CAPÍTULO 3
PORTAS LÓGICAS E ÁLGEBRA BOOLEANA

- Introdução
- Tabela Verdade
- Operações OR e AND
- Portas OR e AND
- Inversor
- Expressões Algébricas
- Portas NAND e NOR
- Teoremas Booleanos

Introdução

- A **álgebra booleana** nos permite descrever algebrica-mente as relações entre as saídas e as entradas dos circuitos lógicos.
- As portas lógicas são os blocos fundamentais a partir dos quais todos os circuitos digitais são construídos.
- A álgebra booleana é uma ferramenta usada na descrição, na análise, no projeto e na implementação dos circuitos digitais.
- Bem mais simples que a álgebra convencional. As variáveis possuem só dois valores possíveis: 0 e 1. (níveis lógicos) e apenas três operações básicas (operações lógicas): OR (OU), AND (E) e NOT (NÃO)

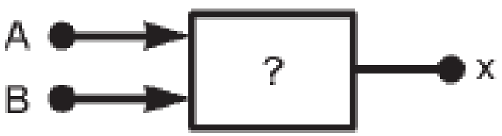
Tabela Verdade

- Exemplo de tabela verdade para: (a) duas entradas, (b) três entradas, (c) quatro entradas:

Output

Inputs

A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0



(a)

A	B	C	x
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(b)

A	B	C	D	x
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

(c)

Tabela Verdade

- Técnica que serve para determinar como a saída de um circuito lógico depende dos níveis lógicos presentes nas entradas do circuito.
- A tabela verdade relaciona todas as possíveis combinações para os níveis lógicos presentes nas entradas.
- Se o número de entradas de um circuito for N, o número de linhas da tabela verdade será 2^N.
- Geralmente a tabela verdade é construída com as entradas variando em sequência, numa contagem binária crescente.

Operação OR (OU) e a Porta OR

- A operação OU de duas entradas A e B produz um nível lógico 1 como resultado se a entrada A **ou** a entrada B estiverem em nível lógico 1.

OR

A	B	$x = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta OR

- A expressão booleana para a operação OU é:

$$x = A + B$$

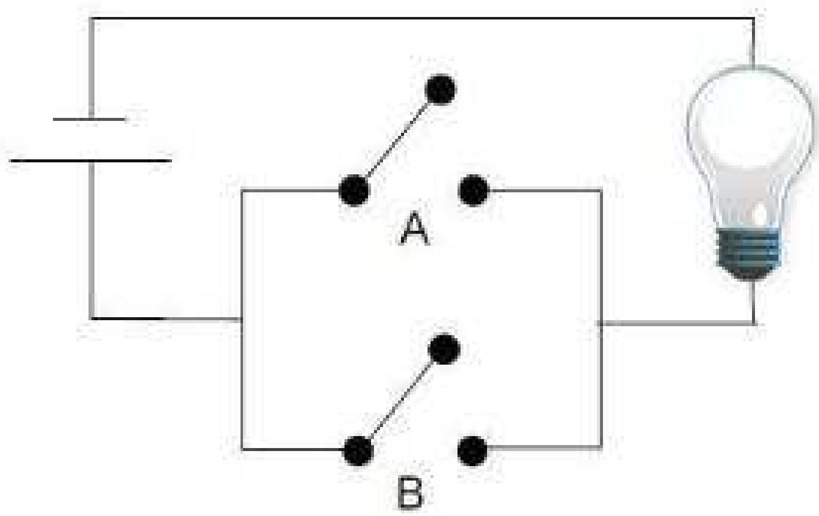
- Para três entradas, teremos:

