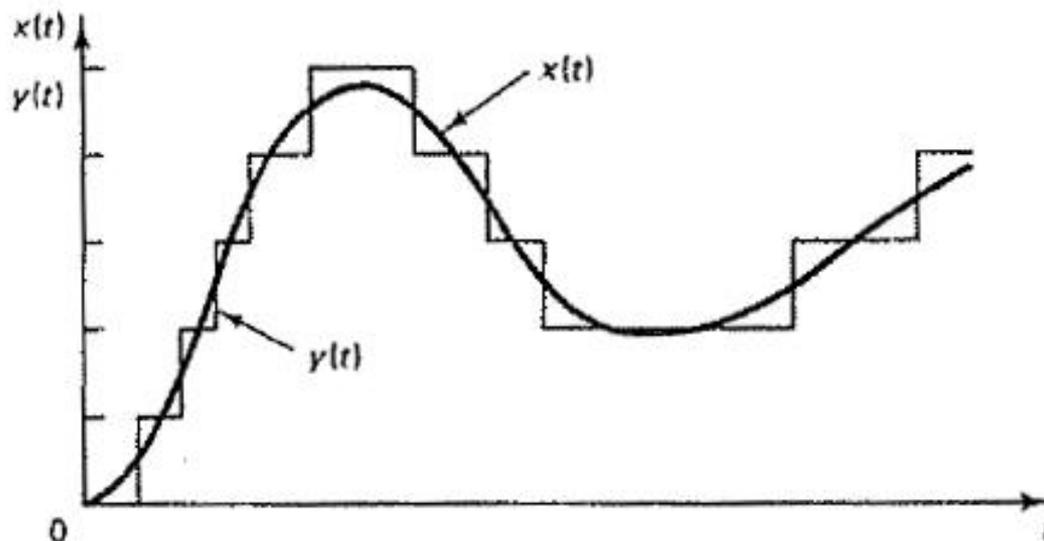
Um sinal amostrado  $X(t)$  é representado por uma sequência de valores discretos



# A Transformada Z

## Erro de quantização

Quanto menor o período de amostragem e maiores as resoluções dos conversores A/D e D/A, menor será o erro de quantização



Se um sistema estiver representado pelas suas equações de Laplace, as fórmulas de recorrência que representam seu comportamento podem ser obtidas pela transformada Z

# A Transformada Z

## Definição da Transformada Z:

A transformada Z de uma função do tempo  $x(t)$  considera apenas os valores amostrados de  $x(t)$ , isto é,  $x(0)$ ,  $x(T)$ ,  $x(2T)$ , ..., onde  $T$  é o período de amostragem.

A definição da transformada Z é:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

A expansão do somatório resulta na sequência:

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \\ + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \dots$$

# A Transformada Z

- A definição implica que a transformada Z de qualquer função contínua no tempo pode ser escrita na forma de uma sequência por simples inspeção.
- O termo  $z^{-k}$  na série indica a posição no tempo em que ocorre a amplitude  $x(kT)$ .
- Reciprocamente, se  $X(z)$  for dado como uma sequência, a transformada Z inversa pode ser obtida por inspeção como uma sequência da função  $x(kT)$  que corresponde aos valores da função  $x(t)$  nos respectivos instantes do tempo.
- Se tivermos a fórmula fechada como a razão de dois polinômios em  $z$ , podemos calcular a sequência de valores através da fórmula de recorrência resultante.

