Controle Digital

Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas Computacionais

Mestrado Profissional – PURO/UFF

Prof. Luciano Bertini

Introdução

- O objetivo é apresentar as noções básicas de duas ferramentas fundamentais para o projeto de sistemas digitais:
  - Transformada de Laplace
  - Transformada Z
- Referências:
  - Curso de Equações Diferenciais 18.03 - Prof. Arthur Mattuck - MIT OpenCourseWare
  - Katsuhiko Ogata - **Discrete-Time Control Systems** - 2nd Edition - Prentice Hall Int. – 1995
  - Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini - **Feedback Control of Dynamic Systems - Sixth Edition - Chapter 8 - Digital Control** - Pearson 2011

Introdução

Where the Laplace Transform comes from (Arthur Mattuck, MIT)

Lec 19 | MIT 18.03 Differential Equations, Spring 2006
Introduction to the Laplace Transform; Basic Formulas.
https://www.youtube.com/watch?v=sZ2quII6GEk

Lec 20 | MIT 18.03 Differential Equations, Spring 2006
Derivative Formulas;
Using the Laplace Transform to Solve Linear ODE's.
https://www.youtube.com/watch?v=qZHseRxAWZ8

View the complete course: http://ocw.mit.edu/18-03S06

Introdução

- Como simular computacionalmente um sistema dinâmico? Como implementar um controle?

1) Representação matemática do sistema: modelo matemático.

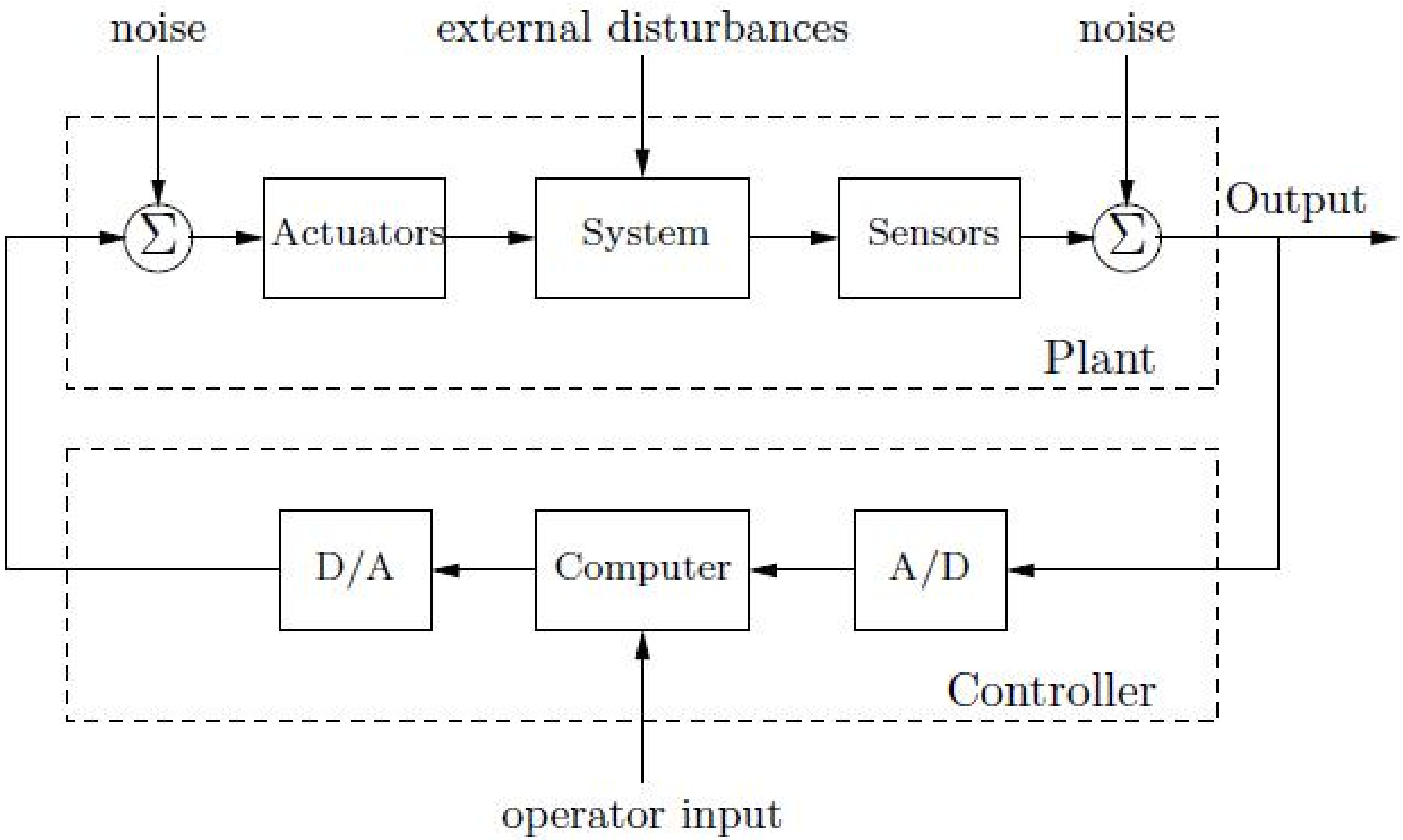
⇒ Transformada de Laplace

2) Transformar a representação do sistema para um sistema de tempo discreto

⇒ Transformada Z

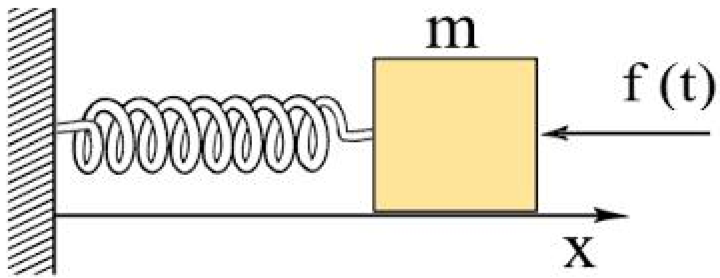
3) Implementação através de uma fórmula de recorrência

Introdução


noise
external disturbances
noise
Actuators
System
Sensors
Output
Plant
D/A
Computer
A/D
Controller
operator input

Introdução

- Exemplo: sistema massa-mola



- Duas forças atuam: $m.a = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ e $k.x$.
- Temos então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = f(t)$$

Introdução

Utilizando Laplace:

$$ms^2X(s) + kX(s) = F(s)$$

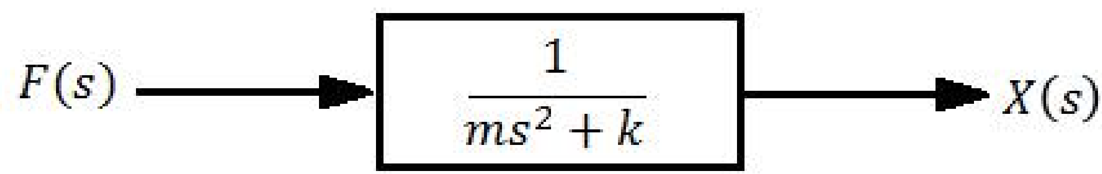
ou:

$$(ms^2{+}k)X(s) = F(s)$$

ou:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

ou:



Obs: considerando condições iniciais nulas

Introdução

A solução requer a transformada inversa:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms^2+k}\right] * f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{mk}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{(s^2+\frac{k}{m})}\right] * f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{mk}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) * f(t)\,. \end{aligned}$$

Introdução

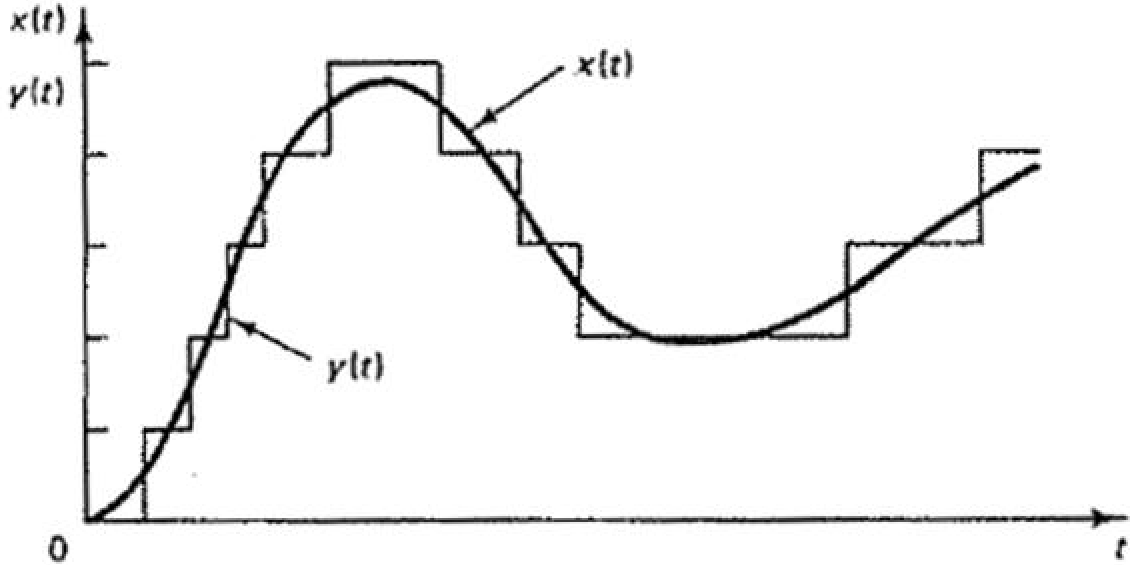
- Tabela da Transformada de Laplace:

f(t), t ≧ 0	**F(s)**
1. $\delta(t)$	1
2. $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3. t	$\frac{1}{s^2}$
4. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5. e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$

