

# Introdução à Lógica Fuzzy

Sistemas Embarcados e Comp. Ubíqua

Luciano Bertini

Alessandro Copetti



# Conjuntos

- Classificação em conjuntos
- É uma decisão binária :
  - aceitar (“=1”)
  - rejeitar (“=0”)
- Pode-se expressar a decisão de classificação de um conjunto “A” com relação ao Universo de Discurso “X” como uma função característica (ou função de pertinência) da forma:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

# Conjuntos

- Exemplo:
  - $A = \{5, 8, 12, 15, 36\}$
  - “12 pertence a A” = 1 (verdadeiro)
  - “13 pertence a A” = 0 (falso)
- Os elementos são classificados de forma bem definida
- Cada elemento pertence ou não pertence a um determinado grupo (*crisp set*)

# Conjuntos

- Na lógica booleana não há o “meio-termo”; entretanto, nosso raciocínio e a linguagem natural usa esse “meio-termo” na tomada de decisões
- Se em vez de assumir valores no intervalo discreto “ $\{0,1\}$ ” a função de pertinência assumir valores no intervalo contínuo “[0,1]”, então o conjunto “A” denomina-se **Conjunto Nebuloso**

# Conceitos de Lógica Fuzzy

- Técnica inteligente que tem como objetivo modelar o modo aproximado de raciocínio, imitando a habilidade humana de tomar decisões em um ambiente de incerteza e imprecisão
- Permite que os sistemas inteligentes de controle e suporte à decisão lidem com informações imprecisas ou nebulosas

# Sistemas Fuzzy

- Podem ser construídos a partir de regras formuladas por especialistas da aplicação em particular (base teórica)
- Estes sistemas utilizam uma lógica multivalorada que permite **graus de pertinência**
  - por ex.: conceito linguístico quente (da temperatura ambiente)
- O conceito de conjuntos nebulosos (*fuzzy sets*) foi introduzido por Lofti A. Zadeh em meados da década de 60

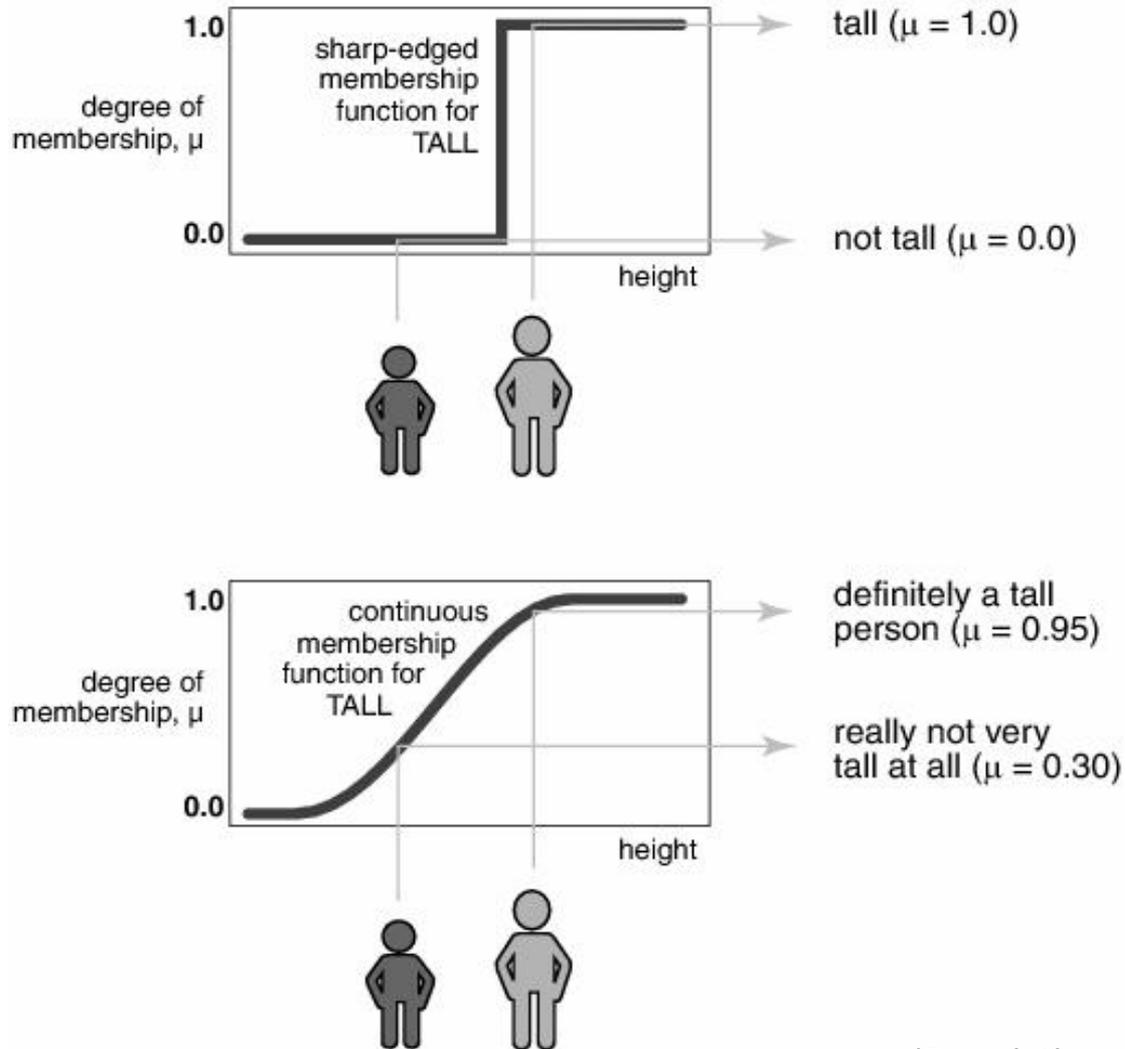
# Vantagens da lógica Fuzzy

- Facilidade na especificação das regras de controle, em linguagem próxima à natural
  - o uso de variáveis linguísticas nos deixa mais perto do pensamento humano
- Robusta porque não requer entradas precisas
- Modificada facilmente, pois é baseada em regras

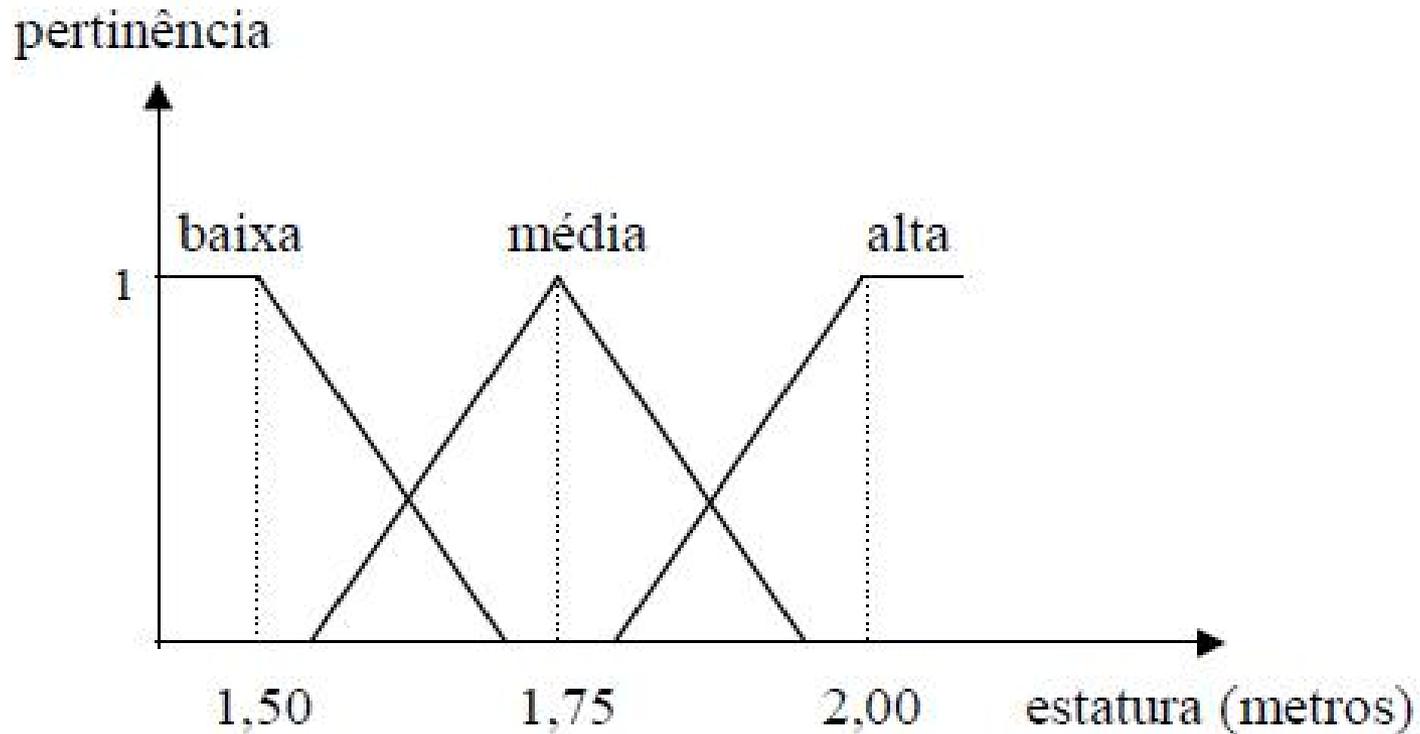
# Novos conceitos

- Conjuntos Fuzzy
- Grau de Pertinência a um Conjunto
- Regras Fuzzy
- Inferência Fuzzy

# Grau e função de pertinência

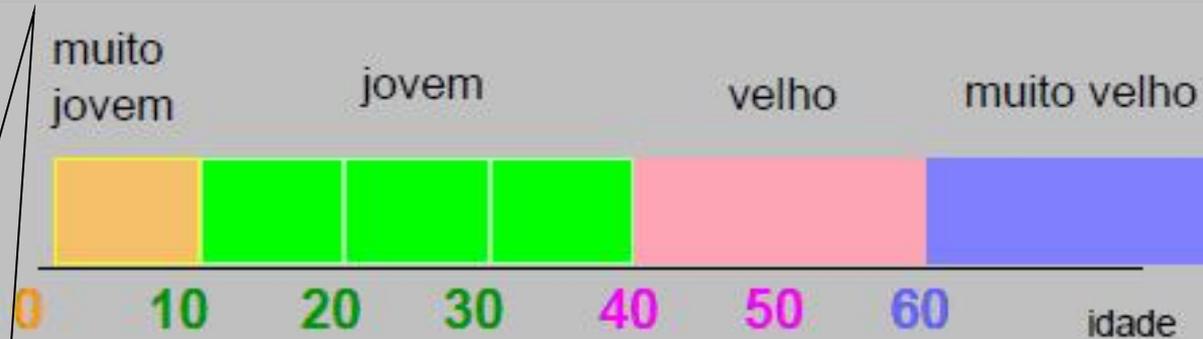


# Grau e função de pertinência



A seguir é apresentado um  
exemplo que ilustra esses  
conceitos  
(Velasco/PUC Rio)

# Conjuntos e Regras Rígidas

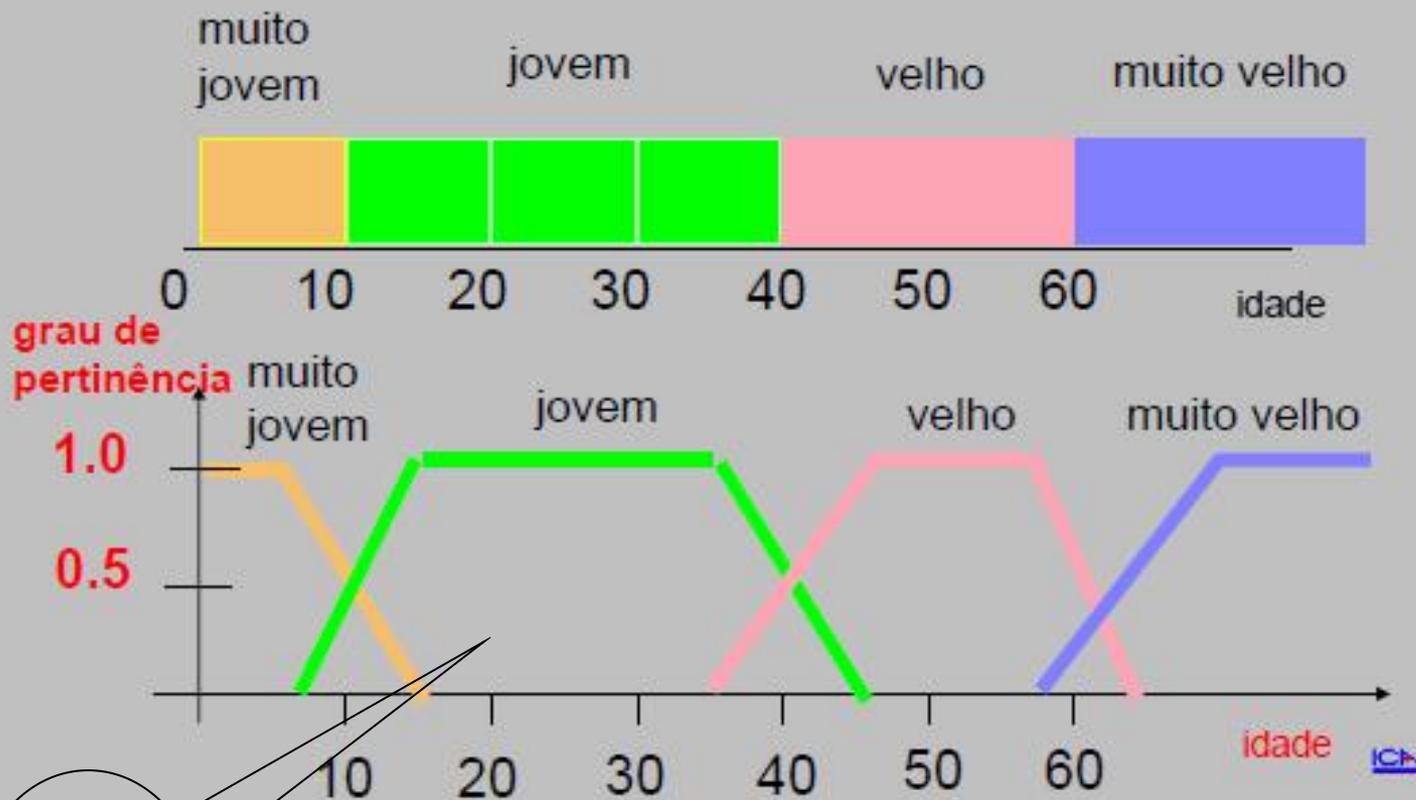


Qualificadores  
ou  
modificadores  
de predicado

Se idade igual a 40 então  
sou velho.