# A Transformada Z

- Na transformada de Laplace temos a importante propriedade em que  $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s)$  (considerando condições iniciais nulas).
- Para os sistemas discretos, a definição da transformada Z permite uma propriedade semelhante e de igual importância:

$$\mathcal{Z}[f(k - 1)] = z^{-1}F(z)$$

# A Transformada Z

Significa que a transformada inversa da transformada Z multiplicada por  $z^{-1}$  resulta na amostra do instante  $k - 1$ . A prova vem da definição:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(t)] &= \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ \mathcal{Z}[x(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-(k-n)}\end{aligned}$$

# A Transformada Z

Definindo  $m = k - n$ , a equação fica:

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

Como  $x(mT) = 0$  para  $m < 0$ , o limite inferior do somatório pode ser zero:

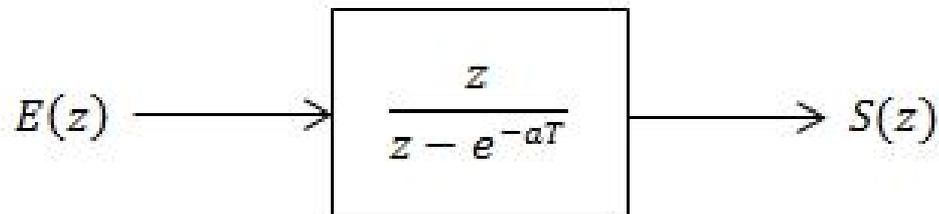
$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

Com esse resultado, se temos uma função de transferência em Z, podemos facilmente obter a fórmula de recorrência que a implementa.

# A Transformada Z

Vejam os dois exemplos:

1. Função  $x(t) = e^{-at}$



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z}{z - e^{-aT}} = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}}$$

$$S(z) \left( 1 - z^{-1}e^{-aT} \right) = E(z)$$

# A Transformada Z

$$S(z) - z^{-1}S(z)e^{-aT} = E(z)$$

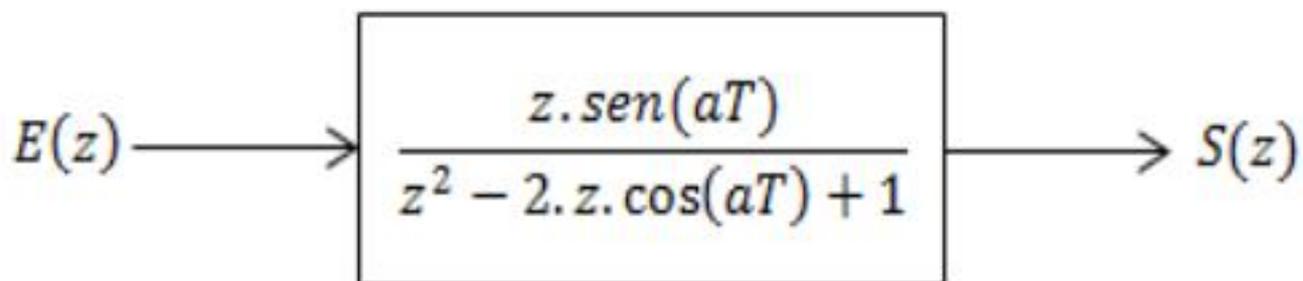
$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$

$$s(k) - s(k-1)e^{-aT} = e(k)$$

$$s(k) = e(k) + s(k-1)e^{-aT}$$

# A Transformada Z

2. Função  $x(t) = \text{sen}(at)$



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z \cdot \text{sen}(aT)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(aT) + 1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z^{-1} \cdot \text{sen}(aT)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(aT) + z^{-2}}$$

$$S(z)(1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(aT) + z^{-2}) = E(z)(z^{-1} \cdot \text{sen}(aT))$$

# A Transformada Z

$$S(z) - 2 \cdot z^{-1}S(z) \cdot \cos(aT) + z^{-2}S(z) = E(z)z^{-1} \cdot \text{sen}(aT)$$

$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$

$$s(k) - 2 \cdot s(k - 1) \cdot \cos(aT) + s(k - 2) = e(k - 1) \cdot \text{sen}(aT)$$

$$s(k) = 2 \cdot \cos(aT) \cdot s(k - 1) + \text{sen}(aT) \cdot e(k - 1) - s(k - 2)$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Como vimos, a transformada Z permite modelar sistemas dinâmicos, tal como a transformada de Laplace.
- Normalmente os sistemas usam a Transformada de Laplace para a modelagem dinâmica.
- Então, se tivermos uma maneira de converter uma equação de Laplace para uma equação em Z, teremos um procedimento para a implementação digital desse sistema dinâmico.
- Isso pode ser usado para simulação de sistemas físicos, implementação de controle digital e filtros ativos.
- É uma ferramenta bastante usada na área de processamento digital de sinais.