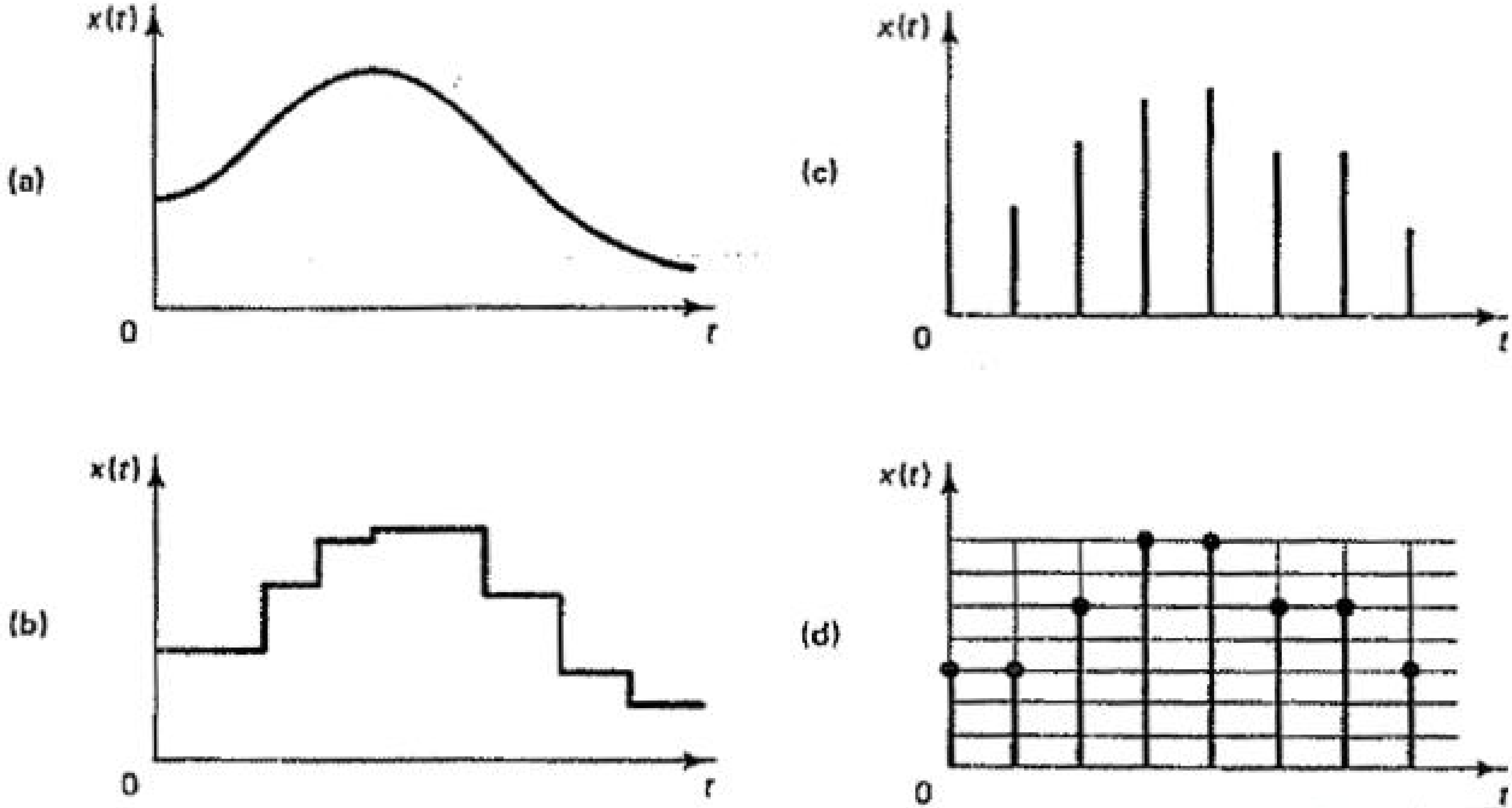
f(t), t ≧ 0	**F(s)**
6. te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
7. $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$
8. $\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
9. $\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
10. $e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$

Introdução

- Sistemas de tempo discreto
  - É quando o sistema é representado por um ou mais sinais quantizados.
- A transformada Z permite obtermos uma equação que discretiza o sistema representado por Laplace.



Introdução



(a) Sinal analógico; (b) sinal quantizado e contínuo no tempo; (c) sinal amostrado; (d) sinal digital

Introdução

- Sistemas de controle $\left\{ \begin{array}{l} \text{tempo contínuo} \\ \\ \text{tempo discreto} \end{array} \right.$

- Sistemas de controle de **tempo discreto** possuem sinais amostrados ou digitais que só mudam em instantes discretos do tempo. São descritos por equações de diferenças (fórmulas de recorrência), após a discretização apropriada.
- Sistemas de controle de **tempo contínuo** possuem apenas sinais analógicos e contínuos. São descritos por equações diferenciais.

Introdução

- Vamos continuar com o exemplo do sistema massa-mola. Podemos procurar em uma tabela qual a transformada Z para a função $sen(at)$:

$$E(z) \longrightarrow \boxed{\frac{z.sen(aT)}{z^2 - 2.z.\cos(aT) + 1}} \longrightarrow S(z)$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z.sen(aT)}{z^2 - 2.z.\cos(aT) + 1}$$

- T é o período de amostragem.

Introdução

- Após aplicarmos a transformada Z inversa, obtém-se a expressão:

$$s(k) = 2.\cos(aT).s(k-1) + sen(aT).e(k-1) - s(k-2)$$

- Que é uma fórmula de recorrência facilmente implementável em um computador.
- Ver simulação no Excel.

Transformada de Laplace

De onde vem a Transformada de Laplace?

resposta: vem das séries de potências, cuja aparência é:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

usando uma notação computacional:

$$\sum_{0}^{\infty} a(n) x^n = A(x)$$

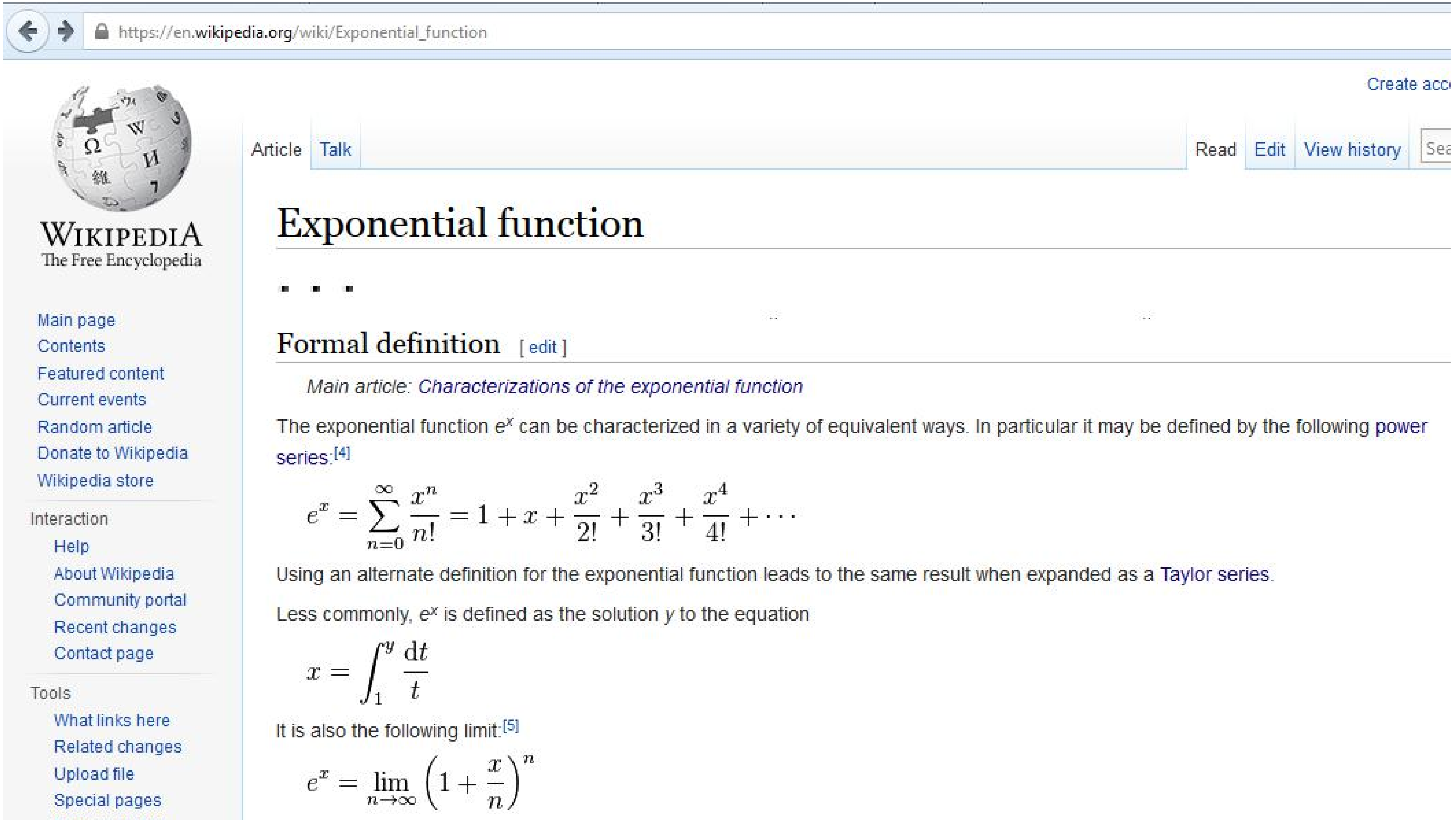
Transformada de Laplace

Desejamos associar uma função $A(x)$, que é a soma da série de potências, com a sequência de valores definida por $a(n)$. Vejamos dois exemplos conhecidos:

$a(n)$	$A(x)$
1	$\frac{1}{1-x}$, se -1 < x < 1
$\frac{1}{n!}$	e^x

Para uma função em n associa-se uma função em x.

