Introdução ao Controle Digital

Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas Computacionais
Mestrado Profissional – PURO/UFF
Prof. Luciano Bertini

Este texto pretende dar uma introdução às técnicas de projeto de sistemas digitais, abordando duas ferramentas matemáticas fundamentais: a transformada de Laplace e a transformada Z. A transformada de Laplace é uma ferramenta muito popular, utilizada por cientistas e engenheiros, na solução das equações diferenciais que ocorrem nos problemas físicos mais comuns, como em circuitos elétricos. A parte 1 deste resumo está baseada nas explicações do Prof. Arthur Mattuck no curso de Equações Diferenciais 18.03 dado no MIT, disponível graças ao MIT OpenCourseWare[1]. Sua explanação permite um entendimento simplificado e rápido da Transformada de Laplace. Em seguida, na parte 2, será apresentado um resumo de como a transformada de Laplace, juntamente com a transformada Z, podem ser usadas para a concepção de sistemas de controle digitais.

Parte 1 – Introdução à Transformada de Laplace

Para eliminar o mistério que envolve a transformada de Laplace, vamos entender de onde ela vem e como ela foi inventada. A transformada de Laplace vem das séries de potências, cuja aparência é:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

Usando uma notação computacional e para escrever a_n como uma função da variável discreta n, escrevemos:

$$\sum_{0}^{\infty} a(n) x^n = A(x)$$

Desejamos associar uma função $A(x)$, que é a soma da série de potências, com a sequência de valores definida por $a(n)$. Vejamos dois exemplos conhecidos:

$a(n)$	$A(x)$
1	$\frac{1}{1-x}$, se -1 < x < 1
$\frac{1}{n!}$	e^x

[1] http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03-differential-equations-spring-2010/

Nota-se que para uma função em n associa-se uma função em x. Diferentemente dos operadores (como a derivada), essa é uma característica da transformada.
E se quisermos tudo isso em modo contínuo e analógico, não no domínio discreto? Podemos fazer as modificações tradicionais onde a variável discreta dá lugar a uma variável contínua e o somatório dá lugar a uma integral:

$$n = 0,1,2, \ldots$$
$$\downarrow$$
$$t: 0 \leq t < \infty$$

$$\int_0^\infty a(t) x^t dt = A(x)$$

A potência com variável x como base não é interessante para a solução da integral. É sempre desejável que se tenha a base e, pois simplifica muito a solução. Vamos então tornar a expressão mais conveniente colocando a base e, fazendo:

$$x = e^{ln(x)}$$

$$x^t = \left(e^{ln(x)}\right)^t$$

Para que a integral tenha convergência, x deve ser menor que 1. Além disso, não é interessante que seja negativo, pois poderíamos obter por exemplo $(-1)^{1/2}$ que é um número complexo. Então na prática teremos $0 < x < 1$, intervalo no qual $ln(x) < 0$. Sendo assim, $-ln(x) > 0$.

Vamos então adotar uma variável $s = -ln(x)$ que será sempre positiva. Implementando-se essas modificações, que são puramente cosméticas, para tornar a expressão mais fácil de se trabalhar em termos de símbolos, e também substituindo $a(t)$ por $f(t)$, teremos a expressão conhecida como transformada de Laplace:

$$\int_0^\infty f(t) \left(e^{ln(x)}\right)^t dt = A(x)$$

$$\boxed{\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)}$$

Laplace é uma transformada linear, que vem do fato de que a própria integral é um operador linear, ou seja:

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(c.f) = c.\mathcal{L}(f)$$

Exemplos de cálculo

Vamos calcular algumas transformadas de Laplace mais simples, lembrando que a integral definida até o infinito é uma integral imprópria, e como tal deve ser aplicado o limite de uma variável qualquer para o infinito. Primeiramente, vejamos qual é $F(s)$ para $f(t) = 1$.