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Considere o sinal contínuo  $f(t) = e^{-at}$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{1}{s+a}$ .
- A equação possui um pólo em  $s = -a$ .
- A transformada Z de  $f(kT)$ , como vimos, é  $F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$
- O pólo está em  $z = e^{-aT}$ .
- Daí pode-se inferir uma relação entre Laplace e Z, pois essa equivalência entre os pólos é geral, com  $T$  sendo o período de amostragem:

$$z = e^{sT}$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Uma outra forma de ver essa relação é no deslocamento exponencial no tempo da transformada de Laplace.
- Essa propriedade diz que a transformada inversa de  $e^{-as}F(s)$  é  $f(t - a)$  para  $t \geq a$ .
- Ou seja, multiplicar por  $e^{-sT}$ , fazendo  $a = T$ , significa multiplicar por  $z^{-1}$
- Isso atrasa a função em  $T$ , tal como foi demonstrado nas propriedades da transformada Z.

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

Conversão de  $s$  para  $z$ :

- A expressão  $z = e^{sT}$  não é adequada para a implementação de sistemas discretos
- Existem várias aproximações utilizadas para converter uma equação em  $s$  para uma equação em  $z$ .
- As duas mais simples são as baseadas na propriedade da transformada de Laplace com a derivação, chamada **backward difference**, e a integração, conhecido como **método de Tustin**.

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

## Backward Difference

- O método baseado na derivação leva em conta que a transformada inversa de  $s \cdot F(s)$  é a derivada do sinal no tempo.
- Em um sistema amostrado com intervalo de amostragem  $T$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(k) - f(k - 1)}{T}$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Tirando a transformada Z dessa expressão, obtemos:

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{df}{dt} \right] = \frac{F(z) - z^{-1}F(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} F(z)$$

- Então o que em Laplace tem o mesmo efeito de derivação causado por  $s \cdot F(s)$ , em Z é causado por  $\frac{1-z^{-1}}{T} F(z)$ . Portanto chegamos à relação:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

## Método de Tustin

- O método de Tustin é baseado na integração
- Suponha que  $u(t)$  é a integral de um sinal  $e(t)$ . Em Laplace, isso pode ser escrito assim:

$$U(s) = \frac{1}{s} E(s)$$

- Tomando tempos discretos, podemos escrever que:

$$u(kT) = \int_0^{kT} e(t) dt = \int_0^{kT-T} e(t) dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t) dt$$

- Que pode ser reescrito como:

$$u(kT) = u(kT - T) + \text{área sob } e(t) \text{ no último período } T$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- O método de Tustin consiste em aproximar essa área pela área de um trapézio:

$$u(k) = u(k - 1) + \frac{T}{2} [e(k - 1) + e(k)]$$

- Ou, tirando a transformada Z:

$$U(z) = \frac{T}{2} \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) \cdot E(z) = \frac{1}{\frac{T}{2} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \cdot E(z)$$

- Então a equivalência entre Laplace e Z é dada por:

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

# Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- O método Backward Difference tem um maior erro em relação ao de Tustin, já que este se adequa melhor comparado ao sinal contínuo
- Entretanto, para valores pequenos de  $T$  pode ficar instável, com grandes flutuações.
- Por isso o método Backward Difference é mais usado pela sua simplicidade e flexibilidade, embora seja menos preciso.