Se idade igual a 39 então  
sou jovem.

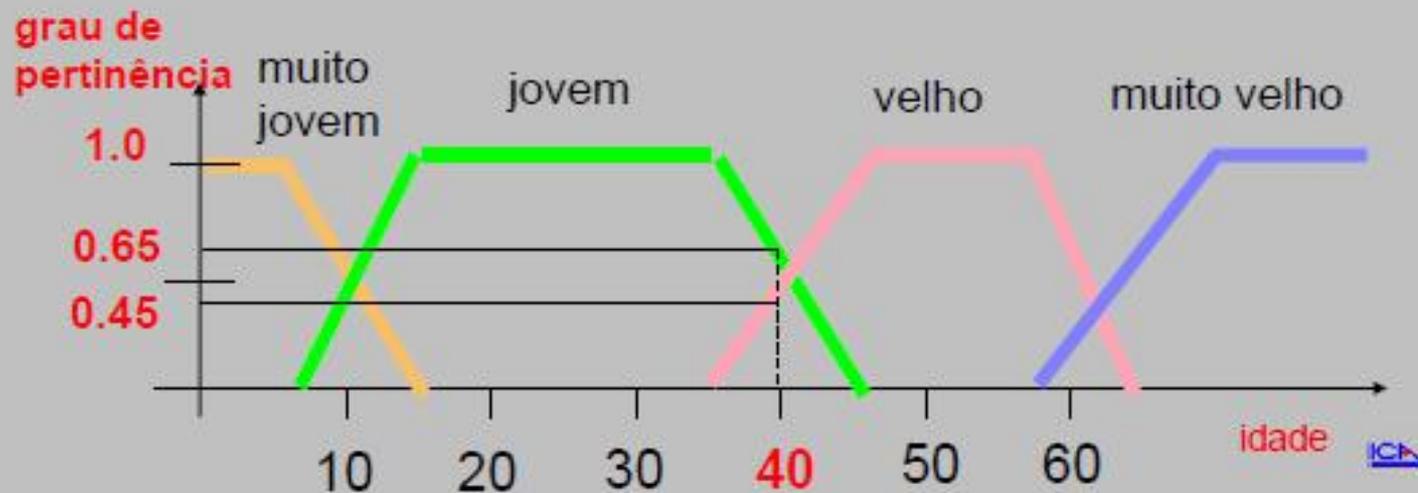
# Conjuntos *Fuzzy*



Conjunto fuzzy

# Conjuntos *Fuzzy*

Pedro tem 40 anos.  
Ele é **jovem** ou **velho**?



# Conjuntos *Fuzzy*

Pedro tem 40 anos.

Ele é *jovem* ou *velho*?

- ⇒ Pedro é *jovem* E *velho*,  
ao mesmo tempo  
(com graus diferentes)
- ⇒ Os **graus de pertinência**  
demostram que Pedro não é  
*nem tão jovem, nem tão velho*

# Sistema para Análise de Seguro Saúde

## Regras Fuzzy

- **SE** idade é **meia-idade** **E** pressão é **baixa** **ENTÃO** seguro é **baixo**
- **SE** idade é **jovem** **E** pressão é **alta** **ENTÃO** seguro é **alto**

valendo-se dos “antecedentes” é produzido um limite de ativação para o “consequente” da regra em estudo

# Conjuntos Fuzzy

SE idade é *meia-idade* E pressão é *baixa* ENTÃO seguro é *baixo*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Min.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

# Conjuntos Fuzzy

SE idade é *jovem* E pressão é *alta* ENTÃO seguro é *alto*

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

# Conjuntos Fuzzy

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

$$\text{Insurance} = (700 \times 0.6 + 800 \times 0.5) / (0.6 + 0.5) = 745.45$$

# Lógica Fuzzy - conceitos

- **Grau de pertinência** (*membership*): um elemento pertence a um conjunto em uma escala que varia entre zero e um (inclusive)
- **Função de pertinência** (*membership function*): função que informa o grau de pertinência de um elemento em relação a um conjunto

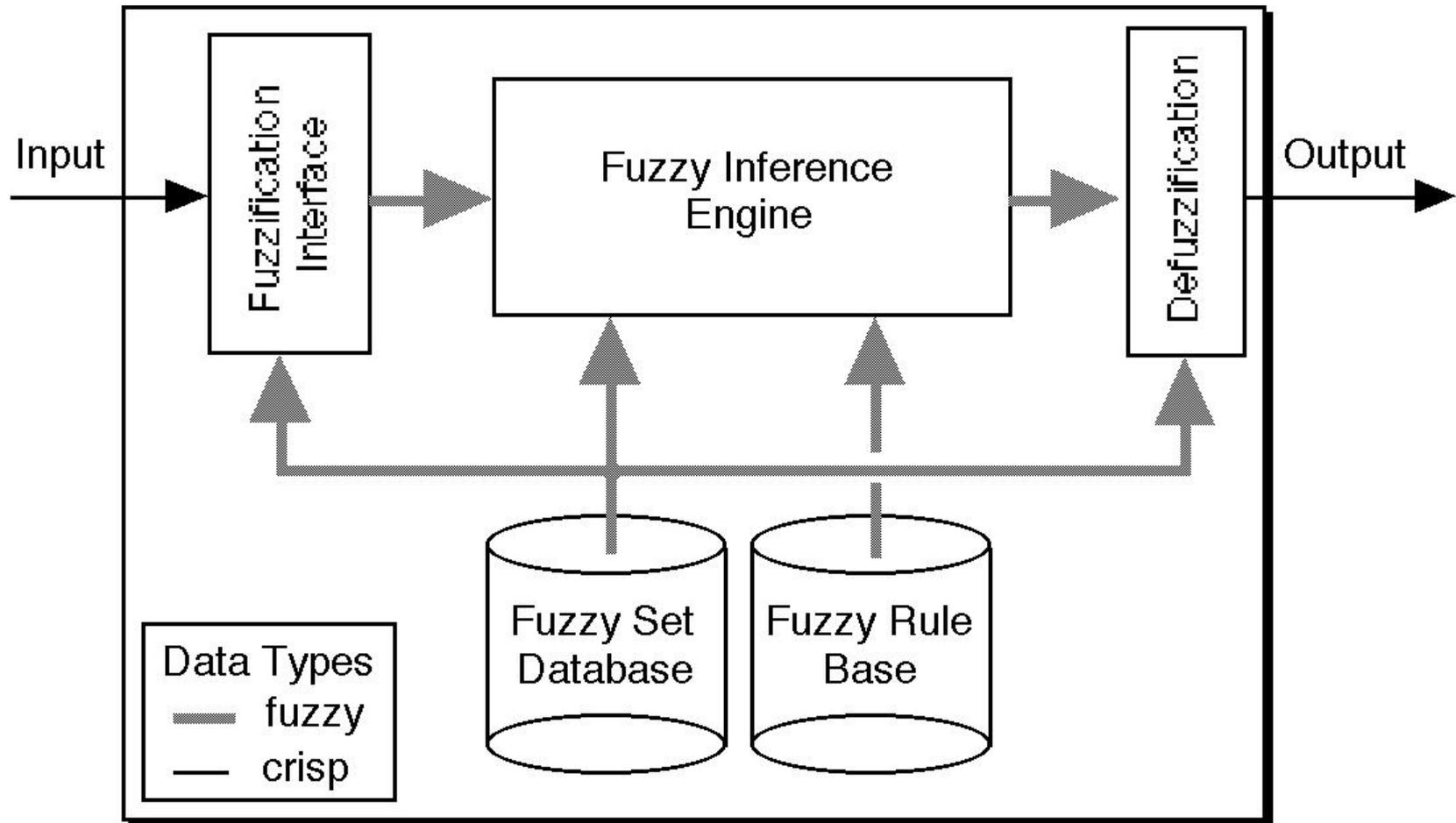
# Lógica Fuzzy - conceitos

- **Variáveis linguísticas**: expressas em linguagem natural, porém tratadas de forma numérica. Ex: temperatura, pressão, altura
- **Termos linguísticos**: caracterizam a variável linguística. Ex: alto, médio, baixo
- **Conjuntos fuzzy**: modelam o comportamento das variáveis linguísticas e seus respectivos termos linguísticos

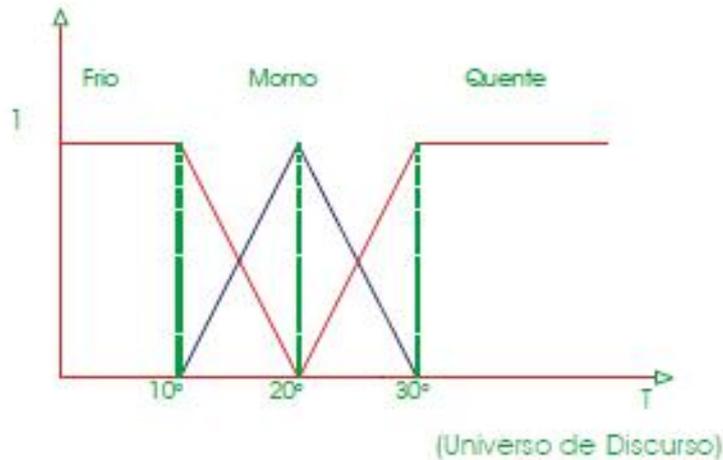
# Sistemas Fuzzy

- Sistemas especialistas baseados em regras fuzzy
- Regras no formato:
  - IF <antecedente> THEN <consequente>
- A regra é disparada quando o antecedente para as entradas atuais gera graus de pertinência não-nulos
- O grau de pertinência de  $x$  em  $A$  estabelece o grau de ativação de uma determinada regra
  - quanto mais a *entrada* for compatível com o *antecedente* da regra, mais peso terá o seu consequente no resultado final

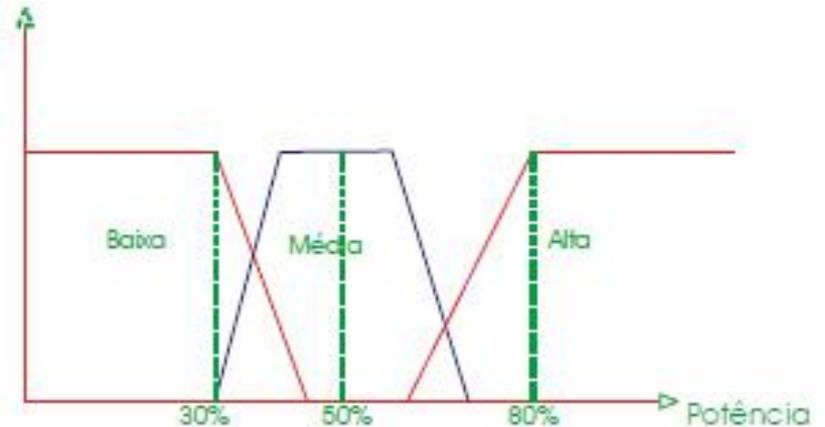
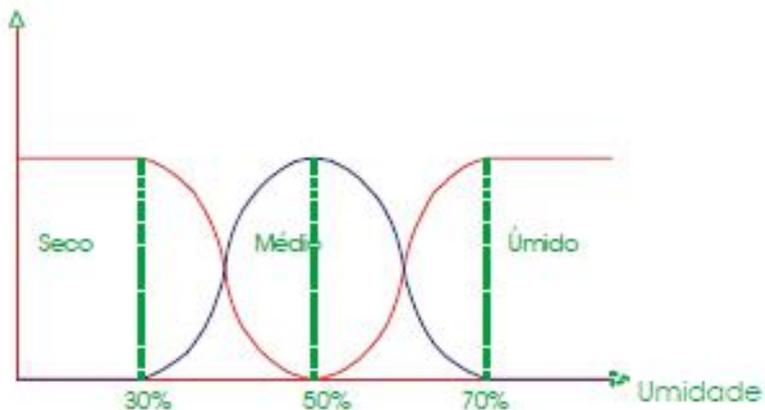
# Inferência Fuzzy