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty 1.e^{-st}dt$$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dt$$

$$\int_0^R e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^R = \frac{e^{-sR}-1}{-s}$$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR}-1}{-s} = \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}, \qquad s > 0$$

Como segundo exemplo, vamos calcular a transformada de Laplace, mais diretamente, para e^{at}. Porém, vamos calcular genericamente para a função $e^{at}.f(t)$, pois como já temos a transformada de $f(t) = 1$, então saberemos a transformada de e^{at}. Isso também levará à definição importante de deslocamento.

$$\int_0^\infty e^{at}.f(t).e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t).e^{(a-s)t}dt = \int_0^\infty f(t).e^{-(s-a)t}dt = F(s-a), \qquad se\ s > a$$

Assim, a transformada de Laplace de $e^{at}.f(t)$ é $F(s-a)$, assumindo $s > a$. Isso é chamado deslocamento exponencial na frequência. Portanto, para $f(t) = e^{at}$, temos $F(s) = \frac{1}{s-a},\ s > a$.

Para funções com senos e cossenos, basta observar que o resultado obtido acima também funciona se a for um número complexo. Assim a transformada de Laplace para senos e cossenos pode ser derivada da fórmula de Euler invertida, derivada da fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$ e $e^{-ix} = \cos(x) - isen(x)$.

$$\cos(at) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

$$\operatorname{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right)$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \frac{1}{2i}\left(\frac{2ia}{s^2+a^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$$

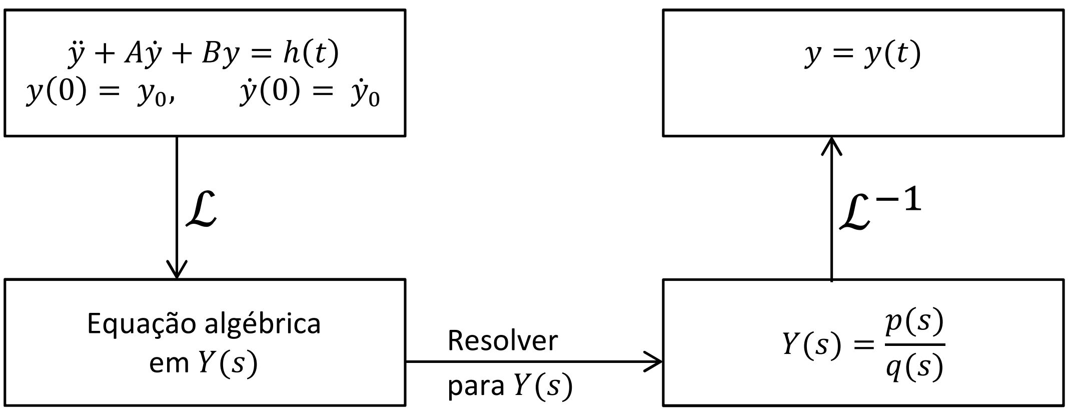
Transformada Inversa

É um pouco mais difícil calcular a transformada inversa. Geralmente utiliza-se o método da decomposição em frações parciais para reduzir a expressão em casos mais simples encontrados em tabelas. Um exemplo:

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3} \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Solução de equações diferenciais

A transformada de Laplace converte um sistema de equações diferenciais em um sistema de equações puramente algébricas, sem integrais e derivadas, tornando a solução trivial. A dificuldade reside na necessidade de obtenção da transformada inversa para se chegar na resposta final. O processo é o seguinte:



Para realizar esse processo, é necessário conhecer a transformada de Laplace da derivada de uma função, além é claro da existência da transformada.