Transformada de Laplace



https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function

Create acc

Article Talk Read Edit View history Sea

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Main page
Contents
Featured content
Current events
Random article
Donate to Wikipedia
Wikipedia store

Interaction
Help
About Wikipedia
Community portal
Recent changes
Contact page

Tools
What links here
Related changes
Upload file
Special pages
Permanent link

Exponential function

...

Formal definition [edit]

Main article: Characterizations of the exponential function

The exponential function e^x can be characterized in a variety of equivalent ways. In particular it may be defined by the following power series:[4]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Using an alternate definition for the exponential function leads to the same result when expanded as a Taylor series.

Less commonly, e^x is defined as the solution y to the equation

$$x = \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

It is also the following limit:[5]

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Transformada de Laplace

- E se quisermos tudo isso em modo contínuo e analógico, não no domínio discreto?

$$n = 0,1,2,\ldots$$
$$\downarrow$$
$$t: 0 \leq t < \infty$$

$$\int_0^\infty a(t)x^t dt = A(x)$$

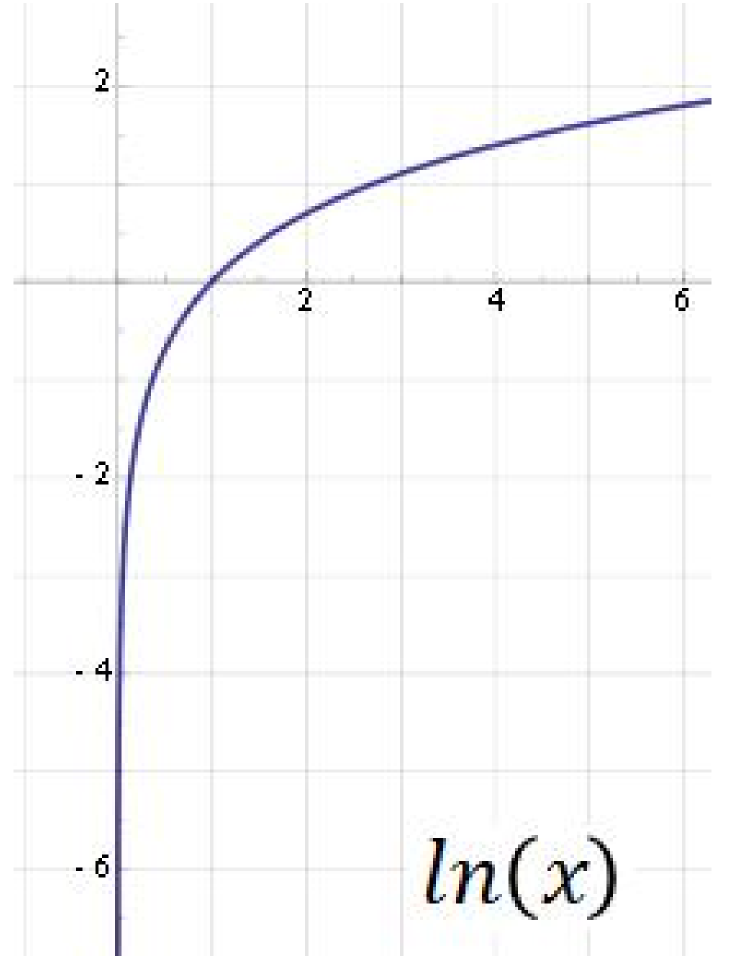
- Vamos tornar a expressão mais conveniente colocando a base e, fazendo:

$$x = e^{ln(x)}$$

$$x^t = \left(e^{ln(x)}\right)^t$$

Transformada de Laplace

- Para que a integral tenha convergência, x deve ser menor que 1.
- Também x não pode ser negativo, para evitarmos números complexos.
- Então na prática teremos $0 < x < 1$, intervalo no qual $ln(x) < 0$.
- Sendo assim, $-ln(x) > 0$.



Transformada de Laplace

- Vamos então adotar uma variável $s = -ln(x)$ que será sempre positiva.
- Por último, substituindo $a(t)$ por $f(t)$, teremos a expressão conhecida como transformada de Laplace:

$$\int_0^{\infty} f(t)\left(e^{ln(x)}\right)^t dt = A(x)$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)}$$

Transformada de Laplace

- Laplace é uma transformada linear, que vem do fato de que a própria integral é um operador linear, ou seja:

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(c.f) = c.\mathcal{L}(f)$$

Transformada de Laplace

Exemplos de Cálculo

1. Calcule $F(s)$ para $f(t) = 1$.

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1.e^{-st}dt$$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st}dt$$

$$\int_0^{R} e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^R = \frac{e^{-sR}-1}{-s}$$

$$F(s) = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sR}-1}{-s} = \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}, \qquad s > 0$$

Transformada de Laplace

2. Calcule $F(s)$ para $f(t) = e^{at}$

Vamos calcular o caso mais genérico para $f(t).e^{at}$:

$$\int_0^\infty e^{at}.f(t).e^{-st}dt =$$

$$\int_0^\infty f(t).e^{(a-s)t}dt =$$

$$\int_0^\infty f(t).e^{-(s-a)t}dt =$$

$$= F(s-a), \qquad se\ s > a$$

A transformada de Laplace de $e^{at}.f(t)$ é $F(s-a)$. Isso é chamado **deslocamento exponencial na frequência**.

Portanto, para $f(t) = e^{at}$, temos $F(s) = \frac{1}{s-a},\ s > a$.

Transformada de Laplace

3. Calcule $F(s)$ para $f(t) = sen(at)$ e para $f(t) = cos(at)$

Para funções com senos e cossenos, basta observar que o resultado obtido para $f(t) = e^{at}$ também funciona se a for um número complexo.

Assim a transformada de Laplace para senos e cossenos pode ser derivada da fórmula de Euler:

$$e^{iat} = \cos(at) + isen(at)$$

$$e^{-iat} = \cos(at) - isen(at)$$

Transformada de Laplace

-

$$\cos(at) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia}\right)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 + a^2}\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0$$

$$\operatorname{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right)$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)] = \frac{1}{2i}\left(\frac{2ia}{s^2 + a^2}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0$$

Transformada de Laplace

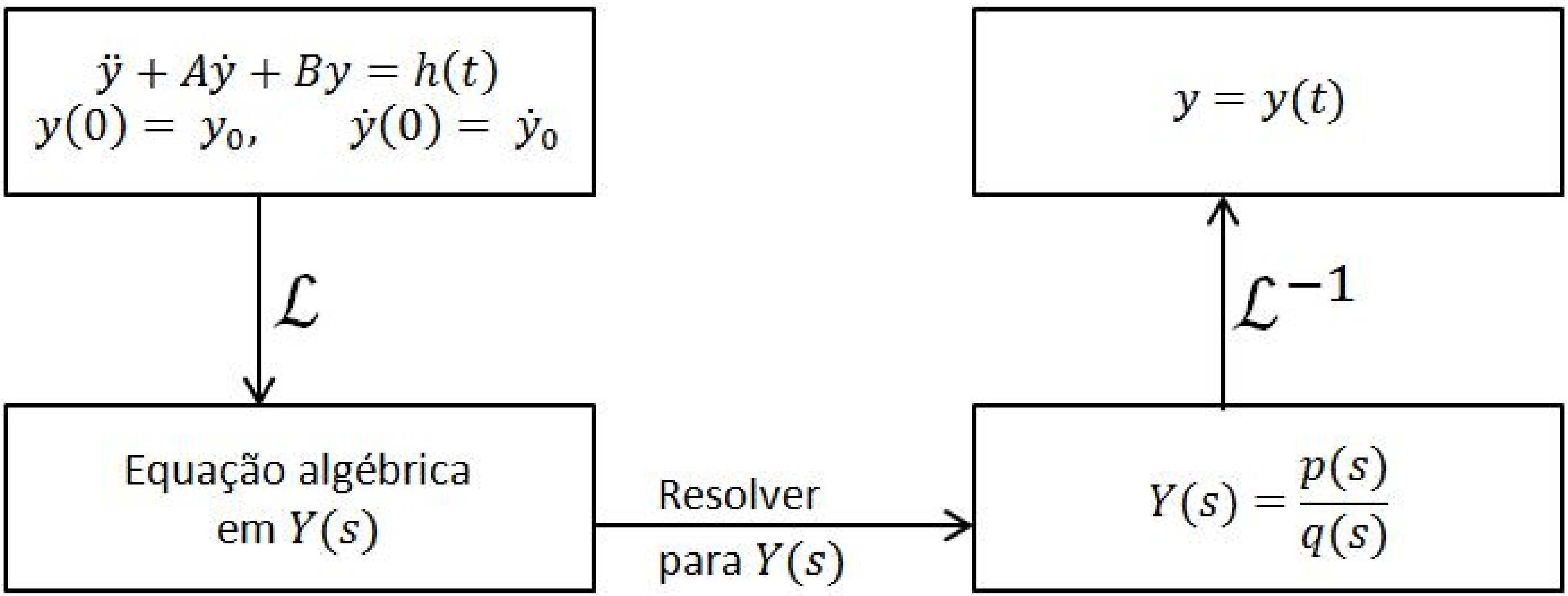
Transformada Inversa

- É um pouco mais difícil calcular a transformada inversa.
- Geralmente utiliza-se o método da decomposição em frações parciais para reduzir a expressão em casos mais simples encontrados em tabelas.
- Um exemplo:

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-1/3}{s+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

Transformada de Laplace

Solução de equações diferenciais



Transformada de Laplace

Fórmulas derivativas

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f^{'}(t) e^{-st} dt$$

Com a integração por partes ($uv = \int uv' dt + \int u' v dt$), fazendo $v^{'} = f^{'}(t)$ e $udt = e^{-st} dt$, obtemos:

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s) f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = 0 - f(0).1 + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt =$$

$$= 0 - f(0).1 + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

Transformada de Laplace

Fórmulas derivativas

Analogamente obtém-se para a derivada segunda. Porém não é necessário resolver novamente a integral por partes. Podemos escrever $f^{''}(t) = \left[f^{'}(t)\right]^{'}$.
Ou seja, seja $g(t) = f'(t)$:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \ s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Portanto, as fórmulas para a transformada de Laplace da primeira e da segunda derivadas são:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{''}(t)\right] = \ s^2F(s) - sf(0) - f^{'}(0)$$

Transformada de Laplace

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial:

$$y'' - y = e^{-t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - f'(0) - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s^2Y(s) - s - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)(s^2 - 1) = s + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + s + 1}{s+1}$$

$$Y(s)(s+1)(s-1) = \frac{s^2 + s + 1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)^2(s-1)}$$

Transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)^2(s-1)}$$

E agora?

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{3/4}{s-1}$$

O termo do meio não pode ser obtido pela técnica do curto-circuito. Substituindo $s = 0$:

$$-1 = -1/2 + C - 3/4$$

$$C = 1/4$$

Portanto:

$$Y(s) = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{3/4}{s-1}$$

Transformada de Laplace

Finalmente:

$$Y(s) = \frac{-1/_2}{(s+1)^2} + \frac{1/_4}{s+1} + \frac{3/_4}{s-1}$$

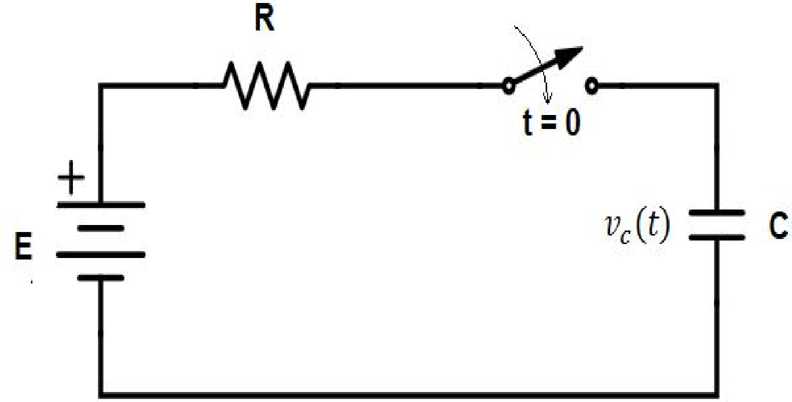
$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

Sabemos que para $f(t) = e^{at}$, temos $F(s) = \frac{1}{s-a}$, e para $f(t) = t$, temos $F(s) = \frac{1}{s^2}$ (tabelas), obtemos:

$$y(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}$$

Transformada de Laplace

Exemplo 2: Encontre $v_c(t)$ no circuito abaixo após o fechamento da chave em t = 0. Considere $v_c(0) = 0$.



As equações do circuito são:

$$v_c + R.i = E, \qquad i = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_c + RC\frac{dv_c}{dt} = E, \qquad v_c(0) = 0$$

Transformada de Laplace

Primeira solução: por variáveis separáveis

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{E - v_c}{RC} = \left(-\frac{1}{RC}\right)(v_c - E)$$

$$\frac{dv_c}{(v_c - E)} = \left(-\frac{1}{RC}\right)dt$$

$$\int \frac{1}{(v_c - E)}dv_c = \int \left(-\frac{1}{RC}\right)dt$$

$$\int_{v_c(0)}^{v_c(t)} \frac{1}{(x - E)}dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{RC}\right)dy$$

$$\ln(x - E)\Big|_{v_c(0)}^{v_c(t)} = \left(-\frac{y}{RC}\right)\Big|_0^t$$

Transformada de Laplace

$$ln(v_c(t) - E) - ln(v_c(0) - E) = -\frac{t}{RC}$$

$$ln\left(\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v_c(t) - E}{v_c(0) - E} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) - E = (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = E + (v_c(0) - E)e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad v_c(0) = 0$$

$$v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

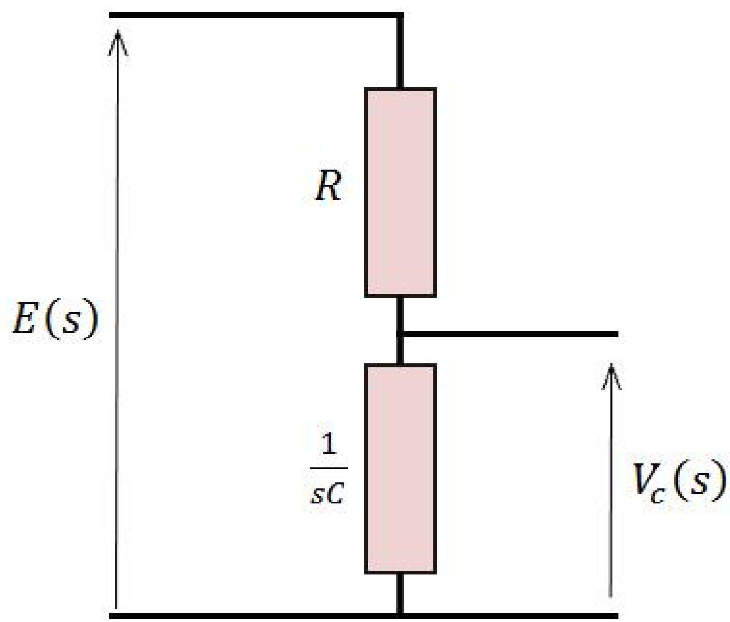
Transformada de Laplace

Solução usando Laplace:

- Vamos considerar desde o início que $v_c(0) = 0$.
- A análise do circuito usando Laplace não requer a escrita das equações diferenciais.
- Basta considerar o elemento capacitor como uma impedância de ${}^{1}/_{sC}$ ohms.

Transformada de Laplace

- O circuito pode ser visto como um divisor de tensão:



$$V_c(s) = E(s)\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

Transformada de Laplace

Como $E(t) = E$, então $E(s) = {}^{E}/_{s}$. Substituindo, obtemos:

$$V_c(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_c(s) = \frac{E}{s(sRC + 1)}$$

Separando em frações parciais:

$$V_c(s) = \frac{E}{s} + \frac{-ERC}{sRC + 1}$$

$$V_c(s) = \frac{E}{s} - \frac{E}{s + {}^{1}/_{RC}}$$

Resultado:

$$v_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

Polos e Zeros

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \ldots + a_1 s + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Ou

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\ldots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\ldots(s + p_n)}$$

PÓLOS ⟹ **raízes do denominador de G(s) ($-p_1$, $-p_2$, ... $-p_n$).**

ZEROS ⟹ **raízes do numerador de G(s) ($-z_1$, $-z_2$, ... $-z_m$).**

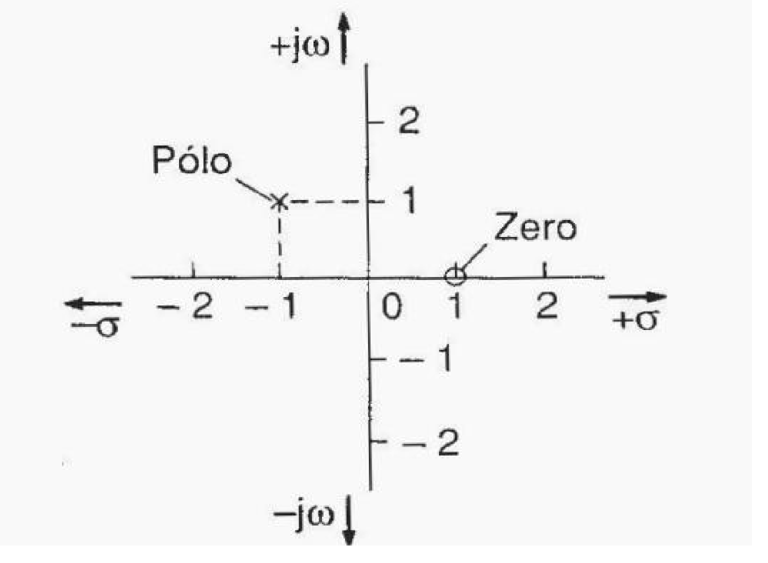
K ⟹ **é uma constante que define o ganho do sistema.**

Polos e Zeros

- Calculamos que se $f(t) = e^{at}$, temos $F(s) = \frac{1}{s-a}$
- Em geral, polos e zeros podem ser escritos como:

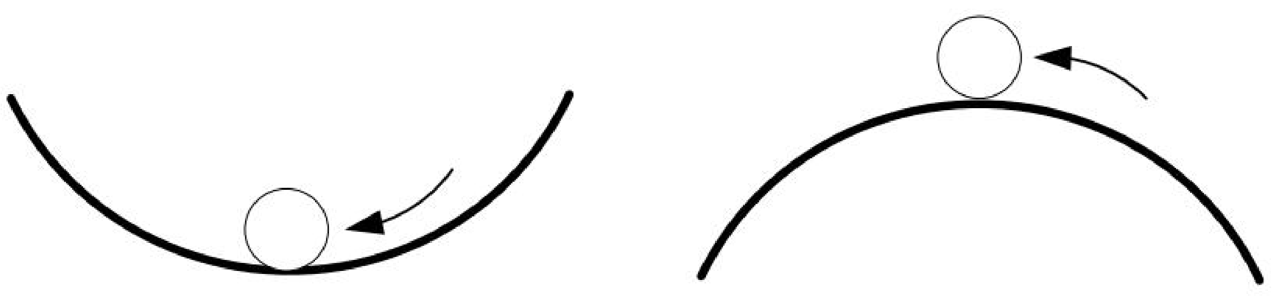
$$s = \sigma + j\omega$$

- Que podem ser representados em um diagrama de polos e zeros:



Estabilidade de Sistemas

- Um objeto está em equilíbrio estável se, quando empurrado, ele retoma a sua posição original depois de cessado o impulso.
- Um sistema pode ser considerado estável se para entradas limitadas, gera saídas limitadas.
- Qual dos dois sistemas abaixo é estável?



(a) (b)

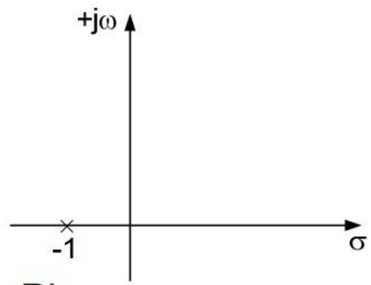
Estabilidade de Sistemas

- Os polos determinam a estabilidade do sistema

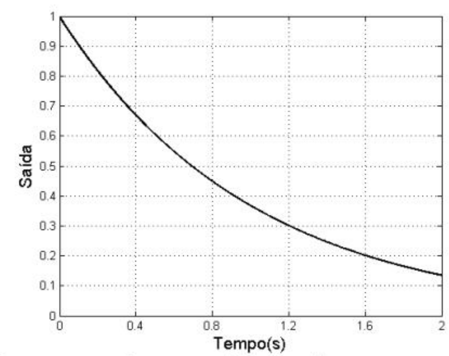
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Para a entrada impulso unitário ,R(s)=1 . Então:

$$C(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow c(t) = e^{-at}$$

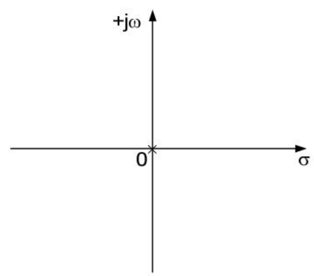


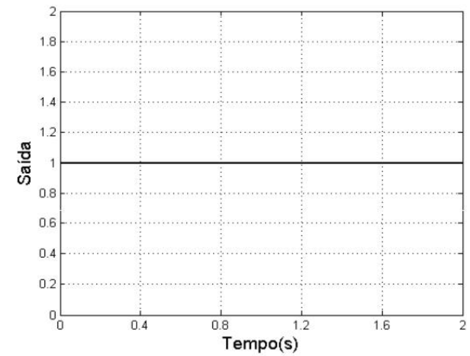
Plano s para o pólo em -1



Resposta ao impulso unitário para o pólo em -1

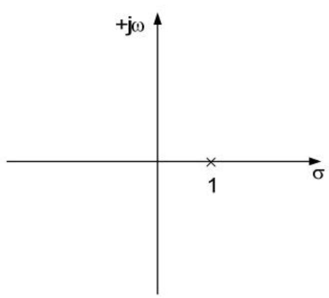
Resposta ao impulso unitário

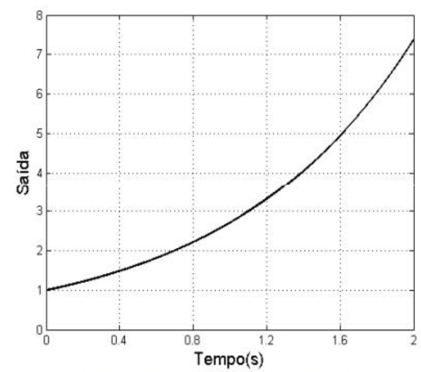




Plano s para o
pólo em 0 (zero)

Resposta ao impulso
unitário para o pólo em 0 (zero)

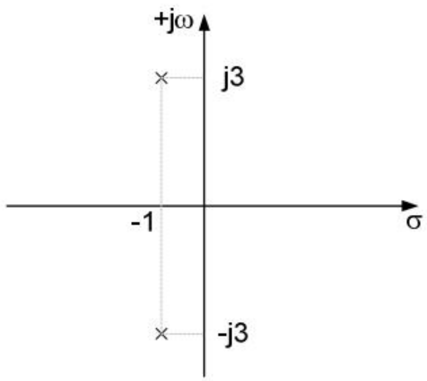


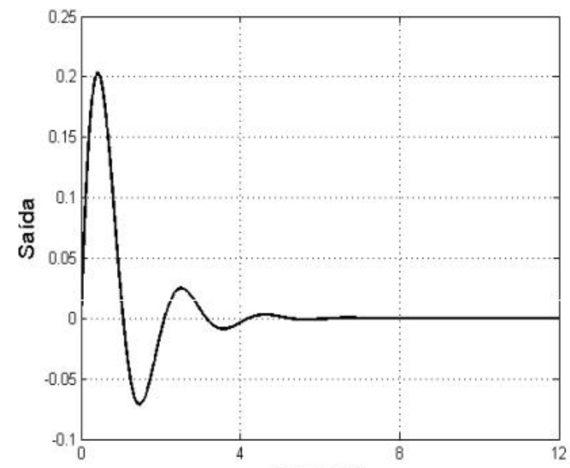


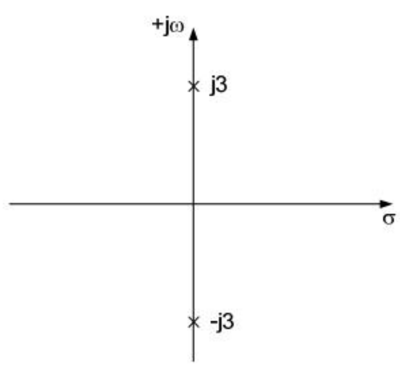
Resposta ao impulso
unitário para o pólo em +1