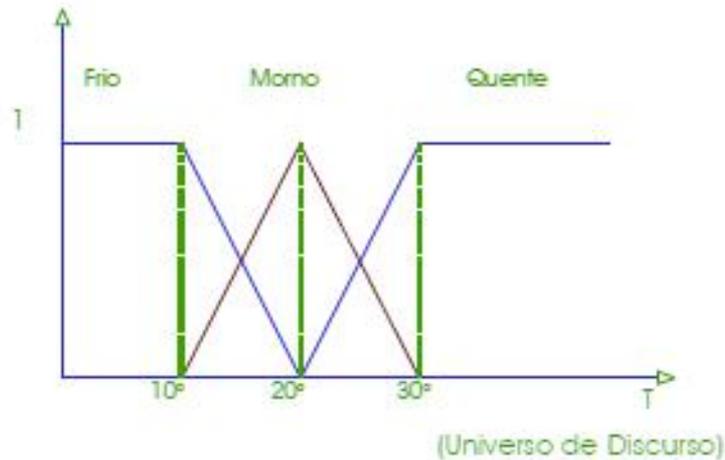
# Exemplo Fuzzy - 1/2



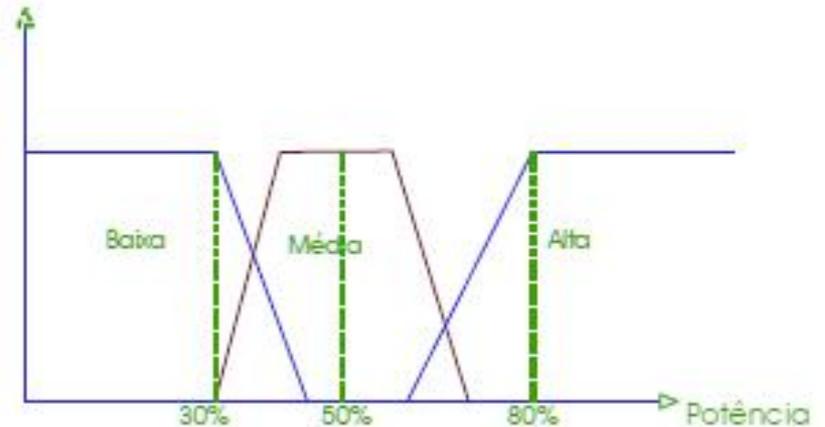
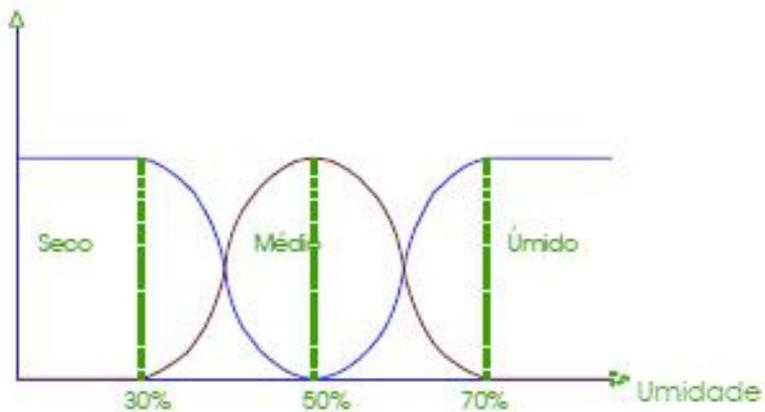
Considere um sistema de ar condicionado para um ambiente de escritório.  
Deseja-se levar em conta a **temperatura** e a **umidade** relativa do ar para acionar o aparelho com economia de energia e conforto.



# Exemplo Fuzzy - 2/2



- Se T é Frio e U é Seco então P é Baixa
- Se T é Quente e U é Úmido então P é Alta
- Se T é Morno e U é Médio então P é Alta
- Se T é Quente e U é Seco então P é Média



Um outro exemplo também  
ilustra esses conceitos:

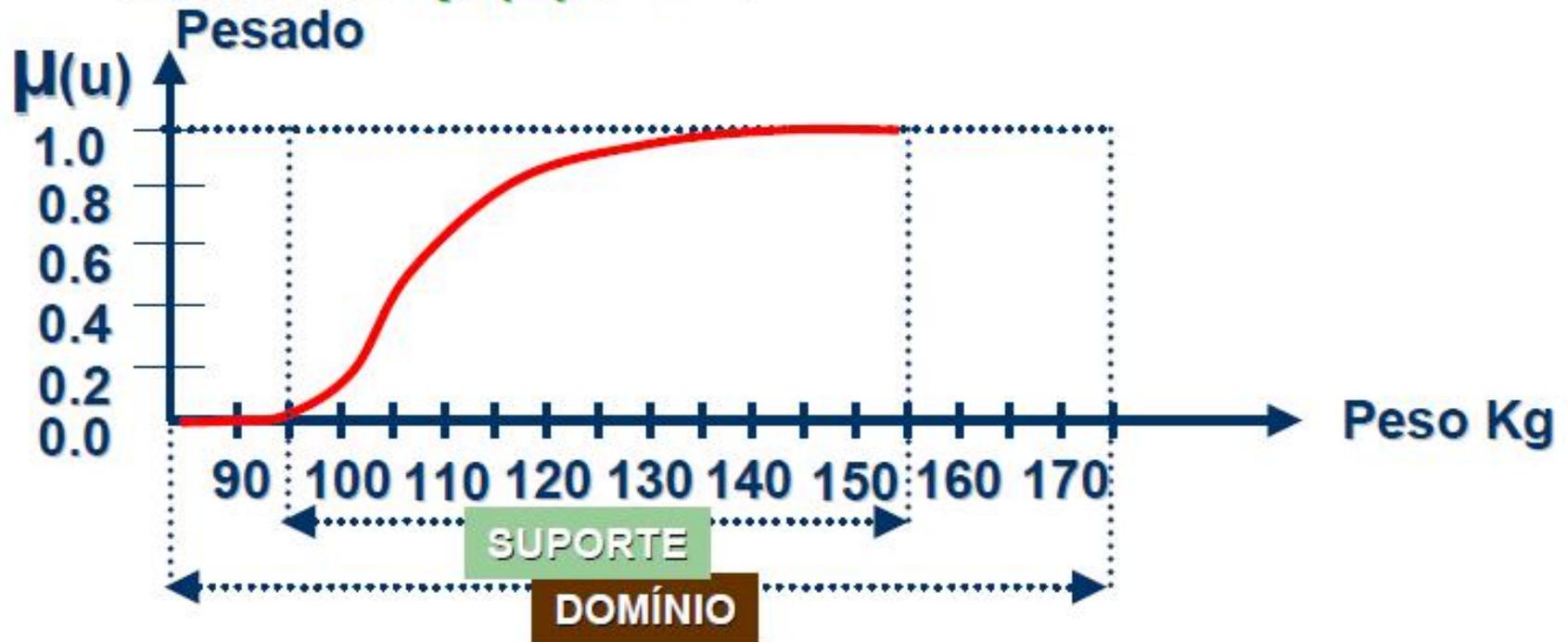
## Dinner for two

<https://www.mathworks.com/help/fuzzy/fuzzy-inference-process.html>

# Conjuntos Fuzzy

## Conjunto Suporte

- É a faixa efetiva de um conjunto Fuzzy que apresenta valores de " $\mu(u) \neq 0$ ".



$$\text{Supp}(A) = \{u \mid \mu_A(u) > 0 \text{ e } u \in U\}$$

# Conjuntos Fuzzy

- Um **conjunto Fuzzy genérico A** em um **universo de discurso U** é definido por uma **função de pertinência  $\mu_A(u)$**  que assume valores em um intervalo **{0,1}**.

$$- \mu_{A(u)} : U \rightarrow \{0,1\}$$

- O **conjunto Fuzzy A** em **U** é então representado por um conjunto de **pares ordenados**.

Conjunto Fuzzy

$$- A = \{ \mu_{A(u)} / u \} = \{ (\mu_{A(u)}, u) \mid u \in U \}$$

Função de Pertinência (MF)

Universo ou Universo de discurso

# Conjuntos Fuzzy

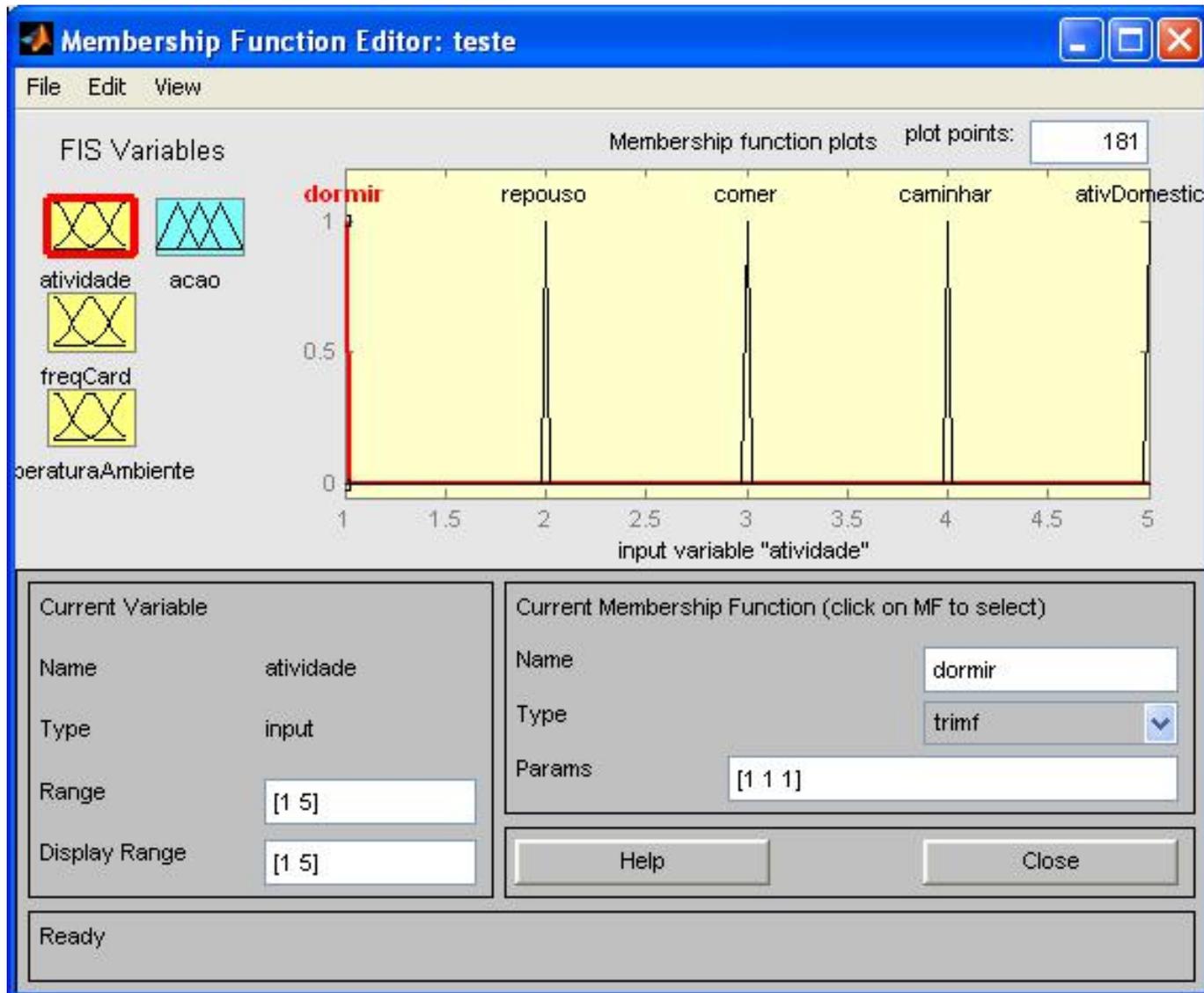
- Os subconjuntos fuzzy mais utilizados são aqueles que possuem uma função de pertinência regular
  - isto é, sem mudanças bruscas que mostram claramente a passagem progressiva da não-satisfação da propriedade à qual eles estão associados
  - o triângulo e o trapézio representam bem estes tipos de subconjuntos