Fórmulas Derivativas

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

Com a integração por partes ($uv = \int uv'dt + \int u'vdt$), fazendo $v' = f'(t)$ e $udt = e^{-st}dt$, obtemos:

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = 0 - f(0).1 + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt =$$

$$= 0 - f(0).1 + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

Analogamente obtém-se para a derivada segunda. Porém não é necessário resolver novamente a integral por partes. Podemos escrever $f''(t) = [f'(t)]'$. Ou seja, seja $g(t) = f'(t)$:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Portanto, as fórmulas para a transformada de Laplace da primeira e da segunda derivadas são:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)\\ \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{gathered}}$$

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial:

$$y'' - y = e^{-t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - f'(0) - Y = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - s - Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)(s^2 - 1) = s + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + s + 1}{s+1}$$

$$Y(s)(s+1)(s-1) = \frac{s^2+s+1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{3/4}{s-1}$$

O termo do meio não pode ser obtido pela técnica anterior (curto-circuito). Substituindo $s = 0$:

$$-1 = -1/2 + C - 3/4$$

$$C = 1/4$$

Portanto:

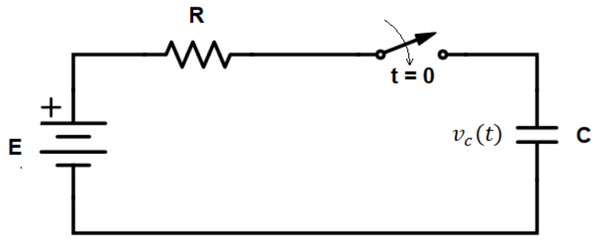
$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{3/4}{s-1}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

Sabemos que para $f(t) = e^{at}$, temos $F(s) = \frac{1}{s-a}$, e para $f(t) = t$, temos $F(s) = \frac{1}{s^2}$ (tabelas), obtemos:

$$y(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}$$

Exemplo 2: Encontre $v_c(t)$ no circuito abaixo após o fechamento da chave em t = 0. Considere $v_c(0) = 0$.



As equações do circuito são:

$$v_c + R.i = E, \qquad i = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_c + RC\frac{dv_c}{dt} = E, \qquad v_c(0) = 0$$

Solução por variáveis separáveis:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{E - v_c}{RC} = \left(-\frac{1}{RC}\right)(v_c - E)$$

$$\frac{dv_c}{(v_c - E)} = \left(-\frac{1}{RC}\right)dt$$

$$\int \frac{1}{(v_c - E)} dv_c = \int \left(-\frac{1}{RC}\right)dt$$

$$\int_{v_c(0)}^{v_c(t)} \frac{1}{(x - E)} dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{RC}\right)dy$$

$$\ln(x - E)\Big|_{v_c(0)}^{v_c(t)} = \left(-\frac{y}{RC}\right)\Big|_0^t$$

$$ln(v_c(t) - E) - ln(v_c(0) - E) = -\frac{t}{RC}$$

$$ln\left(\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) - E = (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

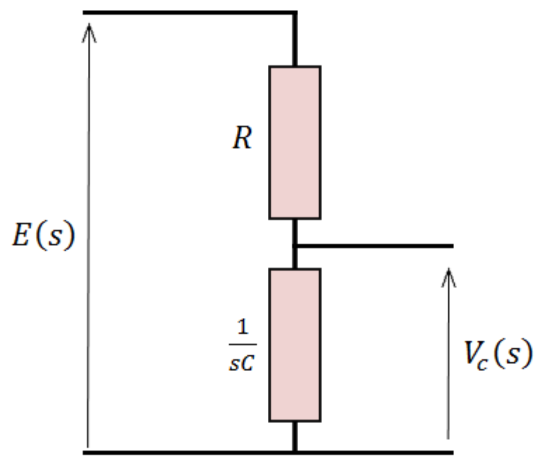
$$v_c(t) = E + (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad v_c(0) = 0$$

$$\boxed{v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}}$$

Solução usando Laplace:

Para considerar o valor inicial do capacitor deve-se adicionar ao circuito uma fonte de tensão em série no valor de ${}^{v_c(0)}/_{s}$. Vamos considerar desde o início que $v_c(0) = 0$.