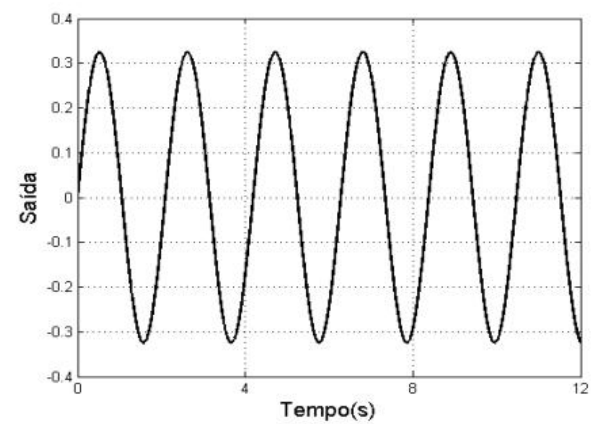
Plano s para o
pólo em +1

Resposta ao impulso unitário

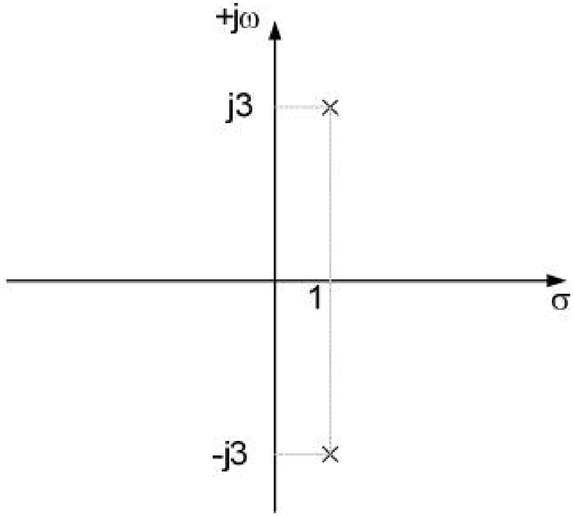


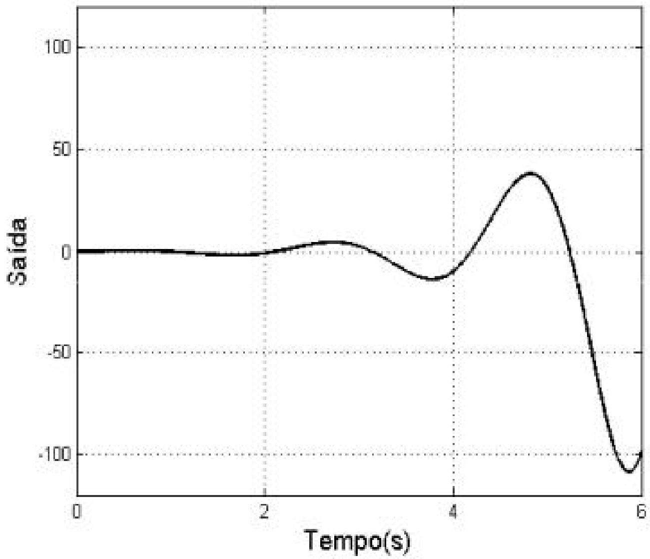




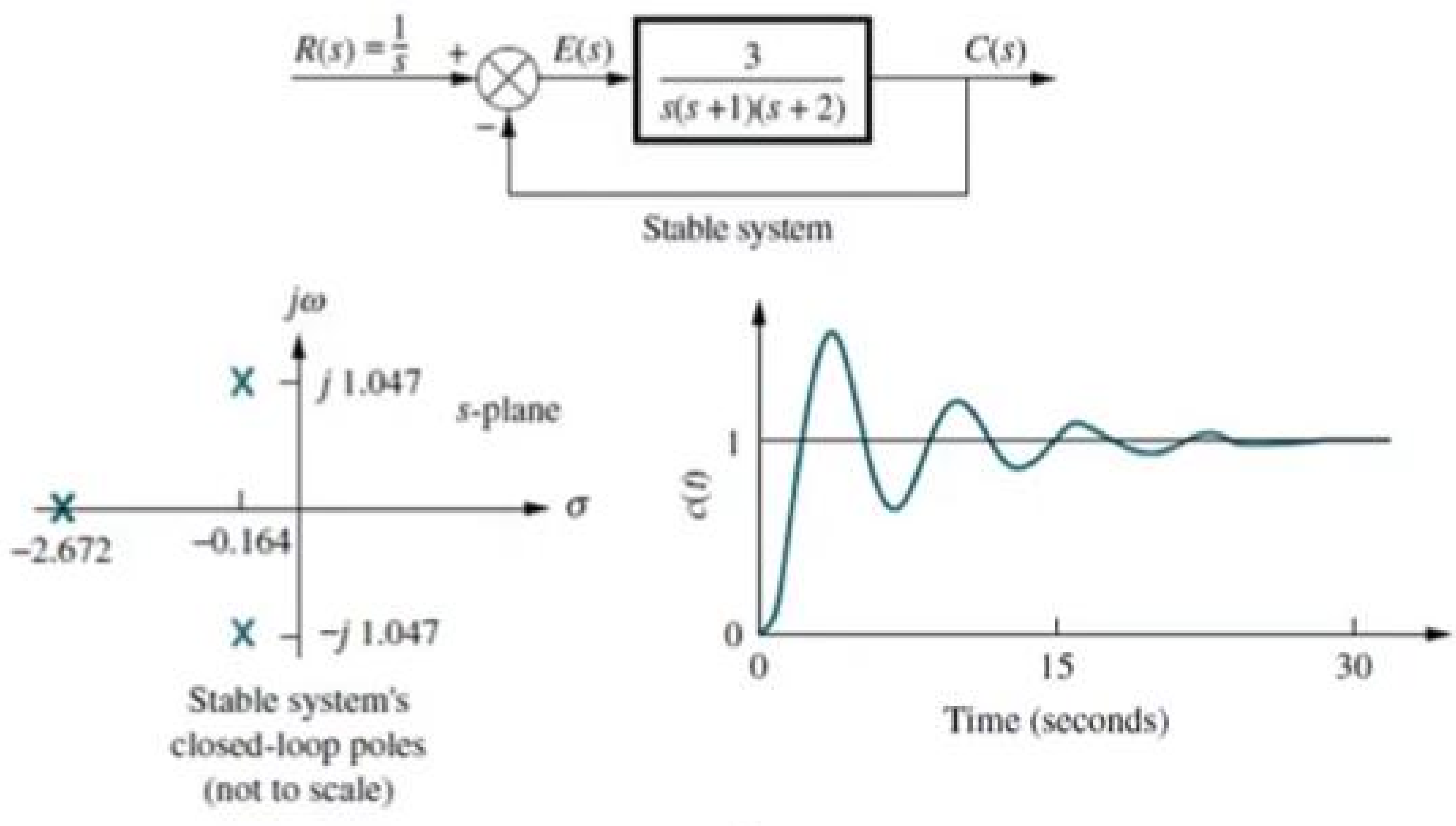


Resposta ao impulso unitário



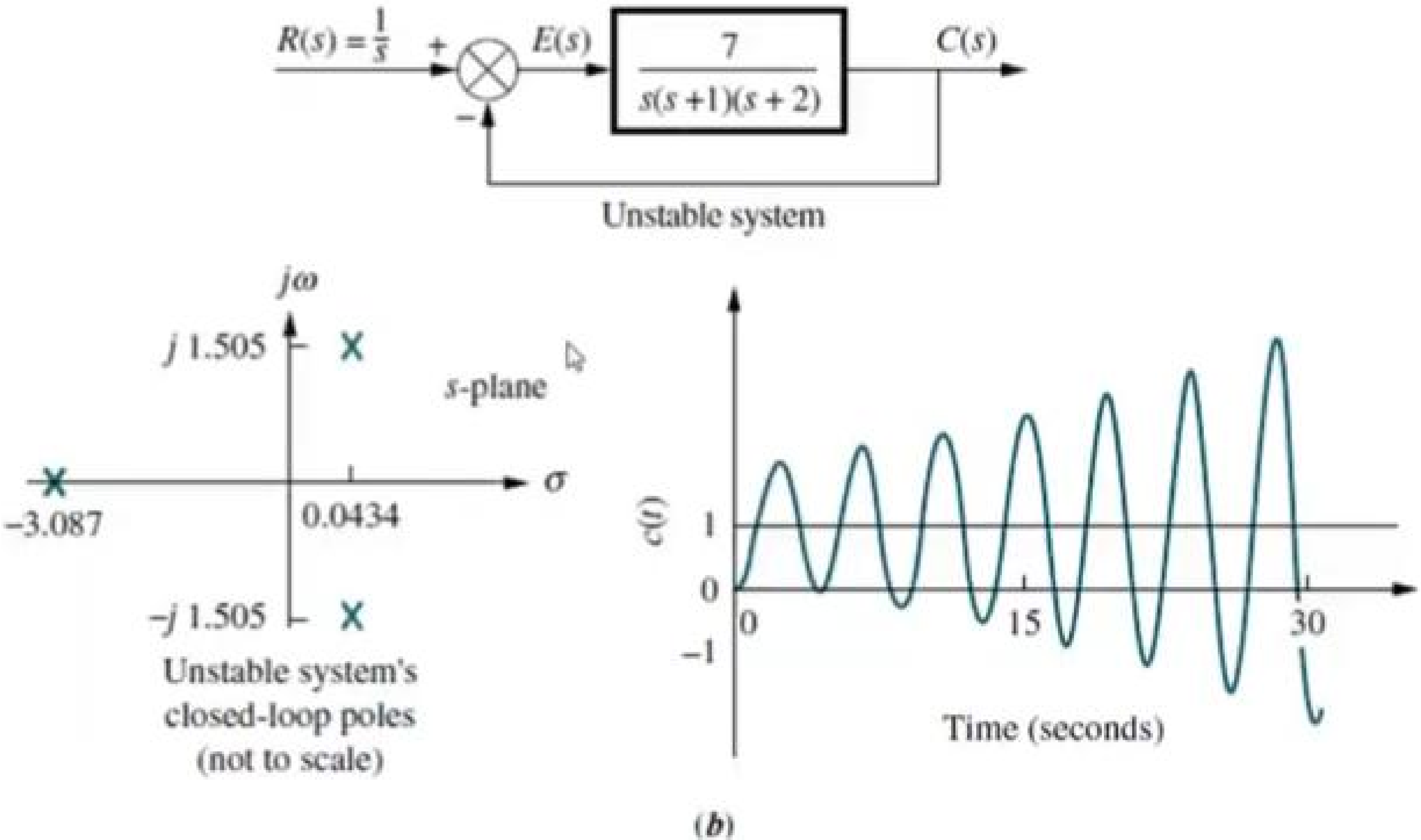


Exemplos com resposta ao degrau



(a)

Exemplos com resposta ao degrau



Matlab e Laplace

- Matlab possui um comando para se obter a decomposição em frações parciais de funções B(s)/A(s).
- Possui também comandos para o cálculo de zeros e polos de B(s)/A(s).
- Considere a função:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Matlab e Laplace

Em matlab, os vetores lineares num e den especificam os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência.

Isto é:

$$\text{num} = [b_0 \ b_1 \ \ldots \ b_n]$$
$$\text{den} = [1 \ a_1 \ \ldots \ a_n]$$

O comando:

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encontra os resíduos (r), polos (p) e termos diretos (k) de uma decomposição em frações parciais da razão de dois polinômios B(s) e A(s).