# Um exemplo de sistema Fuzzy no Matlab

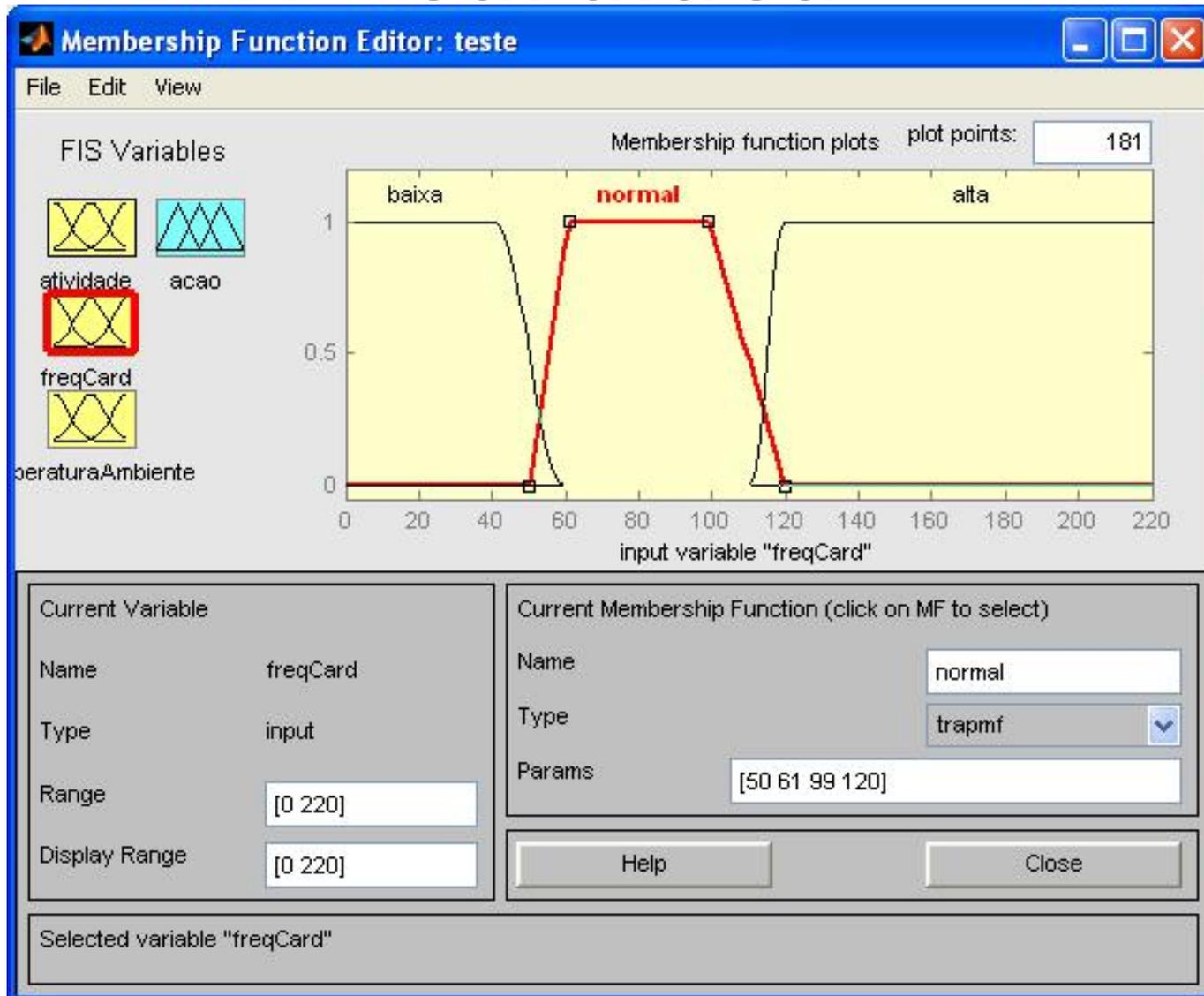
# Exemplo de Fuzzy no Matlab

- Sistema de monitoramento dos sinais vitais de um paciente em casa
  - se o paciente está realizando uma atividade doméstica e a frequência cardíaca é alta então é uma situação normal
- Outro exemplo nessa área pode ser encontrado em (Chen & Pham, 2000, p. 271)

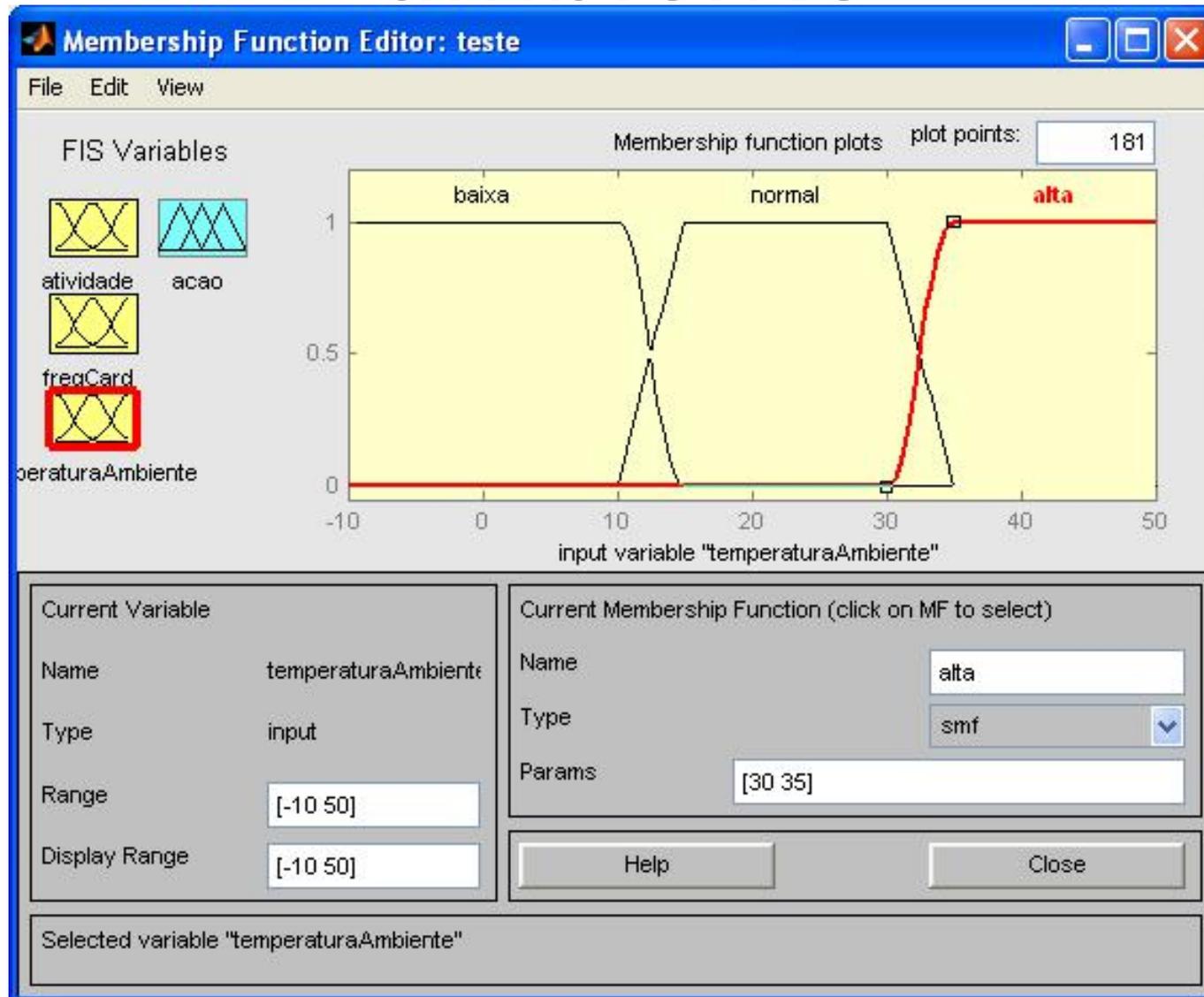
# Variável 'atividade'



# Variável 'frequência cardíaca'

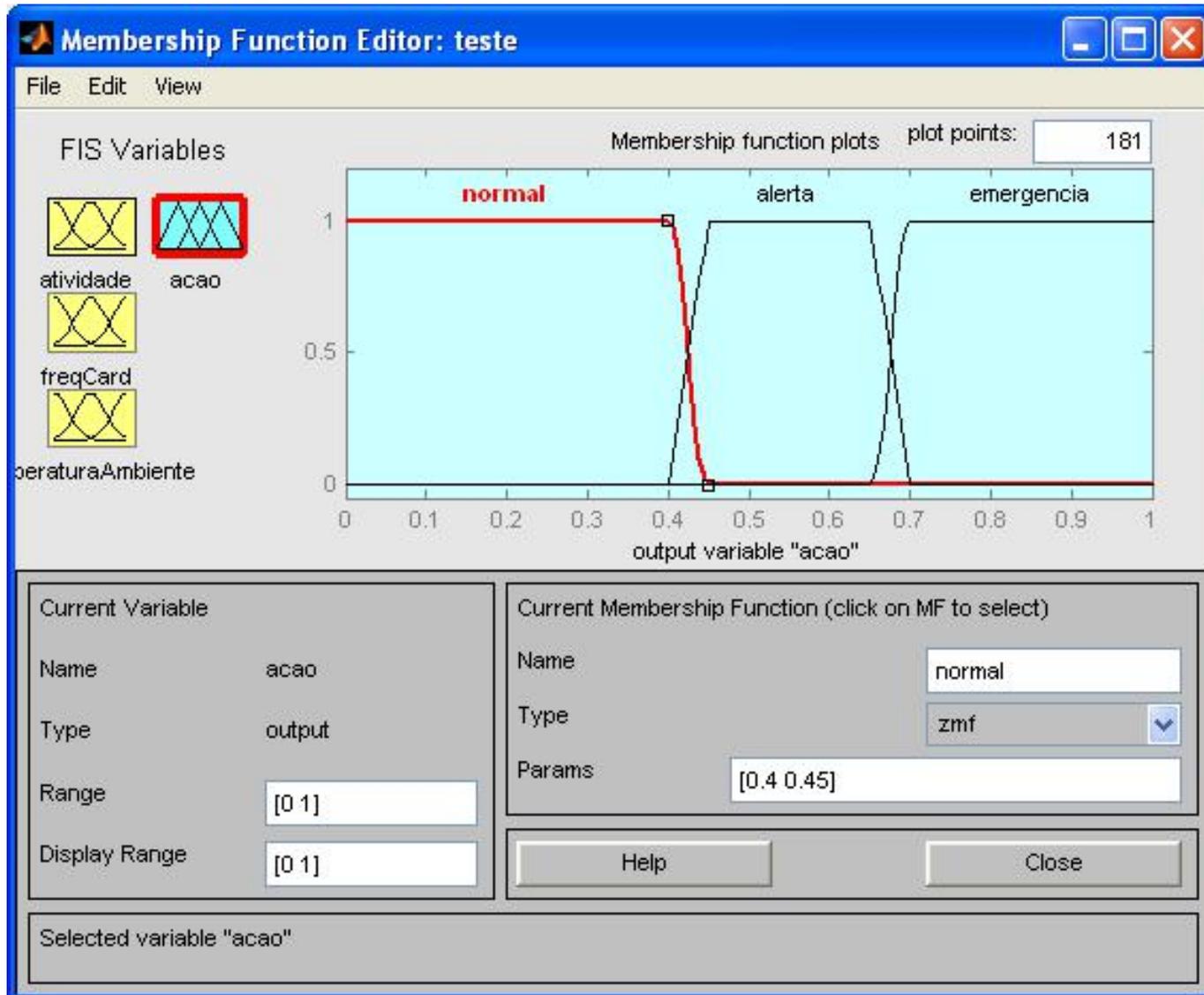


# Variável 'temperatura ambiente'



# Variável 'ação'

(estado/situação do paciente)



# Regras

The screenshot shows a window titled "Rule Editor: teste" with a menu bar (File, Edit, View, Options) and a list of three rules:

1. If (atividade is ativDomestica) and (freqCard is alta) then (acao is normal) (0.4)
2. If (atividade is repouso) and (freqCard is alta) then (acao is alerta) (1)
3. If (atividade is repouso) and (freqCard is normal) then (acao is normal) (1)

Below the list is a configuration interface for a rule, divided into "If" and "Then" sections. The "If" section has three conditions:

- Condition 1: "atividade is" with a dropdown menu showing "dormir", "repouso", "comer", "caminhar", "ativDomestica", and "none".
- Condition 2: "and freqCard is" with a dropdown menu showing "baixa", "normal", "alta", and "none".
- Condition 3: "and temperaturaAmbie" with a dropdown menu showing "baixa", "normal", "alta", and "none".

Each condition has a checkbox labeled "not" below it. The "Then" section has one action: "acao is" with a dropdown menu showing "normal", "alerta", "emergencia", and "none", and a checkbox labeled "not" below it.

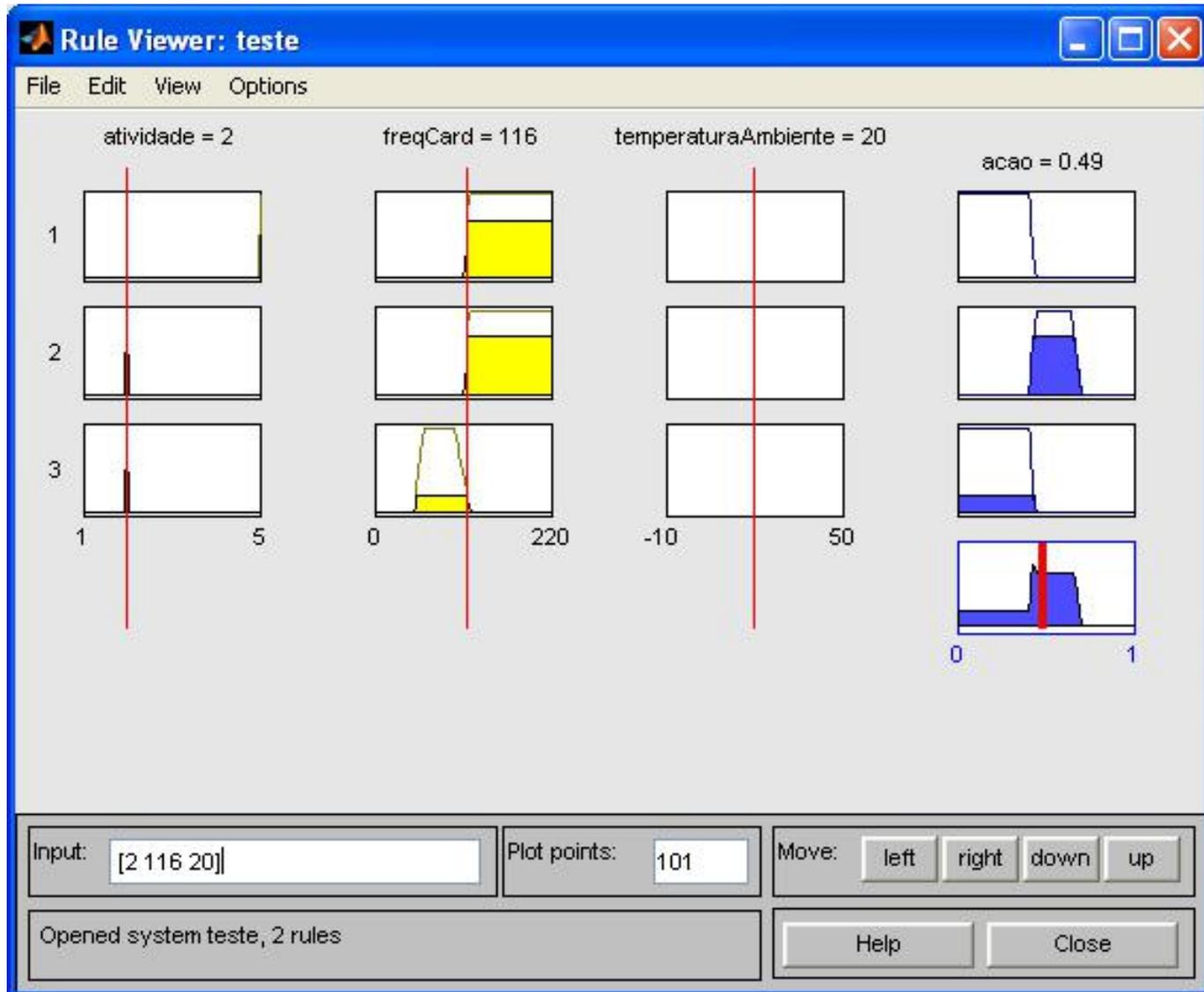
At the bottom left, there is a "Connection" section with radio buttons for "or" and "and" (selected). To the right is a "Weight:" field with the value "1".