A análise do circuito usando Laplace não requer a escrita das equações diferenciais. Basta considerar o elemento capacitor como uma impedância de ${}^{1}/_{sC}$ ohms. O circuito pode ser visto como um divisor de tensão:



$$V_c(s) = E(s)\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}$$

Como $E(t) = E$, então $E(s) = {}^{E}\!/_{s}$. Substituindo, obtemos:

$$V_c(s) = \frac{E}{s}.\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}$$

$$V_c(s) = \frac{E}{s(sRC+1)}$$

Separando em frações parciais:

$$V_c(s) = \frac{E}{s} + \frac{-ERC}{sRC+1}$$

$$V_c(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s+{}^{1}\!/_{RC}}$$

Resultado:

$$\boxed{v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}}$$

Parte 2 - Transformada Z

2.1 Introdução

A transformada Z é uma ferramenta matemática frequentemente usada na análise e síntese de sistemas de controle de tempo discreto. Enquanto a transformada de Laplace facilita a solução de equações diferenciais e permite a modelagem da dinâmica dos sistemas, a transformada Z permite a representação de um comportamento dinâmico em um ambiente computacional, pois permite a modelagem através de uma sequência de valores discretos, situação que ocorre nos sistemas computacionais, pois para que o computador leia uma variável analógica contínua de um processo, é preciso convertê-la para um formato digital amostrado periodicamente. Por esse motivo um sistema de controle digital é também chamado de sistema de controle de tempo discreto.

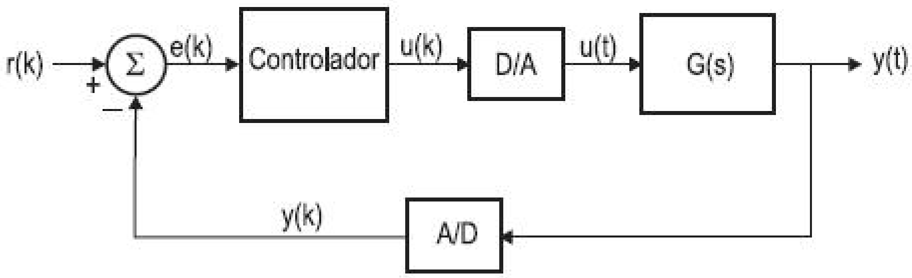


Figura 2.1 – Diagrama de blocos de um sistema de controle digital

O controlador da Figura 2.1 é um computador digital. Ele lê a variável controlada $y(t)$ do processo através de um conversor A/D (Analógico-Digital) gerando uma sequência de valores amostrados $y(k)$. Com o valor da referência $r(k)$ também digital, é calculado o erro $e(k)$. Através de uma fórmula de recorrência (ou equação de diferença) o computador calcula o valor do próximo $u(k)$ da sequência, com base na sequência $e(k), e(k-1), e(k-2), \ldots$ e nos valores anteriores $u(k-1), u(k-2), \ldots$. A transformada Z permite determinar as equações de recorrência que definem a dinâmica do controle. Um sinal amostrado $X(t)$ é então representado por uma sequência de valores discretos, como mostra a Figura 2.2.