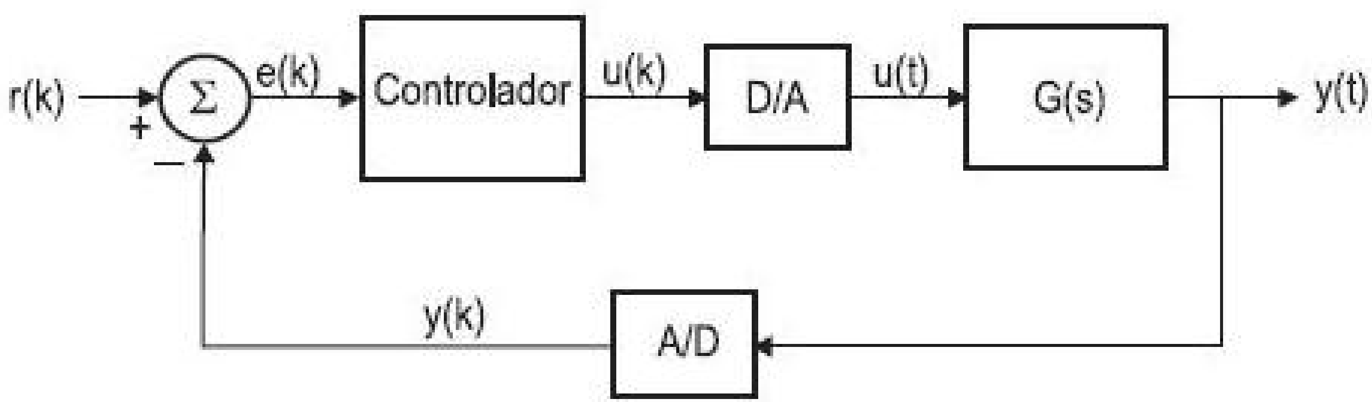
$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s)$$

A Transformada Z

- A transformada Z é uma ferramenta matemática frequentemente usada na análise e síntese de sistemas de controle de tempo discreto.
- Permite a representação de um comportamento dinâmico em um ambiente computacional, pois a modelagem baseia-se em uma sequência de valores discretos.
- Tal situação ocorre porque, para que o computador leia uma variável analógica contínua de um processo, é preciso convertê-la para um formato digital amostrado periodicamente.

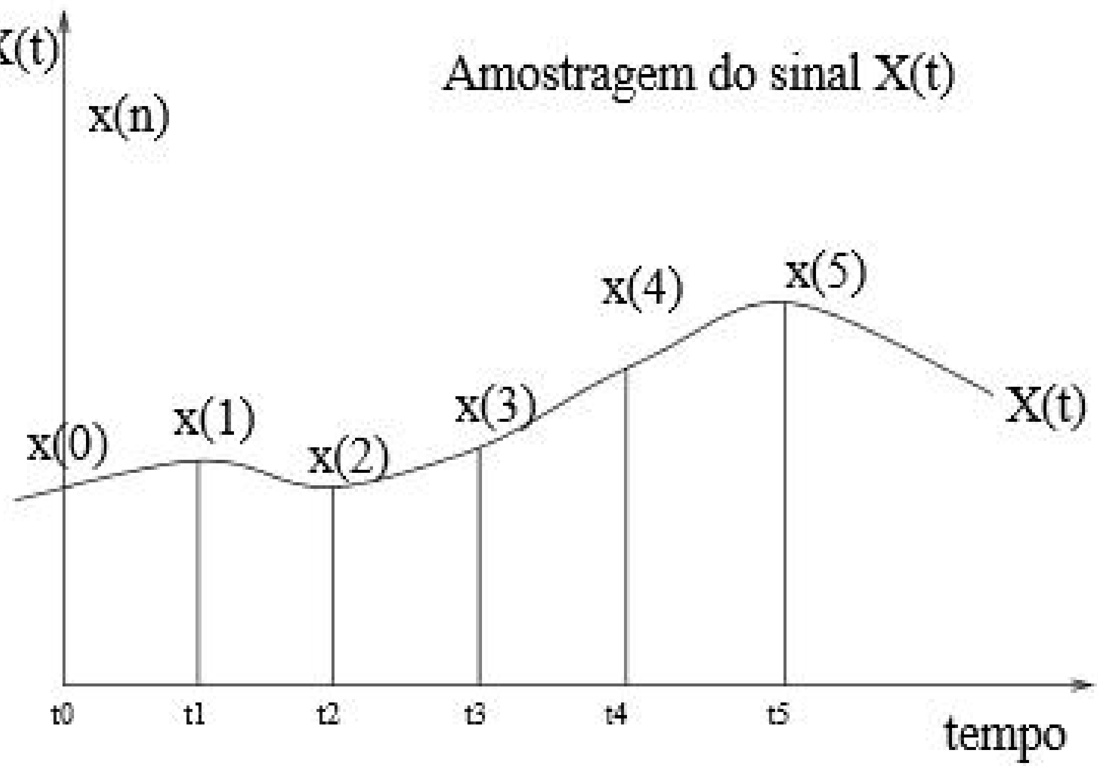
A Transformada Z

- Por esse motivo um sistema de controle digital é também chamado de sistema de controle de tempo discreto.



A Transformada Z

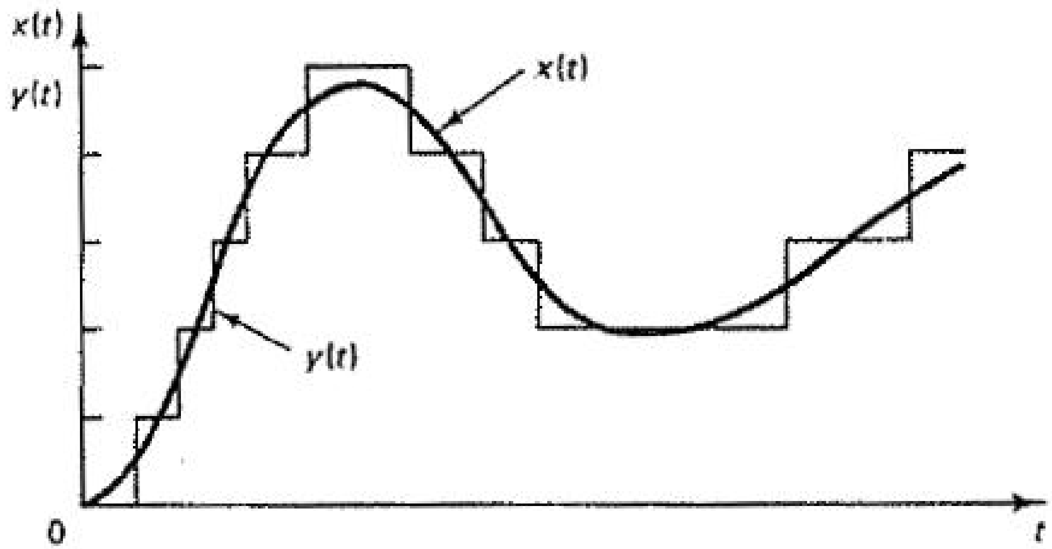
Um sinal amostrado $X(t)$ é representado por uma sequência de valores discretos



A Transformada Z

Erro de quantização

Quanto menor o período de amostragem e maiores as resoluções dos conversores A/D e D/A, menor será o erro de quantização



Se um sistema estiver representado pelas suas equações de Laplace, as fórmulas de recorrência que representam seu comportamento podem ser obtidas pela transformada Z

A Transformada Z

Definição da Transformada Z:

A transformada Z de uma função do tempo $x(t)$ considera apenas os valores amostrados de $x(t)$, isto é, $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, ..., onde T é o período de amostragem.

A definição da transformada Z é:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

A expansão do somatório resulta na sequência:

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \\ + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \cdots$$

A Transformada Z

- A definição implica que a transformada Z de qualquer função contínua no tempo pode ser escrita na forma de uma sequência por simples inspeção.
- O termo z^{-k} na série indica a posição no tempo em que ocorre a amplitude $x(kT)$.
- Reciprocamente, se $X(z)$ for dado como uma sequência, a transformada Z inversa pode ser obtida por inspeção como uma sequência da função $x(kT)$ que corresponde aos valores da função $x(t)$ nos respectivos instantes do tempo.
- Se tivermos a fórmula fechada como a razão de dois polinômios em z, podemos calcular a sequência de valores através da fórmula de recorrência resultante.

A Transformada Z

- Na transformada de Laplace temos a importante propriedade em que $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s)$ (considerando condições iniciais nulas).
- Para os sistemas discretos, a definição da transformada Z permite uma propriedade semelhante e de igual importância:

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}F(z)$$

A Transformada Z

Significa que a transformada inversa da transformada Z multiplicada por z^{-1} resulta na amostra do instante $k-1$. A prova vem da definição:

$$\mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT) z^{-k}$$

$$= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT) z^{-(k-n)}$$

A Transformada Z

Definindo $m = k - n$, a equação fica:

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT) z^{-m}$$

Como $x(mT) = 0$ para $m < 0$, o limite inferior do somatório pode ser zero:

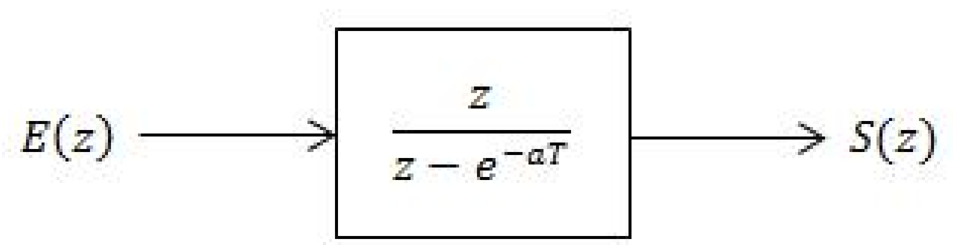
$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) z^{-m} = z^{-n} X(z)$$

Com esse resultado, se temos uma função de transferência em Z, podemos facilmente obter a fórmula de recorrência que a implementa.