At the bottom center, there are buttons for "Delete rule", "Add rule", and "Change rule". To the right are navigation arrows "<<" and ">>".

At the bottom right, there are "Help" and "Close" buttons.

A status bar at the bottom left contains the text "The rule is deleted".

# Avaliação das regras



# Interpretando regras

1. **IMPLICAÇÃO:**  
aplica o resultado  
para o  
consequente

IF  $x$  é A AND/OR  $y$  é B then  $z$  é C

IF  $x$  é K AND/OR  $y$  é B then  $z$  é D

3. **DEFUZZIFICAÇÃO:**  
atribui um valor para  
a saída

2. **AGREGAÇÃO:**  
agrega conjuntos  
fuzzy de cada regra

# Defuzzificação

(conversão fuzzy-> escalar)

- Obtenção do valor numérico da saída
- Métodos ou técnicas de defuzzificação mais utilizados:
  - centro de gravidade ou centróide; aka: centro de massa
  - bissetor (dividir em duas partes iguais)
  - média dos máximos

# Defuzzificação

(conversão fuzzy-> escalar)

- **Defuzzificação**

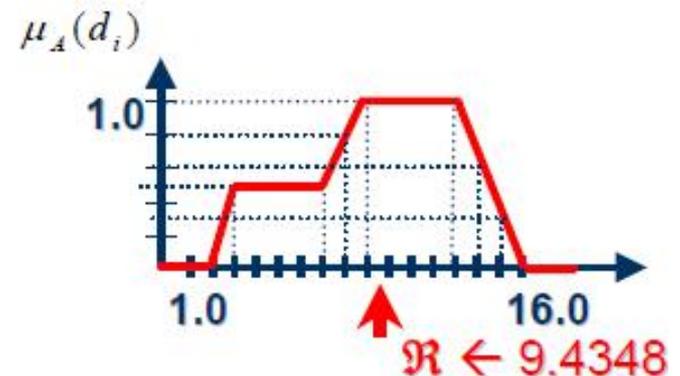
- Transformação da **forma Fuzzificada** para **forma Determinística**, determinando o valor real da saída.

- **Métodos:**

- **Centroide**

- Encontra o **ponto de equilíbrio** da região Fuzzy calculando a **média ponderada das Regiões**.

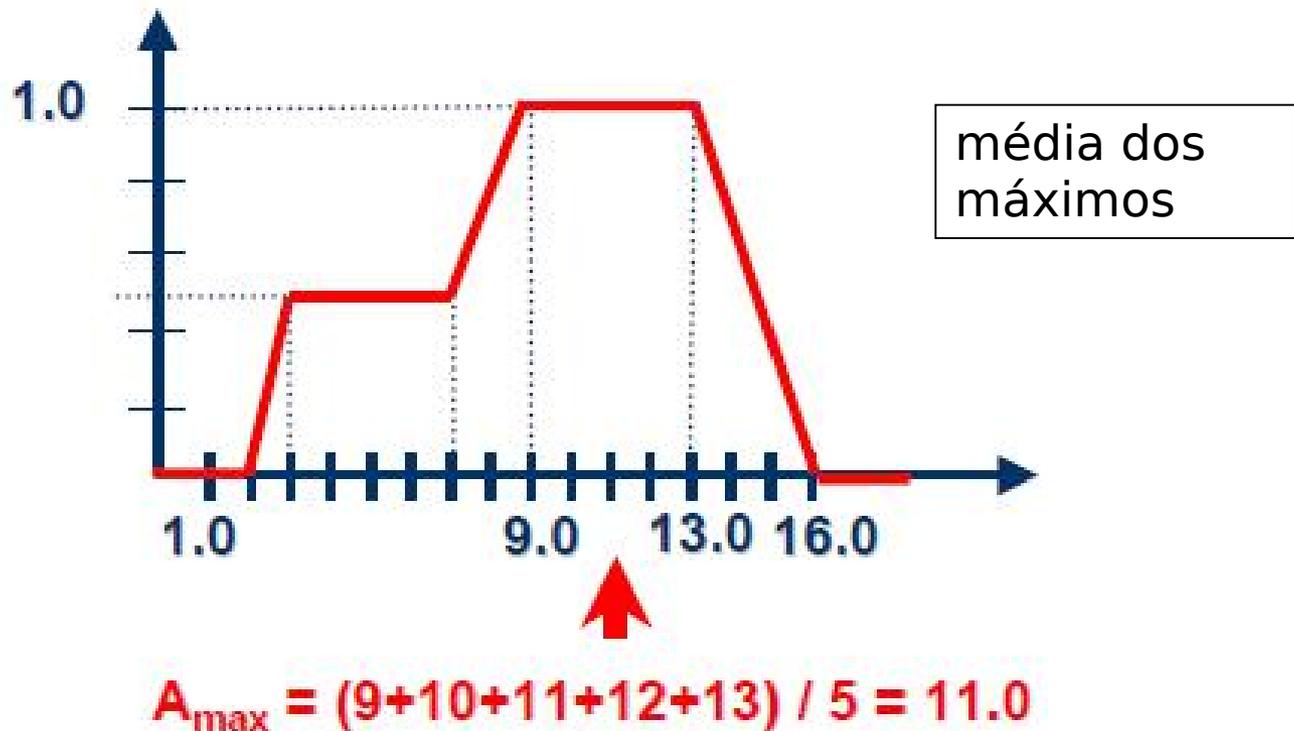
$$\mathfrak{R} \leftarrow \frac{\sum_{i=0}^n d_i \mu_A(d_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(d_i)}$$



$$\mathfrak{R} \leftarrow (0*0+1*0+2*0+3*0.5+4*0.5+5*0.5+6*0.5+7*0.5+8*0.8+9*1+10*1+11*1+12*1+13*1+14*0.6+15*0.3+16*0) / (0+0+0+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.8+1.0+1.0+1.0+1.0+1.0+0.6+0.3+0.0) = 86.8 / 9.2 = 9.4348$$

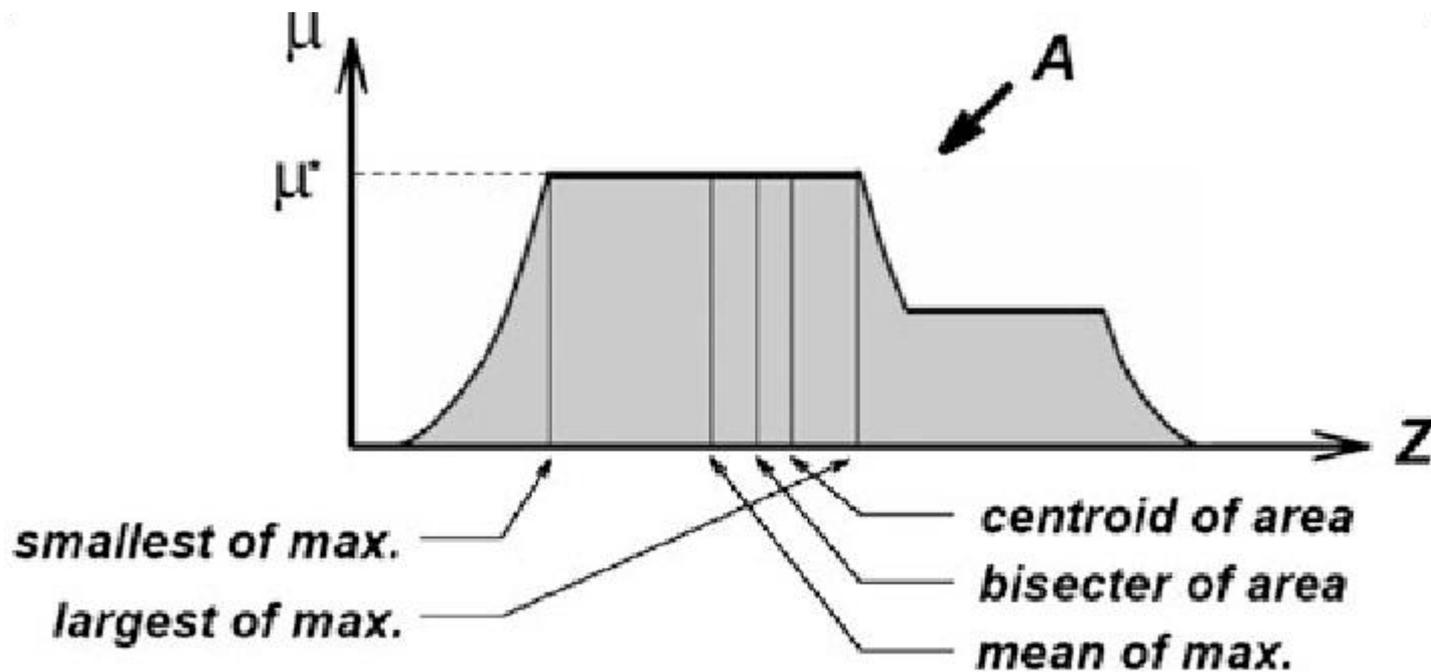
# Defuzzificação

(conversão fuzzy-> escalar)

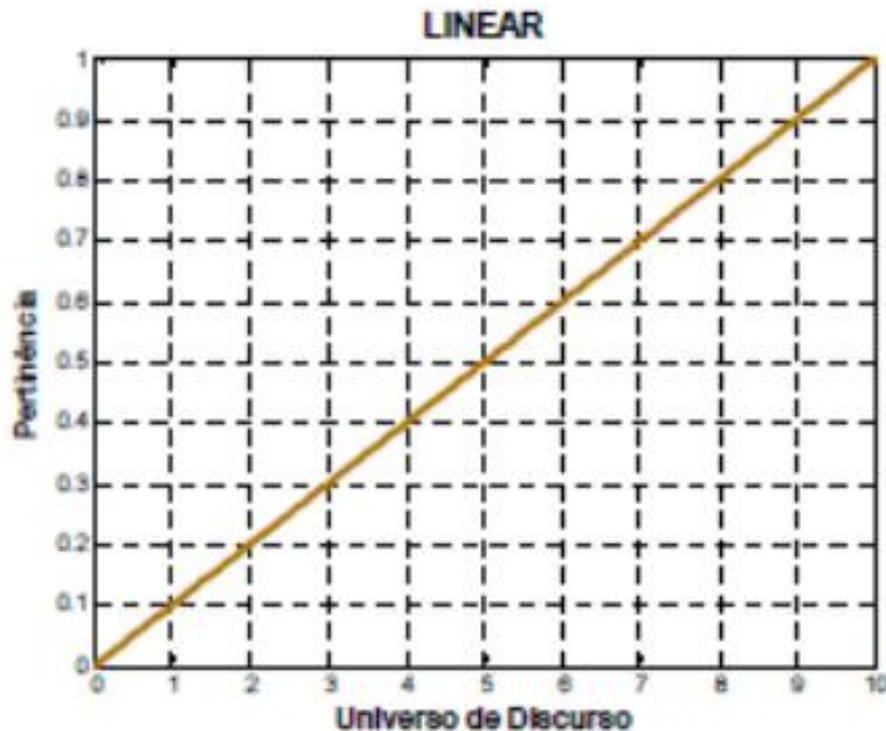


# Defuzzificação

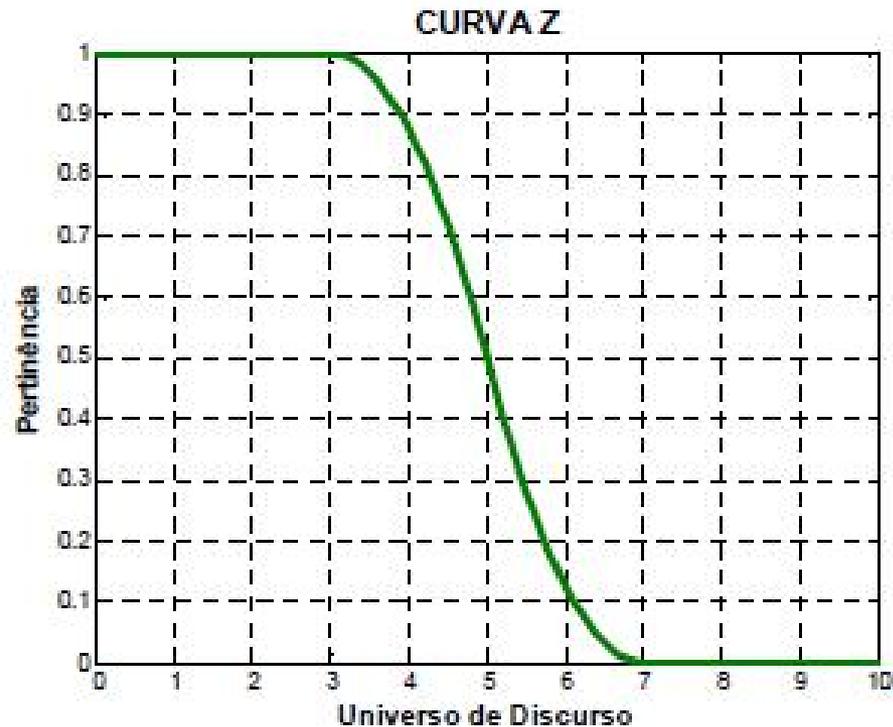
(conversão fuzzy-> escalar)