# Implementação de um Controlador PID

O tradicional controle PID tem a seguinte equação com as três componentes proporcional, integrativa e derivativa:

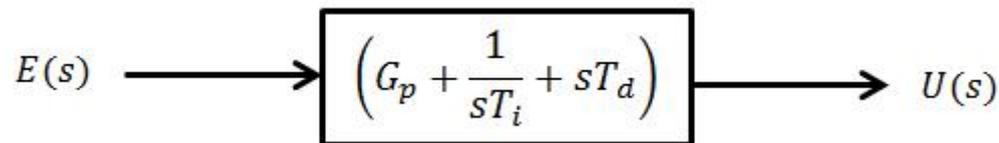
$$u(t) = G_p e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Em Laplace:

$$U(s) = G_p E(s) + \frac{1}{sT_i} E(s) + sT_d E(s)$$

$$U(s) = \left( G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) E(s)$$

Temos a função de transferência:



# Implementação de um Controlador PID

- Vamos aplicar a aproximação por Backward Difference, substituindo  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ , para obter a equação em Z:

$$U(z) = \left( G_p + \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_i} + \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_d \right) E(z)$$

$$U(z) = \left( G_p + \frac{T}{(1-z^{-1})T_i} + \frac{(1-z^{-1})T_d}{T} \right) E(z)$$

$$U(z) = \frac{G_p T T_i (1-z^{-1}) + T^2 + T_d T_i (1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})T T_i} E(z)$$

$$(1-z^{-1})T T_i U(z) = (G_p T T_i (1-z^{-1}) + T^2 + T_d T_i (1-2z^{-1} + z^{-2})) E(z)$$

$$(T T_i - T T_i z^{-1}) U(z) = ((G_p T T_i + T^2 + T_d T_i) - (G_p T T_i + 2T_d T_i)z^{-1} + T_d T_i z^{-2}) E(z)$$

$$T T_i U(z) - T T_i z^{-1} U(z) = (G_p T T_i + T^2 + T_d T_i) E(z) - (G_p T T_i + 2T_d T_i) z^{-1} E(z) + T_d T_i z^{-2} E(z)$$

# Implementação de um Controlador PID

Tomando a transformada  $\mathcal{Z}^{-1}$ :

$$TT_i u(k) - TT_i u(k-1) = (G_p TT_i + T^2 + T_d T_i) e(k) - (G_p TT_i + 2T_d T_i) e(k-1) + T_d T_i e(k-2)$$

$$TT_i u(k) = TT_i u(k-1) + (G_p TT_i + T^2 + T_d T_i) e(k) - (G_p TT_i + 2T_d T_i) e(k-1) + T_d T_i e(k-2)$$

$$u(k) = \frac{TT_i u(k-1)}{TT_i} + \left( \frac{G_p TT_i}{TT_i} + \frac{T^2}{TT_i} + \frac{T_d T_i}{TT_i} \right) e(k) - \left( \frac{G_p TT_i}{TT_i} + \frac{2T_d T_i}{TT_i} \right) e(k-1) + \frac{T_d T_i}{TT_i} e(k-2)$$

$$u(k) = u(k-1) + \left( G_p + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right) e(k) - \left( G_p + \frac{2T_d}{T} \right) e(k-1) + \frac{T_d}{T} e(k-2)$$

# Implementação de um Controlador PID

Trecho de código em C para o Arduino:

```
...
void loop() {
    ...
    currentMillis = millis();
    if(currentMillis - previousMillis >= interval) {
        previousMillis = currentMillis;

        vel = (counter*20000)/interval;
        // Velocidade em rpm; counter incrementa a cada 120 graus. Portanto
        // conter/(3T) = rotacoes por segundo; counter*20/T = rpm; interval esta em milisegundos.
        counter = 0;

        //PID
        e2 = e1;
        e1 = e0;
        e0 = setpoint - vel;
        u0 = u0 + (Gp*(e0-e1))/1000 + (e0*interval)/Ti + (Td*e0 - 2*Td*e1 + Td*e2)/interval;
        //Equação implementada somente com inteiros, por isso a divisão por 1000 para Kp

        if(u0>12000) u0=12000;
        if(u0<0) u0=0;
        pwm = map(u0, 0, 12000, 255, 0);
    }
    ...
}
```