A Transformada Z

Vejamos dois exemplos:

1. Função $x(t) = \ e^{-at}$



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \ \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

$$S(z)\left(\ 1-z^{-1}e^{-aT}\right) = E(z)$$

A Transformada Z

$$S(z) - z^{-1}S(z)e^{-aT} = E(z)$$

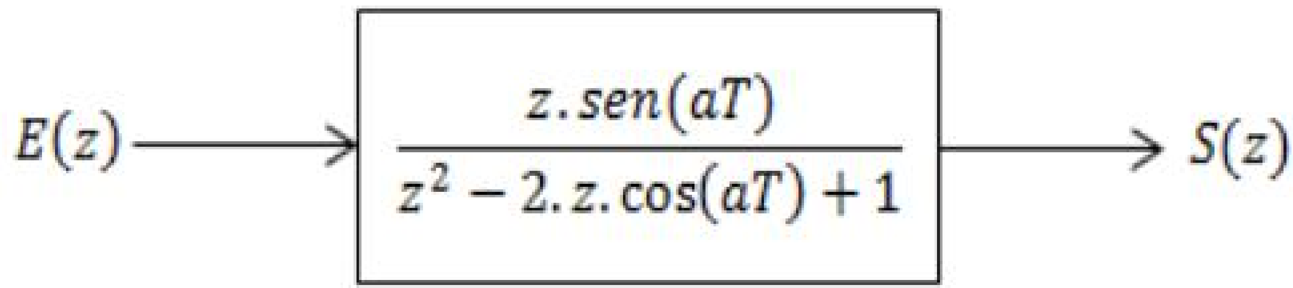
$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$s(k) - s(k-1)e^{-aT} = e(k)$$

$$\boxed{s(k) = e(k) + s(k-1)e^{-aT}}$$

A Transformada Z

2. Função $x(t) = \; sen(at)$



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z.sen(aT)}{z^2 - 2.z.\cos(aT) + 1}$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z^{-1}.sen(aT)}{1 - 2.z^{-1}.\cos(aT) + z^{-2}}$$

$$S(z)\left(1 - 2.z^{-1}.\cos(aT) + z^{-2}\right) = \; E(z)(z^{-1}.sen(aT))$$

A Transformada Z

$$S(z) - 2.z^{-1}S(z).\cos(aT) + z^{-2}S(z) = E(z)z^{-1}.sen(aT)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$s(k) - 2.s(k-1).\cos(aT) + s(k-2) = e(k-1).sen(aT)$$

$$\boxed{s(k) = 2.\cos(aT).s(k-1) + sen(aT).e(k-1) - s(k-2)}$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Como vimos, a transformada Z permite modelar sistemas dinâmicos, tal como a transformada de Laplace.
- Normalmente os sistemas usam a Transformada de Laplace para a modelagem dinâmica.
- Então, se tivermos uma maneira de converter uma equação de Laplace para uma equação em Z, teremos um procedimento para a implementação digital desse sistema dinâmico.
- Isso pode ser usado para simulação de sistemas físicos, implementação de controle digital e filtros ativos.
- É uma ferramenta bastante usada na área de processamento digital de sinais.

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Considere o sinal contínuo $f(t) = e^{-at}$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{1}{s+a}$.
- A equação possui um pólo em $s = -a$.
- A transformada Z de $f(kT)$, como vimos, é $F(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}$
- O pólo está em $z = e^{-aT}$.
- Daí pode-se inferir uma relação entre Laplace e Z, pois essa equivalência entre os pólos é geral, com T sendo o período de amostragem:

$$z = e^{sT}$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Uma outra forma de ver essa relação é no deslocamento exponencial no tempo da transformada de Laplace.
- Essa propriedade diz que a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$ é $f(t-a)$ para $t \geq a$.
- Ou seja, multiplicar por e^{-sT}, fazendo $a = T$, significa multiplicar por z^{-1}
- Isso atrasa a função em T, tal como foi demonstrado nas propriedades da transformada Z.

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

Conversão de s para z:

- A expressão $z = e^{sT}$ não é adequada para a implementação de sistemas discretos
- Existem várias aproximações utilizadas para converter uma equação em s para uma equação em z.
- As duas mais simples são as baseadas na propriedade da transformada de Laplace com a derivação, chamada **backward difference**, e a integração, conhecido como **método de Tustin**.

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

Backward Difference

- O método baseado na derivação leva em conta que a transformada inversa de $s.F(s)$ é a derivada do sinal no tempo.
- Em um sistema amostrado com intervalo de amostragem T:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(k) - f(k-1)}{T}$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- Tirando a transformada Z dessa expressão, obtemos:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{F(z) - z^{-1}F(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T}F(z)$$

- Então o que em Laplace tem o mesmo efeito de derivação causado por $s.F(s)$, em Z é causado por $\frac{1-z^{-1}}{T}F(z)$. Portanto chegamos à relação:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

Método de Tustin

- O método de Tustin é baseado na integração
- Suponha que $u(t)$ é a integral de um sinal $e(t)$. Em Laplace, isso pode ser escrito assim:

$$U(s) = \frac{1}{s}E(s)$$

- Tomando tempos discretos, podemos escrever que:

$$u(kT) = \int_0^{kT} e(t)dt = \int_0^{kT-T} e(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t)dt$$

- Que pode ser reescrito como:

$$u(kT) = u(kT - T) + \acute{a}rea\ \ sob\ \ e(t)\ \ no\ \ \acute{u}ltimo\ \ per\acute{\imath}odo\ \ T$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- O método de Tustin consiste em aproximar essa área pela área de um trapézio:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)]$$

- Ou, tirando a transformada Z:

$$U(z) = \frac{T}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right).E(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}.E(z)$$

- Então a equivalência entre Laplace e Z é dada por:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Relação entre a transformada de Laplace e a transformada Z

- O método Backward Difference tem um maior erro em relação ao de Tustin, já que este se adequa melhor comparado ao sinal contínuo
- Entretanto, para valores pequenos de T pode ficar instável, com grandes flutuações.
- Por isso o método Backward Difference é mais usado pela sua simplicidade e flexibilidade, embora seja menos preciso.

Implementação de um Controlador PID

O tradicional controle PID tem a seguinte equação com as três componentes proporcional, integrativa e derivativa:

$$u(t) = G_p e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + \ T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Em Laplace:

$$U(s) = \ G_p E(s) + \frac{1}{sT_i} E(s) + sT_d E(s)$$

$$U(s) = \left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right) E(s)$$

Temos a função de transferência:

$$E(s) \longrightarrow \boxed{\left(G_p + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)} \longrightarrow U(s)$$

Implementação de um Controlador PID

- Vamos aplicar a aproximação por Backward Difference, substituindo $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$, para obter a equação em Z:

$$U(z) = \left(G_p + \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_i} + \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)T_d\right)E(z)$$

$$U(z) = \left(G_p + \frac{T}{(1-z^{-1})T_i} + \frac{(1-z^{-1})T_d}{T}\right)E(z)$$

$$U(z) = \frac{G_pTT_i(1-z^{-1}) + T^2 + T_dT_i(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})TT_i}E(z)$$

$$(1-z^{-1})TT_iU(z) = \left(G_pTT_i(1-z^{-1}) + T^2 + T_dT_i(1-2z^{-1}+z^{-2})\right)E(z)$$

$$(TT_i - TT_iz^{-1})U(z) = \left((G_pTT_i + T^2 + T_dT_i) - (G_pTT_i + 2T_dT_i)z^{-1} + T_dT_iz^{-2}\right)E(z)$$

$$TT_iU(z) - TT_iz^{-1}U(z) = (G_pTT_i + T^2 + T_dT_i)E(z) - (G_pTT_i + 2T_dT_i)z^{-1}E(z) + T_dT_iz^{-2}E(z)$$

Implementação de um Controlador PID

Tomando a transformada $\mathcal{Z}^{-1}$:

$$TT_i u(k) - TT_i u(k-1) = \left(G_p TT_i + T^2 + T_d T_i\right)e(k) - \left(G_p TT_i + 2T_d T_i\right)e(k-1) + T_d T_i e(k-2)$$

$$TT_i u(k) = TT_i u(k-1) + \left(G_p TT_i + T^2 + T_d T_i\right)e(k) - \left(G_p TT_i + 2T_d T_i\right)e(k-1) + T_d T_i e(k-2)$$

$$u(k) = \frac{TT_i u(k-1)}{TT_i} + \left(\frac{G_p TT_i}{TT_i} + \frac{T^2}{TT_i} + \frac{T_d T_i}{TT_i}\right)e(k) - \left(\frac{G_p TT_i}{TT_i} + \frac{2T_d T_i}{TT_i}\right)e(k-1) + \frac{T_d T_i}{TT_i}e(k-2)$$

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + \left(G_p + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e(k) - \left(G_p + \frac{2T_d}{T}\right)e(k-1) + \frac{T_d}{T}e(k-2)}$$

Implementação de um Controlador PID

Trecho de código em C para o Arduino:

```
...
void loop() {
      ...
      currentMillis = millis();
      if(currentMillis - previousMillis >= interval) {
            previousMillis = currentMillis;

            vel = (counter*20000)/interval;
            // Velocidade em rpm;  counter incrementa a cada 120 graus.  Portanto
            // conter/(3T) = rotacoes por segundo; counter*20/T = rpm; interval esta em milisegundos.
            counter = 0;

            //PID
            e2 = e1;
            e1 = e0;
            e0 = setpoint - vel;
            u0 = u0 + (Gp*(e0-e1))/1000 + (e0*interval)/Ti + (Td*e0 - 2*Td*e1 + Td*e2)/interval;
            //Equação implementada somente com inteiros, por isso a divisão por 1000 para Kp

            if(u0>12000) u0=12000;
            if(u0<0) u0=0;
            pwm = map(u0, 0, 12000, 255, 0);
      }
      ...
}
```