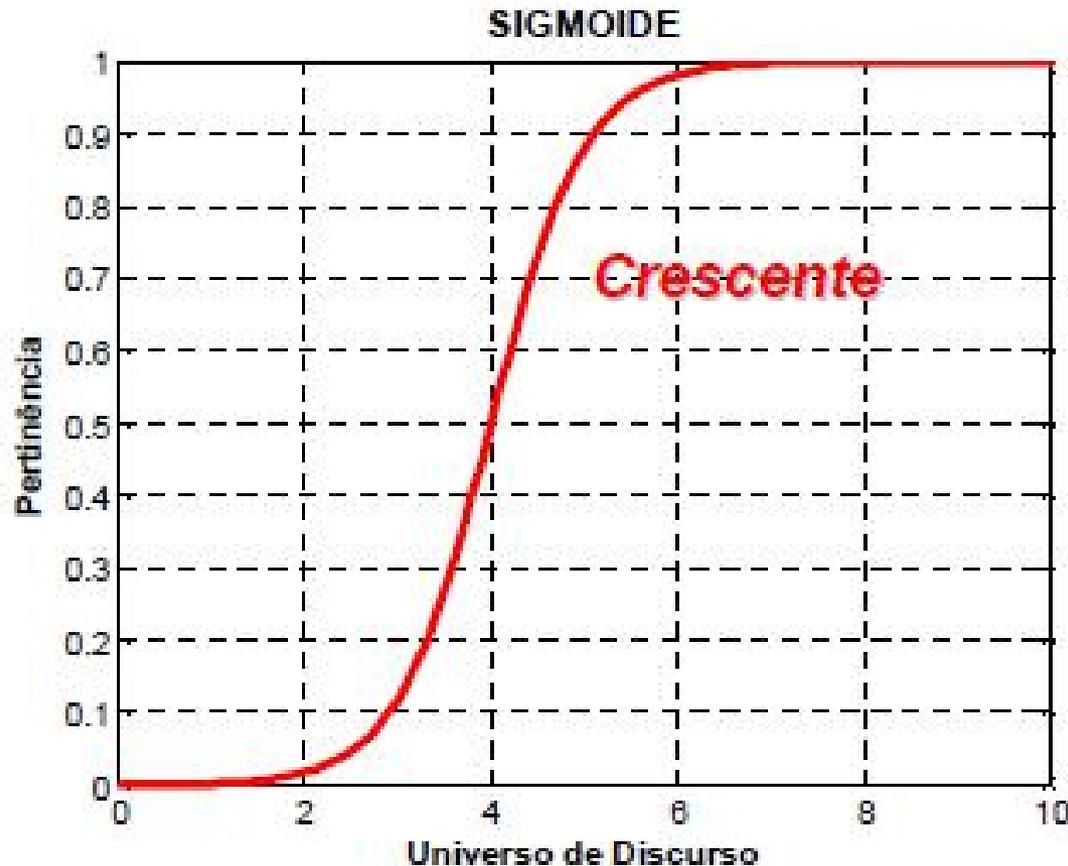
# Funções de pertinência: Linear



# Funções de pertinência: Curva Z

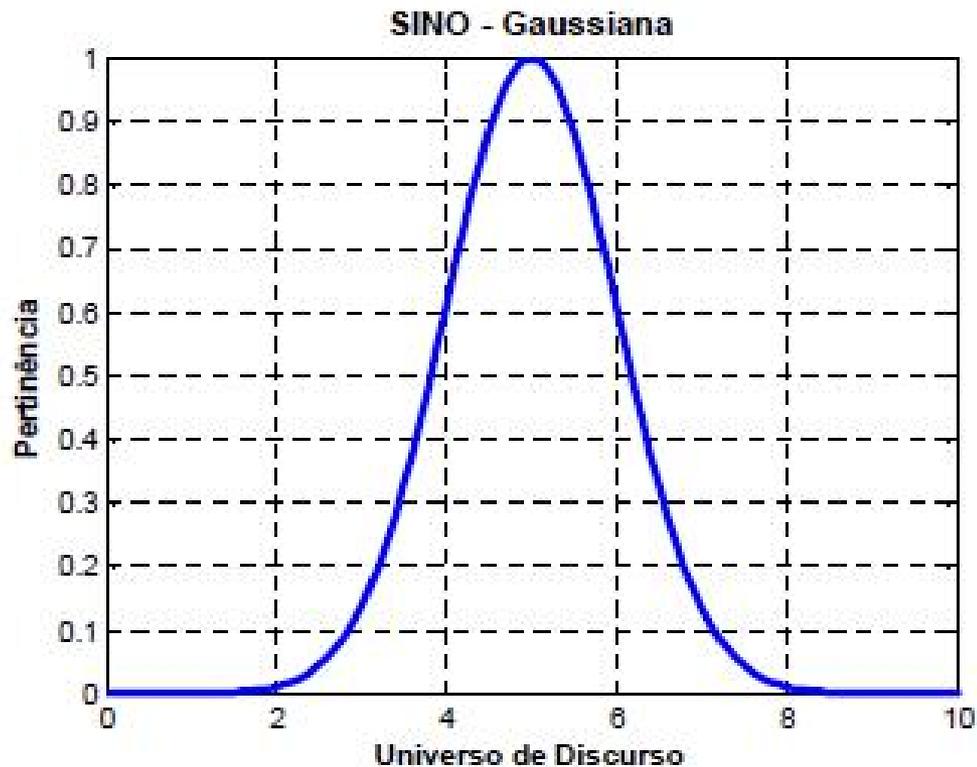


# Funções de pertinência: Sigmóide

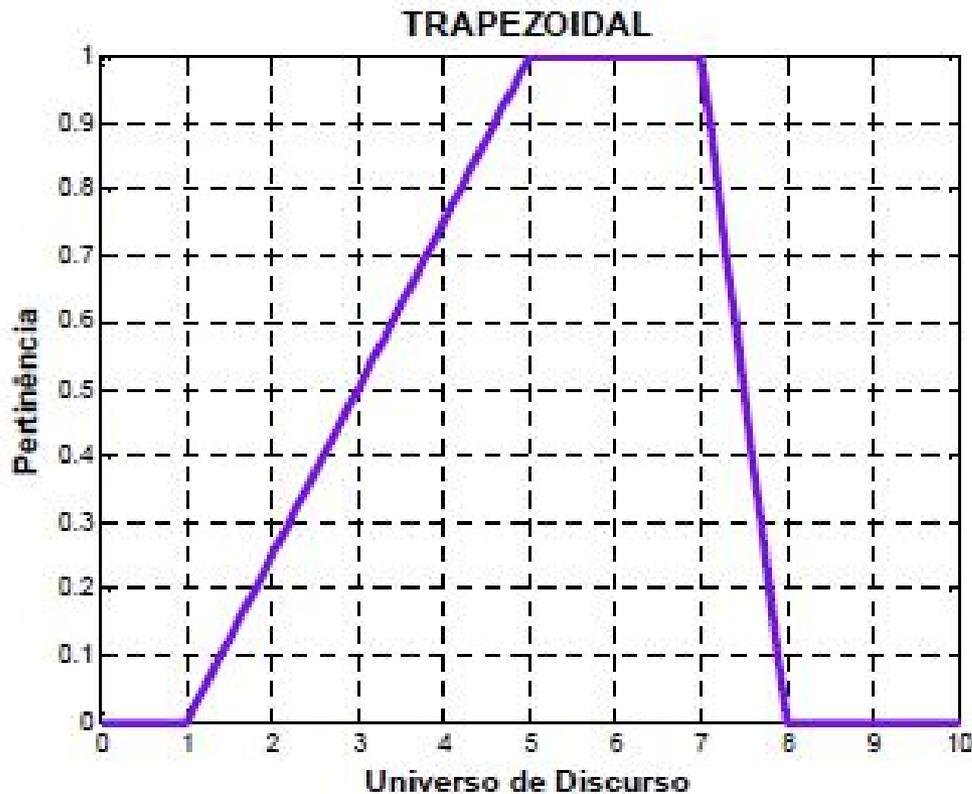


$$f(x, a, c) = \frac{1}{1 + \varepsilon^{-a(x-c)}}$$

# Funções de pertinência: Sino-Gaussiana

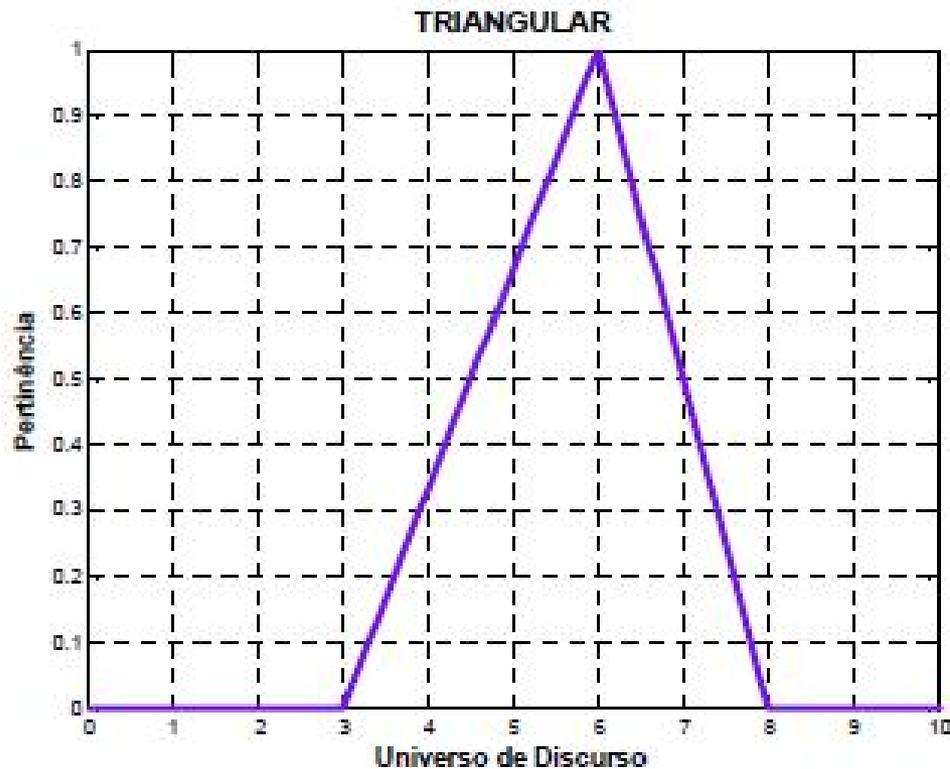


# Funções de pertinência: Trapezoidal



$$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

# Funções de pertinência: Triangular



$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

# Operações

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**AND**

A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**OR**

A	not A
0	1
1	0

**NOT**

# Operações

A	B	$\min(A,B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**AND**

A	B	$\max(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

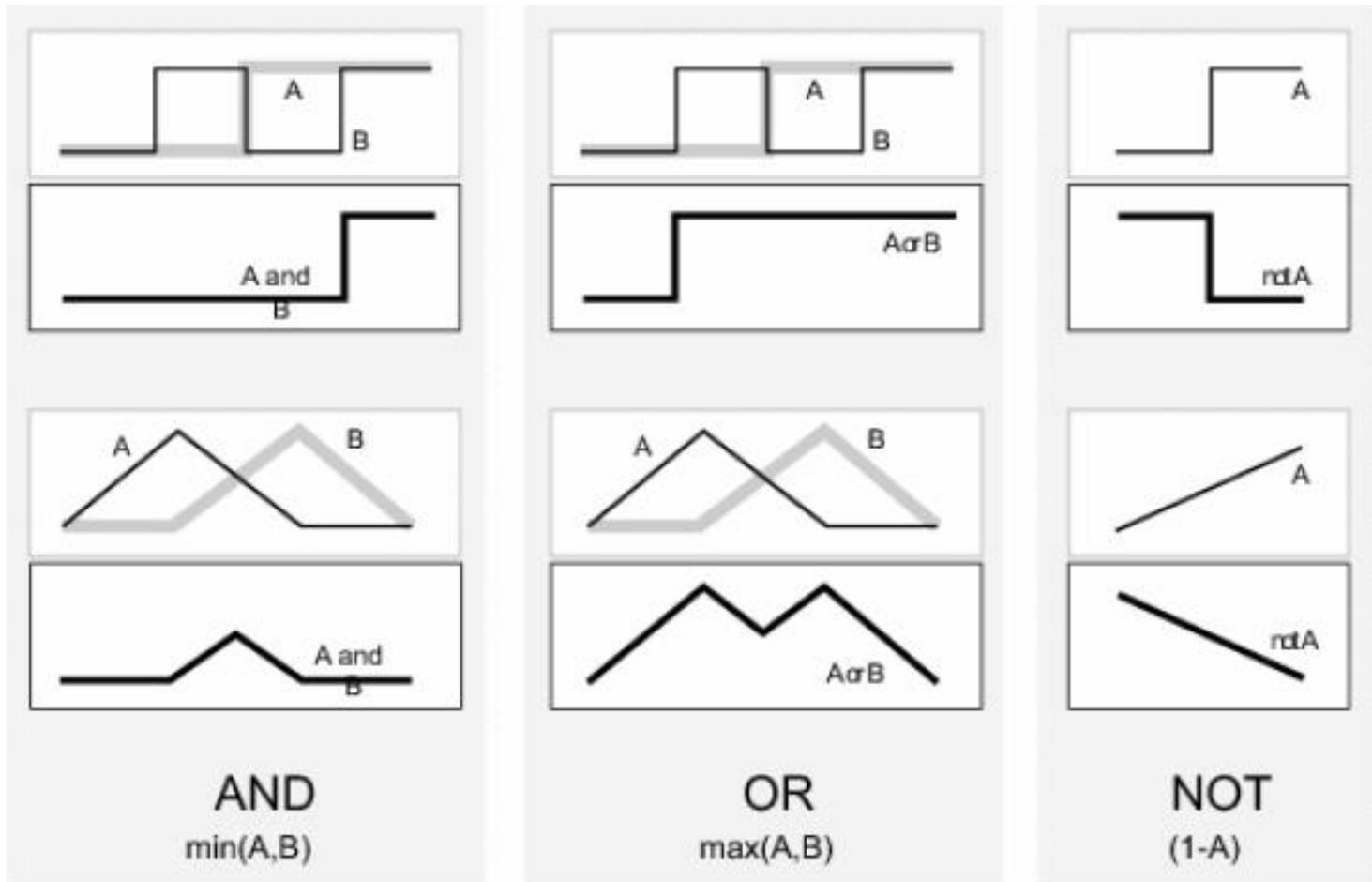
**OR**

A	$1 - A$
0	1
1	0

**NOT**

Operações Fuzzy: substituição das operações lógicas *and*, *or* e *not*, pelas operações *min*, *max* e *complemento*.

# Operações



AND = Interseção ou conjunção; OR = união ou disjunção; NOT = complemento aditivo

# Operações

- Operações básicas sobre conjuntos fuzzy:
  - União (o operador *max* é o + utilizado p/ definí-la)
  - Intersecção (o operador *min* é o + utilizado)
  - Complemento
  - Negação
- Operações semelhantes aos dos conjuntos tradicionais

# Operações com conjuntos Fuzzy

– Sejam **A** e **B** dois **Conjuntos Fuzzy** em um universo **U**.

- **Conjunto vazio:**