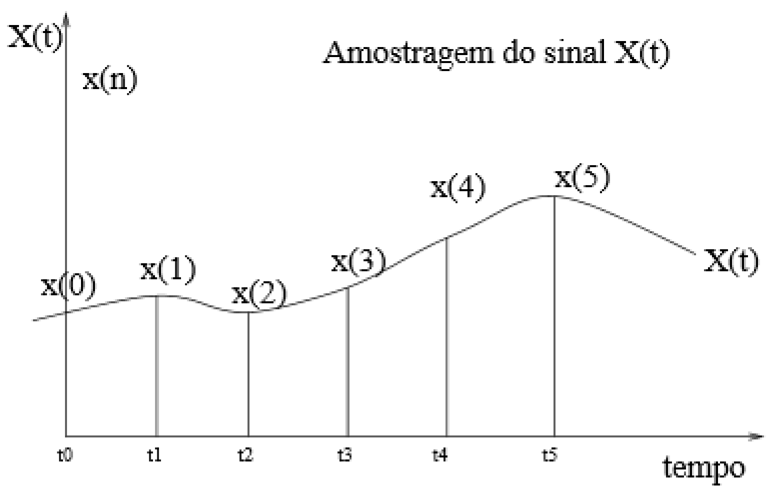


Figura 2.2 – Sinal amostrado

O sinal amostrado difere do sinal real pela quantização, que insere um erro de quantização. Quanto menor o período de amostragem e maiores as resoluções dos conversores A/D e D/A, menor será o erro de quantização. A Figura 2.3 mostra o efeito da quantização.

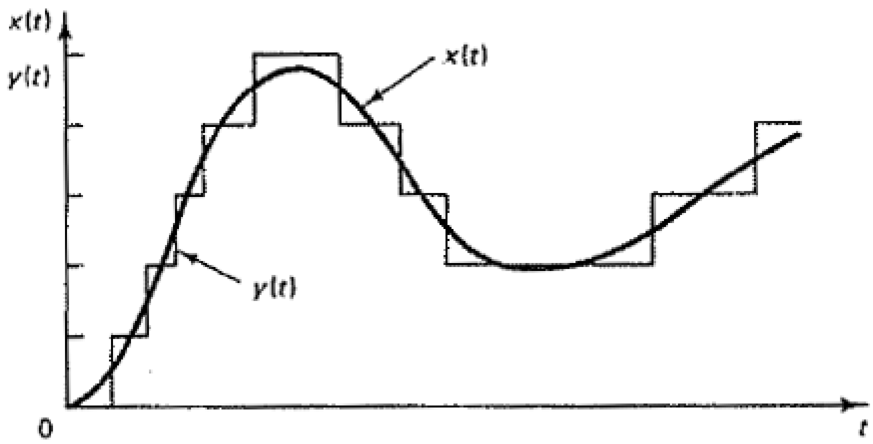


Figura 2.3 – Efeito da quantização

Se um sistema estiver representado pelas suas equações de Laplace, as fórmulas de recorrência que representam seu comportamento podem ser obtidas pela transformada Z e sua equivalência com a transformada de Laplace. A seguir vamos entender os princípios básicos da transformada Z.

Transformada Z

A transformada Z de uma função do tempo $x(t)$ considera apenas os valores amostrados de $x(t)$, isto é, $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, ..., onde T é o período de amostragem. A definição da transformada Z é:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

A expansão do somatório resulta na sequência:

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \cdots$$

Isso implica que a transformada Z de qualquer função contínua no tempo pode ser escrita na forma de uma sequência por simples inspeção. O termo z^{-k} na série indica a posição no tempo em que ocorre a amplitude $x(kT)$. Reciprocamente, se $X(z)$ for dado como uma sequência, a transformada Z inversa pode ser obtida por inspeção como uma sequência da função $x(kT)$ que corresponde aos valores da função $x(t)$ nos respectivos instantes do tempo. Se tivermos a fórmula fechada como a razão de dois polinômios em z, podemos calcular a sequência de valores através da fórmula de recorrência resultante. Mais adiante vamos ver um exemplo calculado numa planilha eletrônica (Excel).

Na análise de sistemas contínuos, usamos a transformada de Laplace, que considerando condições iniciais nulas, leva à importante propriedade das funções derivativas em que $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s)$. Isso nos permite encontrar a função de transferência de um sistema contínuo linear, dada a equação diferencial do sistema.