- $A = \emptyset$  se e somente se  $\forall u \in U, \mu_A(u) = 0$

- **Complemento  $\sim A$  :**

- $\mu_{\sim A}(u) = 1 - \mu_A(u)$

- **Involução  $\sim(\sim A)$ :**

- $\sim(\sim A) = A \rightarrow \sim(\mu_{\sim A}(u)) = 1 - (1 - \mu_A(u)) = \mu_A(u)$

(inversa de si própria)

# Operações com conjuntos Fuzzy

- **Conjuntos iguais:**

- $\mathbf{A = B}$  se e somente se  $\forall u \in U, \mu_A(u) = \mu_B(u)$

- **A subconjunto de B:**

- $\mathbf{A \subset B}$  se  $\forall u \in U, \mu_A(u) < \mu_B(u)$

- **Interseção:**

- $\mathbf{A \cap B} \rightarrow \mu_{A \cap B}(u) = \text{MIN} [\mu_A(u), \mu_B(u)] \quad \forall u \in U$

- **União :**

- $\mathbf{A \cup B} \rightarrow \mu_{A \cup B}(u) = \text{MAX} [\mu_A(u), \mu_B(u)] \quad \forall u \in U$

# Operações com conjuntos Fuzzy

- **Comutatividade:**

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

- **Associatividade:**

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **Distributividade:**

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

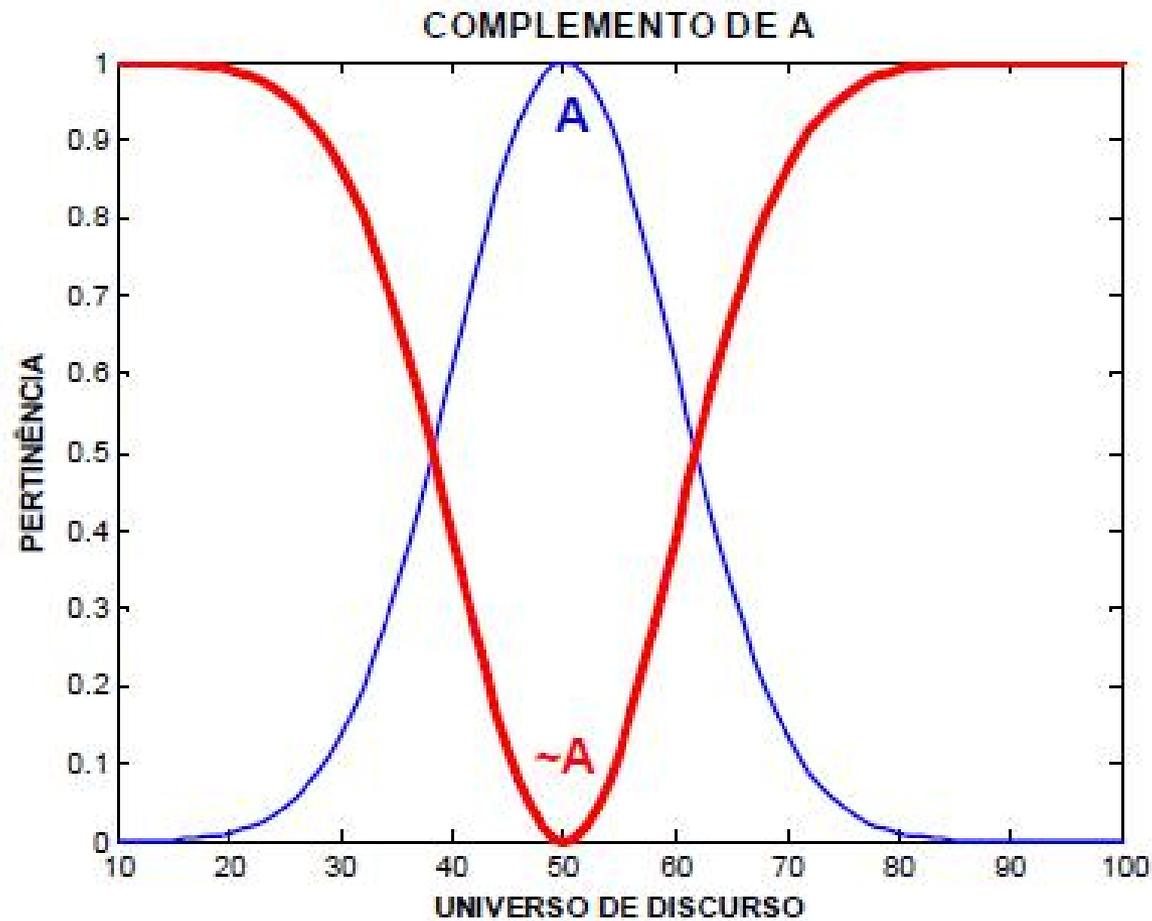
- **Idempotência:**

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

(é o resultado de sua composição consigo mesmo )

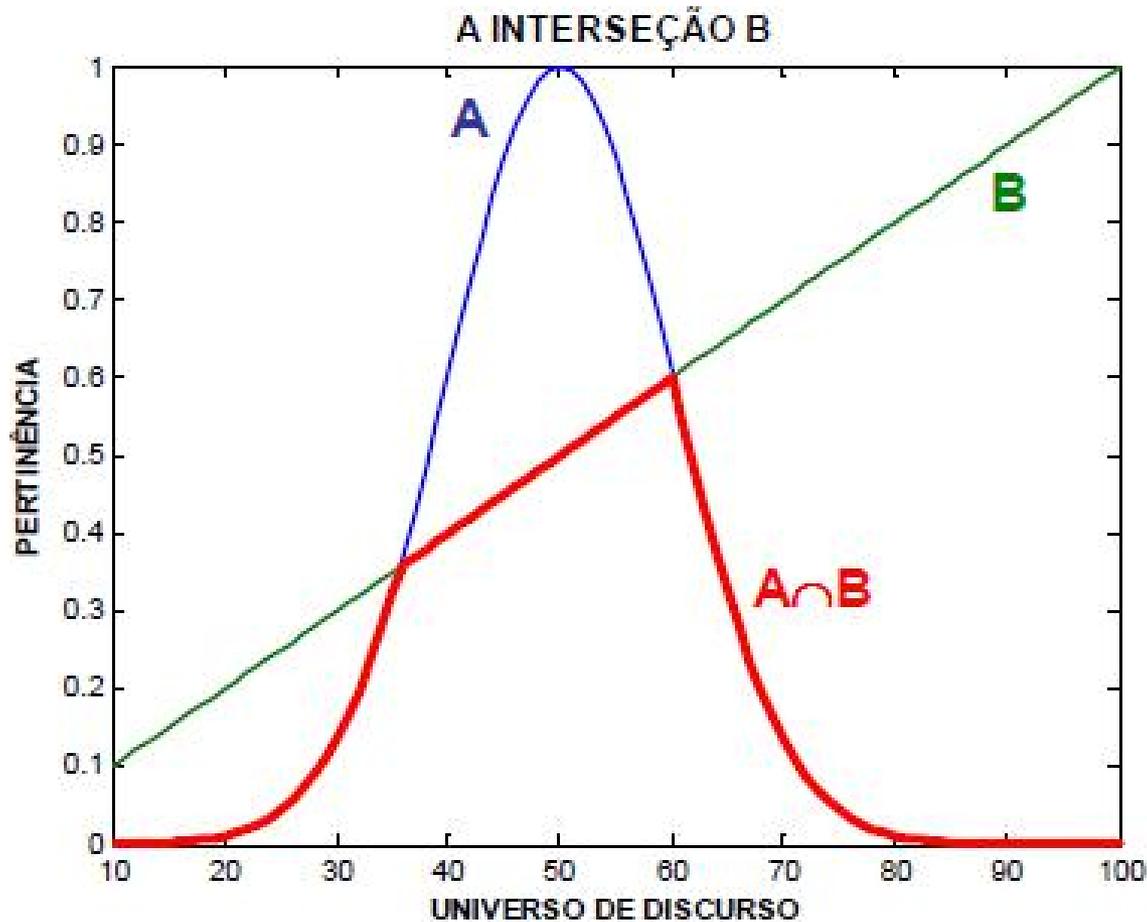
# Operações com conjuntos Fuzzy

## Fuzzy

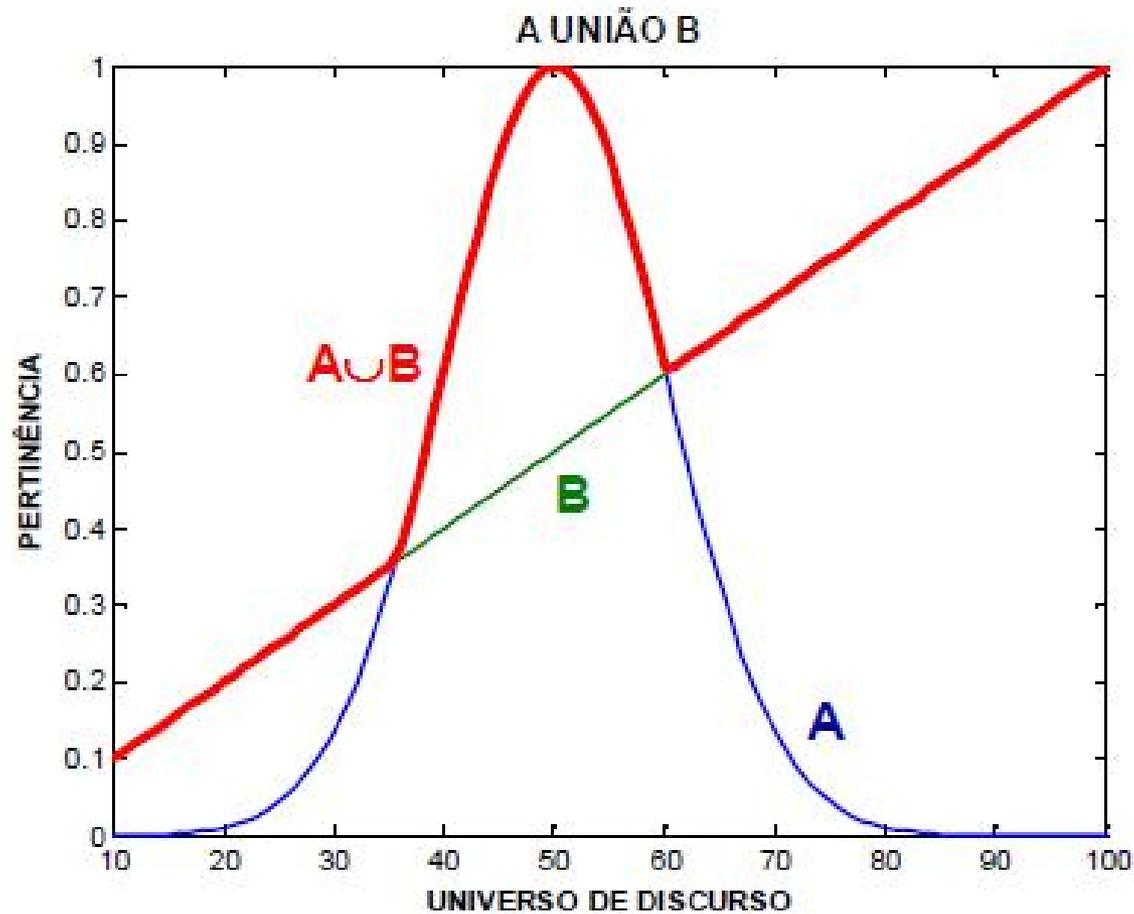


# Operações com conjuntos Fuzzy

## Fuzzy



# Operações com conjuntos Fuzzy



# Operações com conjuntos Fuzzy

- A interseção de dois conjuntos fuzzy A e B é geralmente especificada por um mapeamento binário  $T$ , que agrega duas funções de pertinência:

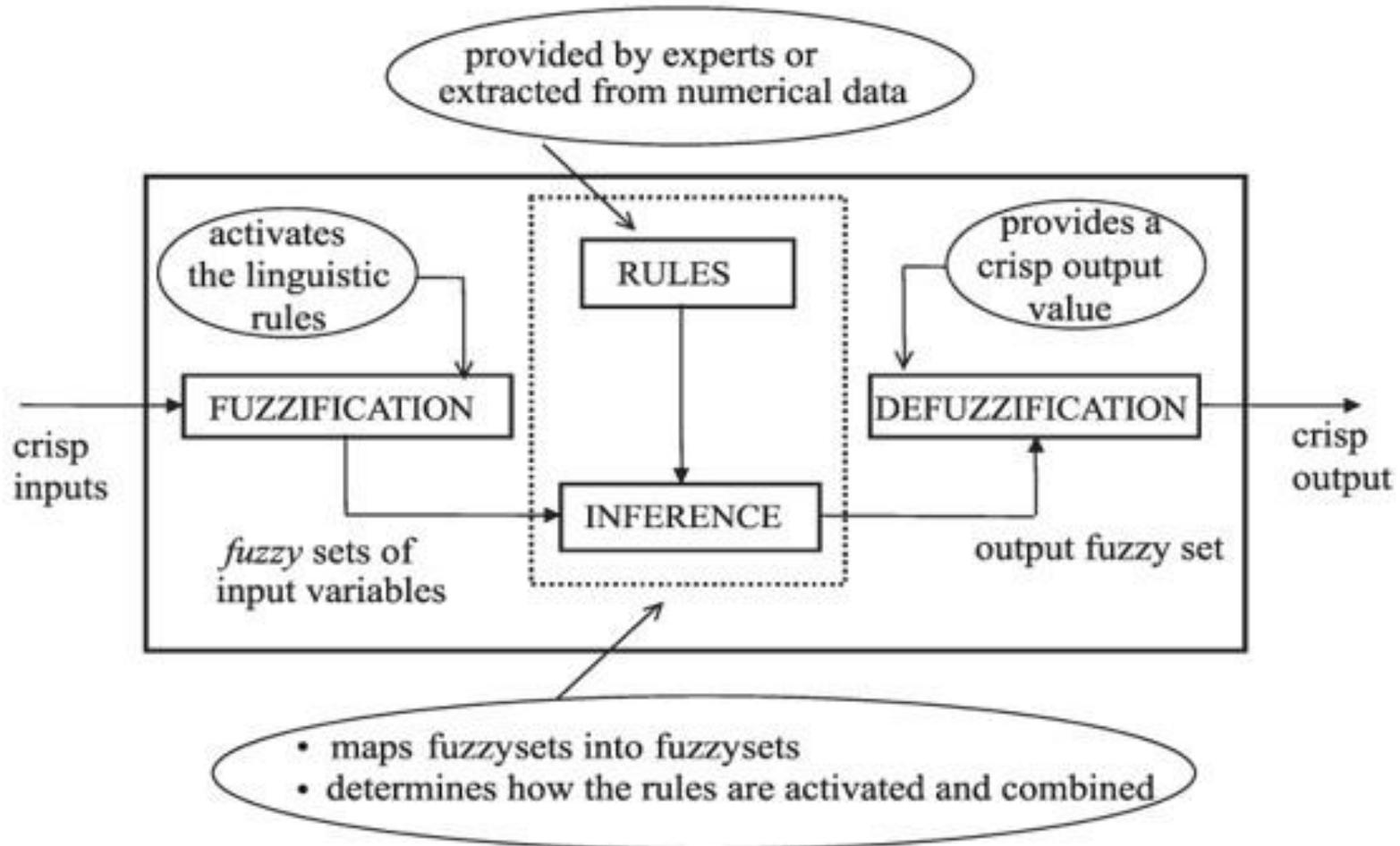
$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- Os operadores de interseção fuzzy são usualmente referenciados como operadores *T-norm*; T = triangular

# Operações com conjuntos Fuzzy

- Os operadores também podem ser definidos de outras formas usando T-normas (classe geral de operadores de interseção) ou T-conormas (classe geral de operadores de agregação para a união)
- Como vimos, Zadeh usa:
  - na T-norma:  $\min(x, y)$  e na T-conorma:  $\max(x, y)$

# Fuzzy Inference System (FIS)



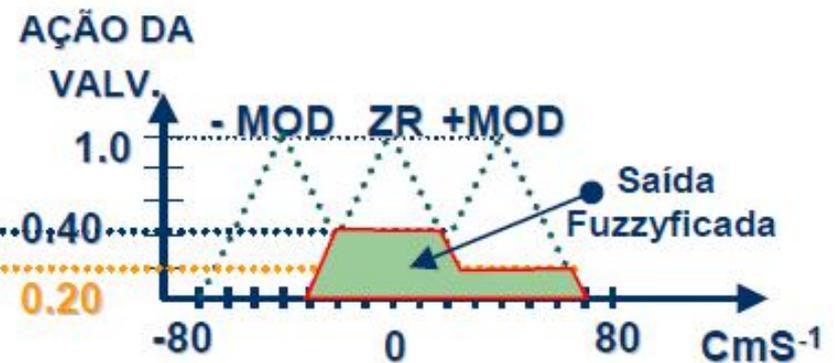
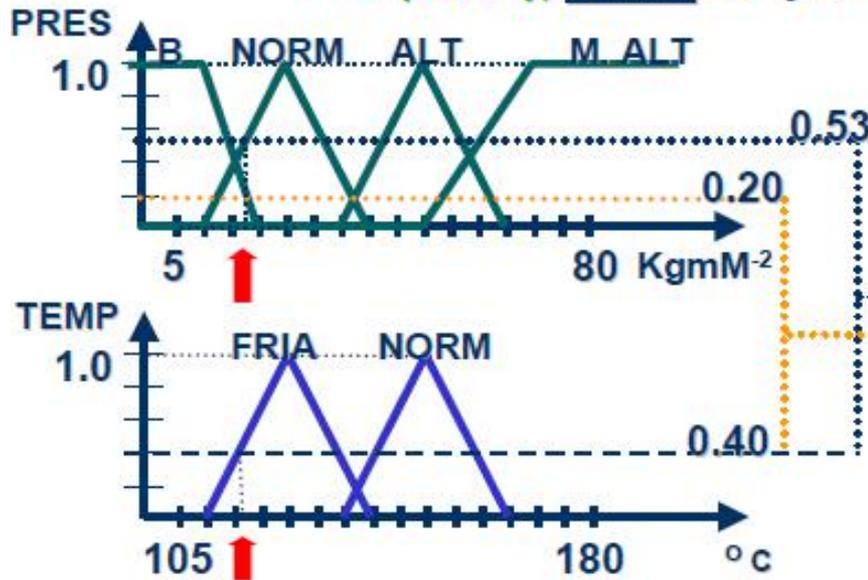
# Inferência Fuzzy

- **Inferência**

- **Inferência Fuzzy** é procedimento de **avaliação das regras** que relacionam as variáveis e que levam a **conclusão final** do sistema.
  - **AND** – Modelado como **interseção** através de **normas-T**.
  - **OR** – Modelado como **união** através de **normas-S**.
- **Fases:**
  1. **Avaliação da implicação de cada regra.**
  2. **Composição das conclusões de todas as regras em um valor consolidado.**
- O **método de Inferência Fuzzy**, mais comumente usada é o **Min-Max** (Zadeh ou Mamdani).
  - **Min** – Norma –T
  - **Max** – Norma - S

# Inferência Fuzzy

1. **Se** a Pressão (**PRES**) é **baixa (B)** **e** a Temperatura (**TEMP**) é **Fria (FRIA)**, **então** a Ação da Válvula é **Positiva Moderada (+MOD)**.
2. **Se** a Pressão (**PRES**) é **normal (NORM)** **e** a Temperatura (**TEMP**) é **Fria (FRIA)**, **então** a Ação da Válvula é **Zero (ZR)**.



# Inferência Fuzzy

- Fuzzificação
  - é o processo de atribuição de um grau de pertinência à variável
  - avalia o grau de pertinência da entrada numérica fornecida
- Inferência
  - análise da ativação das regras fuzzy a partir dos valores de entrada
  - agrega todas as regras ativadas
  - forma os conjuntos intermediários de saída

# Modelo de Inferência Fuzzy Mamdani

- As regras possuem relações fuzzy tanto em seus antecedentes como em seus consequentes
- O processamento de inferências no Mamdani é Máx-Min

# Inferência Fuzzy

- Modelos
  - Mamdani: conjunto fuzzy na saída
  - Takagi-Sugeno-Kang (TSK): constante ou função linear na saída
- Defuzzificação
  - aplica as operações fuzzy sobre os conjuntos intermediários a fim de formar o conjunto final de saída
  - aplica um método de defuzzificação para gerar o resultado numérico de saída

# Inferência Fuzzy - Resumindo

- Fuzzificação das entradas: são atribuídos valores de pertinência no intervalo  $[0,1]$  a todas as declarações nebulosas nos antecedentes das regras
- Aplicação de operadores nebulosos aos múltiplos antecedentes, o que resultará em um antecedente único com valor de pertinência no intervalo  $[0,1]$ , que será considerado como o grau de suporte da regra
- Aplicação do método de implicação, que usa o grau de suporte de toda regra para obter o conjunto nebuloso de saída, ou seja, realiza a dedução
  - o consequente de uma regra nebulosa atribui um conjunto nebuloso à saída
- O conjunto fuzzy de saída para cada regra é então agregado dentro de um único conjunto fuzzy de saída

# Bibliografia - livros

- (Rezende, 2003) **Sistemas Inteligentes: fundamentos e aplicações**. Organização: Solange Oliveira Rezende. Editora Manole, 2003. (caps: 4 e 5)
- (Campos, 2004) CAMPOS, Mario Massa de; SAITO, Kaku. **Sistemas inteligentes em controle e automação de processos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2004. xii, 235 p.
- (Tanscheit, 2007) **Inteligência Computacional**. Organização: Hime Aguiar e Oliveira Junior. Thomson, 2007. Sistemas Fuzzy (Ricardo Tanscheit) p. 229 a 264  
(Tanscheit07\_sistemasFuzzy\_35p.pdf)

# Bibliografia - livros

- (Ross, 2010) ROSS, T. J. **Fuzzy Logic with Engineering Applications.** 3rd edition. UK, John Wiley & Sons Ltd, 2010.
- (Chen & Pham, 2000) CHEN, Guanrong; PHAM, Trung Tat. **Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems.** CRC press, 2000.

# Bibliografia - Mathworks

- Fuzzy Logic Toolbox

<http://www.mathworks.com/help/fuzzy/>

Getting Started and Examples

- *FuzzyInferenceSystems\_Matlab\_7p.pdf*

- *FoundationsOfFuzzyLogic\_Matlab\_10p.pdf*

(<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/fuzzy/index.html>)

# Bibliografia - apostilas

- Mini-Curso: **Sistemas Inteligentes Neuro-Fuzzy**. Marley Maria B.R. Vellasco. ICA: Núcleo de Pesquisa em Inteligência Computacional Aplicada. PUC-Rio
- **Introdução aos Sistemas Inteligentes**. Adolfo Bauchspiess, 2004.  
Bauchspiess04\_IntroducaoSistemasInteligentes\_71p.pdf
- Biondi, Luiz. **Sistema Especialista Nebuloso**. Minicurso do SBPO, 2006

# Bibliografia - artigos

- LETICHEVSKY, Ana Carolina; VELLASCO, Marley Maria Bernardes Rebuzzi and TANSCHKEIT, Ricardo. **A fuzzy decision support system for meta-evaluation a new approach and a case study performed in Brazil.** Ensaio: aval.pol.públ.Educ. vol.15, n.56, pp. 447-462, 2007
- **Proposta de um modelo fuzzy para apoio à tomada de decisão no Controle de Tráfego Aéreo do Aeroporto Internacional de Salvador.** Lima07\_artigo\_modeloFuzzy\_15p.pdf