Para os sistemas discretos, a definição da transformada Z permite uma propriedade semelhante e de igual importância:

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}F(z)$$

Significa que a transformada inversa da transformada Z multiplicada por z^{-1} resulta na amostra do instante $k-1$. A prova vem da definição:

$$\mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k}$$

$$= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-(k-n)}$$

Definindo $m = k - n$, a equação fica:

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

Como $x(mT) = 0$ para $m < 0$, o limite inferior do somatório pode ser zero:

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

Com esse resultado, se temos uma função de transferência em Z, podemos facilmente obter a fórmula de recorrência que implementa a dinâmica expressa nessa função de transferência e a sua implementação como um sistema discreto em um computador é trivial. Vejamos dois exemplos:

1. Função $x(t) = e^{-at}$

$$E(z) \longrightarrow \boxed{\frac{z}{z-e^{-aT}}} \longrightarrow S(z)$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

$$S(z)(\,1 - z^{-1}e^{-aT}) = E(z)$$

$$S(z) - z^{-1}S(z)e^{-aT} = E(z)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$s(k) - s(k-1)e^{-aT} = e(k)$$

$$\boxed{s(k) \;=\; e(k) + s(k-1)e^{-aT}}$$

2. Função $x(t) = \; sen(at)$

$$E(z) \longrightarrow \boxed{\frac{z.sen(aT)}{z^2 - 2.z.\cos(aT) + 1}} \longrightarrow S(z)$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z.sen(aT)}{z^2 - 2.z.\cos(aT) + 1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z^{-1}.sen(aT)}{1 - 2.z^{-1}.\cos(aT) + z^{-2}}$$

$$S(z)\left(1 - 2.z^{-1}.\cos(aT) + z^{-2}\right) = \; E(z)(z^{-1}.sen(aT))$$

$$S(z) - 2.z^{-1}S(z).\cos(aT) + z^{-2}S(z) = \; E(z)z^{-1}.sen(aT)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$s(k) - 2.s(k-1).\cos(aT) + s(k-2) = \; e(k-1).sen(aT)$$

$$\boxed{s(k) = \; 2.\cos(aT).s(k-1) + sen(aT).e(k-1) - \; s(k-2)}$$

Fazendo a entrada ser a função impulso, ou seja, $e(k) = 1$ se $k = 0$, caso contrário $e(k) = 0$, que é a função cuja transformada Z é $E(z) = 1$, teremos uma série de valores $f(kT)$ para o exponencial e para a função seno, nos dois exemplos dados. Vide implementação no Excel.

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

Como foi visto, a transformada Z permite modelar sistemas dinâmicos, tal como a transformada de Laplace, e ainda permite a obtenção de uma equação algébrica recorrente que representa a dinâmica do sistema e é adequada para a implementação computacional. Normalmente os sistemas usam a Transformada de Laplace para a modelagem dinâmica. Então, se tivermos uma maneira de converter uma equação de Laplace para uma equação em Z, teremos um procedimento para a implementação digital desse sistema dinâmico. Isso pode ser usado para simulação de sistemas físicos, implementação de controle retroaliementado e filtros ativos. É uma ferramenta bastante usada na área de processamento digital de sinais.

Considere o sinal contínuo $f(t) = e^{-at}$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{1}{s+a}$. Os pólos de uma equação de transferência são os zeros do polinômio que ocorre no denominador. Neste caso então a equação possui um pólo em $s = -a$. A transformada Z de $f(kT)$, como vimos, é $F(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}$, cujo pólo está em $z = e^{-aT}$. Daí pode-se inferir uma relação entre Laplace e Z, pois essa equivalência entre os pólos é geral, com T sendo o período de amostragem:

$$z = e^{sT}$$

Uma outra forma de ver essa relação é no deslocamento exponencial no tempo da transformada de Laplace. Essa propriedade diz que a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$ é $f(t-a)$ para $t \geq a$. Ou seja, multiplicar por e^{-sT}, fazendo $a = T$, significa multiplicar por z^{-1}, ou seja, atrasa a função em T, tal como foi demonstrado nas propriedades da transformada Z.

Conversão de s para z:

A expressão $z = e^{sT}$ não é adequada para a implementação de sistemas discretos porque não é linear. Existem várias aproximações utilizadas para converter uma equação em s para uma equação em z. As duas mais simples são as baseadas na propriedade da transformada de Laplace com a derivação, chamada backward difference, e a integração, conhecido como método de Tustin.

Backward Difference

O método baseado na derivação leva em conta que a transformada inversa de $s.F(s)$ é a derivada do sinal no tempo. Em um sistema amostrado com intervalo de amostragem T, a derivada pode ser obtida aproximadamente como a razão entre as duas últimas amostras e T, ou seja:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(k) - f(k-1)}{T}$$

Tirando a transformada Z dessa expressão, obtemos:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{F(z) - z^{-1}F(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T}F(z)$$

Então o que em Laplace tem o mesmo efeito de derivação causado por $s.F(s)$, em Z é causado por $\frac{1-z^{-1}}{T}F(z)$. Portanto chegamos à relação:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Então, dado um sistema dinâmico em Laplace, se substituirmos a variável s por $\frac{1-z^{-1}}{T}$, obtemos uma fórmula de recorrência que implementa tal sistema dinâmico digitalmente.

Método de Tustin

O método Backward Difference tem um maior erro em relação ao de Tustin, já que este se adequa melhor comparado ao sinal contínuo, entretanto, para valores pequenos de T pode ficar instável, com grandes flutuações. Por isso o método Backward Difference é mais usado pela sua simplicidade e flexibilidade, embora seja menos preciso.

O método de Tustin é baseado na integração, operação que em Laplace é obtida multiplicando-se o sinal no domínio da frequência por $1/_s$. É obtido da seguinte maneira:

Suponha que $u(t)$ é a integral de um sinal $e(t)$. Em Laplace, isso pode ser escrito assim:

$$U(s) = \frac{1}{s}E(s)$$

Tomando tempos discretos, podemos escrever que:

$$u(kT) = \int_0^{kT} e(t)dt = \int_0^{kT-T} e(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t)dt$$

Que pode ser reescrito como:

$$u(kT) = u(kT-T) + área\ \ sob\ \ e(t)\ \ no\ \ último\ \ período\ \ T$$

O método de Tustin consiste em aproximar essa área pela área de um trapézio, considerando uma linha ligando os dois últimos pontos da curva. Por simplicidade, escrevendo $u(kT)$ como $u(k)$ e $u(kT-T)$ como $u(k-1)$, obtemos:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)]$$

Ou, tirando a transformada Z:

$$U(z) = \frac{T}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right).E(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}.E(z)$$

Então a equivalência entre Laplace e Z é dada por:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Implementação de um Controlador PID

O tradicional controle PID tem a seguinte equação com as três componentes proporcional, integrativa e derivativa:

$$u(t) = G_p e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}$$

Em Laplace:

$$U(s) = G_p E(s) + \frac{1}{sT_i}E(s) + sT_d E(s)$$

$$U(s) = \left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)E(s)$$

Temos a função de transferência $\left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$:

$$E(s) \longrightarrow \boxed{\left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)} \longrightarrow U(s)$$

Vamos aplicar a aproximação por Backward Difference, substituindo $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$, para obter a equação em Z:

$$U(s) = \left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)E(s)$$

$$U(z) = \left(G_p + \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_i} + \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_d\right)E(z)$$

$$U(z) = \left(G_p + \frac{T}{(1-z^{-1})T_i} + \frac{(1-z^{-1})T_d}{T}\right)E(z)$$

$$U(z) = \frac{G_pTT_i(1-z^{-1}) + T^2 + T_dT_i(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})TT_i}E(z)$$

$$(1-z^{-1})TT_iU(z) = \left(G_pTT_i(1-z^{-1}) + T^2 + T_dT_i(1-2z^{-1}+z^{-2})\right)E(z)$$

$$(TT_i - TT_iz^{-1})U(z) = \left(\left(G_pTT_i + T^2 + T_dT_i\right) - \left(G_pTT_i + 2T_dT_i\right)z^{-1} + T_dT_iz^{-2}\right)E(z)$$

$$TT_iU(z) - TT_iz^{-1}U(z) = \left(G_pTT_i + T^2 + T_dT_i\right)E(z) - \left(G_pTT_i + 2T_dT_i\right)z^{-1}E(z) + T_dT_iz^{-2}E(z)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$TT_iu(k) - TT_iu(k-1) = \left(G_pTT_i + T^2 + T_dT_i\right)e(k) - \left(G_pTT_i + 2T_dT_i\right)e(k-1) + T_dT_ie(k-2)$$

$$TT_iu(k) = TT_iu(k-1) + \left(G_pTT_i + T^2 + T_dT_i\right)e(k) - \left(G_pTT_i + 2T_dT_i\right)e(k-1) + T_dT_ie(k-2)$$

$$u(k) = \frac{TT_iu(k-1)}{TT_i} + \left(\frac{G_pTT_i}{TT_i} + \frac{T^2}{TT_i} + \frac{T_dT_i}{TT_i}\right)e(k) - \left(\frac{G_pTT_i}{TT_i} + \frac{2T_dT_i}{TT_i}\right)e(k-1) + \frac{T_dT_i}{TT_i}e(k-2)$$

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + \left(G_p + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e(k) - \left(G_p + \frac{2T_d}{T}\right)e(k-1) + \frac{T_d}{T}e(k-2)}$$

Implementação em Linguagem C no Arduino:

A Listagem 1 abaixo mostra uma implementação simples do controle PID em Arduino, que possui uma parte não mostrada do código para converter a variável pwm em um acionamento de um motor BLDC. A equação do PID foi implementada somente com números inteiros, por isso ela teve que ser rearranjada para permitir o resultado correto. Esse código utiliza a medição do tempo pela função millis() executada em um loop, podendo haver variações no período de amostragem. Essa imprecisão afeta o resultado do controlador, além também da medição da variável velocidade, que está sendo feita da mesma maneira. Uma solução melhor deve incluir um timer e o mecanismo de interrupções para um período de amostragem mais preciso.

```
//Parametros do PID
#define Gp 100
#define Ti 2000
#define Td 25

const long interval = 150;
unsigned long previousMillis = 0;
long u0=0, e0=0, e1=0, e2=0;
long setpoint;
int pwm = 255;
int trimpotval;
int analogInPin = A0;

...

void loop() {
     unsigned long currentMillis = millis();

     trimpotval = analogRead(analogInPin);
     setpoint = map(trimpotval, 0, 1023, 0, 12000);

     currentMillis = millis();
     if(currentMillis - previousMillis >= interval) {
          previousMillis = currentMillis;

          vel = (counter*20000)/interval;  // Velocidade em rpm;
                                           // counter incrementa a cada 120 graus.
                                           // Portanto conter/(3T) = rotacoes por segundo.
                                           // counter*20/T = rpm; interval esta em milisegundos.
          counter = 0;

          //PID
          e2 = e1;
          e1 = e0;
          e0 = setpoint - vel;
          u0 = u0 + (Gp*(e0-e1))/1000 + (e0*interval)/Ti + (Td*e0 - 2*Td*e1 + Td*e2)/interval;
          //Equação implementada somente com inteiros, por isso a divisão por 1000 para Kp

          if(u0>12000) u0=12000;
          if(u0<0) u0=0;

          pwm = map(u0, 0, 12000, 255, 0);
     }
     ...
}
```

Listagem 1 – Implementação em C do controlador PID em um Arduino. A medição de tempo usada não é a ideal e pode gerar imprecisões.

Referências:

[1] Prof. Arthur Mattuck - Differential Equations 18.03 - MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03-differential-equations-spring-2010/

[2] Katsuhiko Ogata - Discrete-Time Control Systems 2nd Edition - Prentice Hall Int. – 1995

[3] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini - Feedback Control of Dynamic Systems - Sixth Edition - Chapter 8 - Digital Control – Pearson 2011