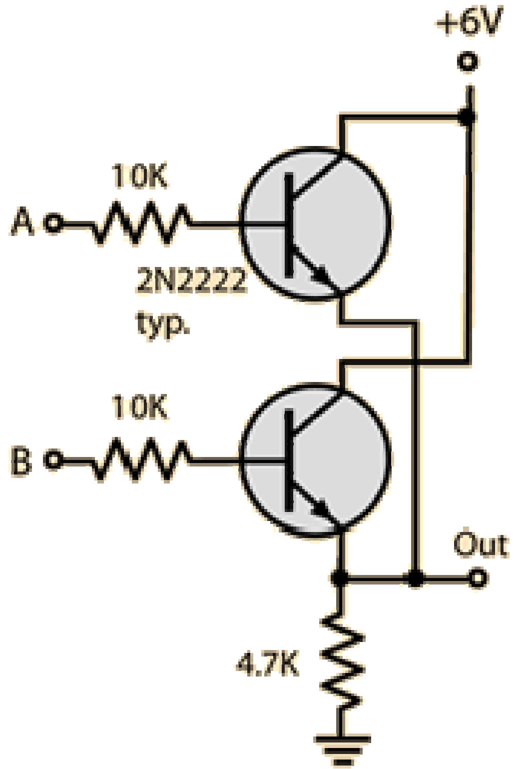
$$x = A + B + C$$

- Se A, B e C forem 1, teremos $x = 1 + 1 + 1 = 1$

Operação OR (OU) e a Porta OR

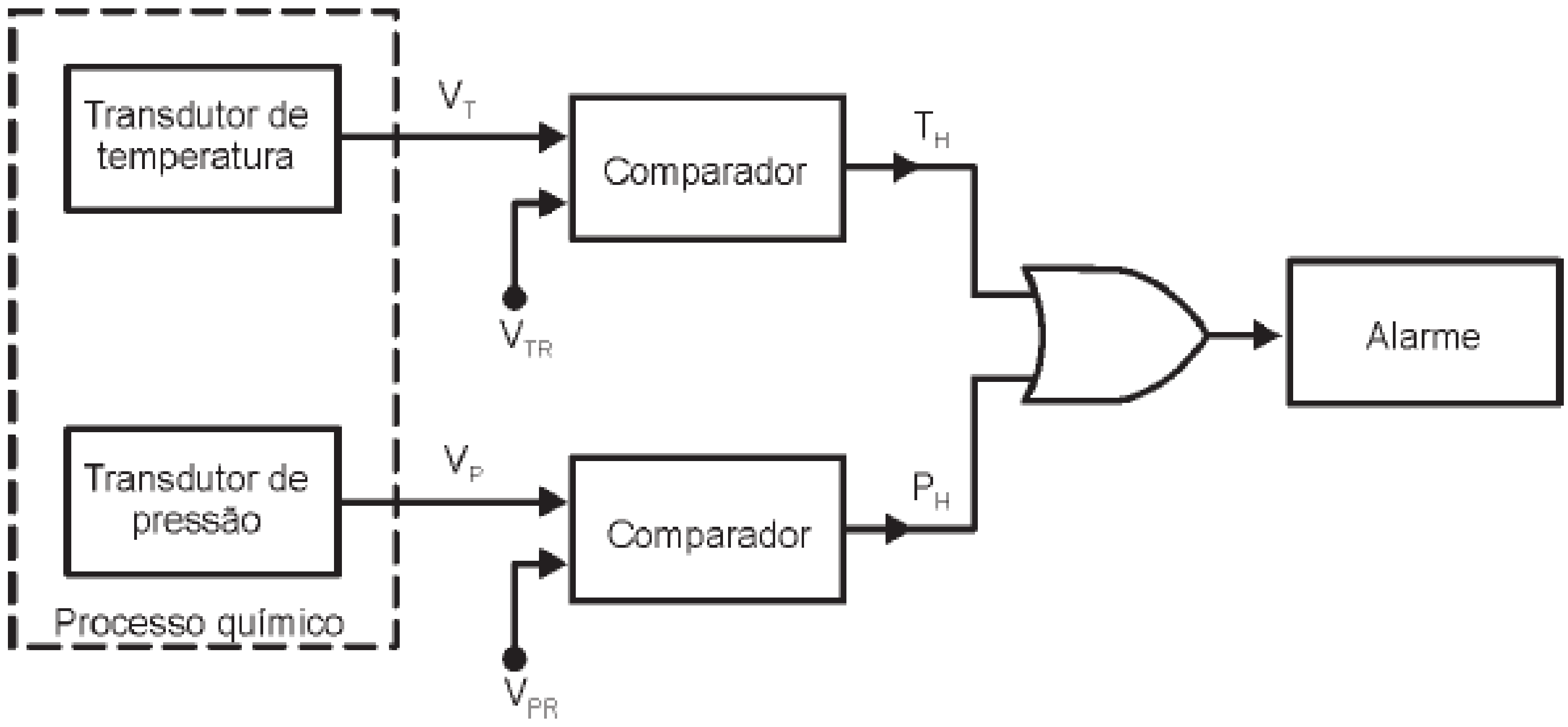
- Uma porta OR é um circuito com duas ou mais entradas que implementa a operação OU





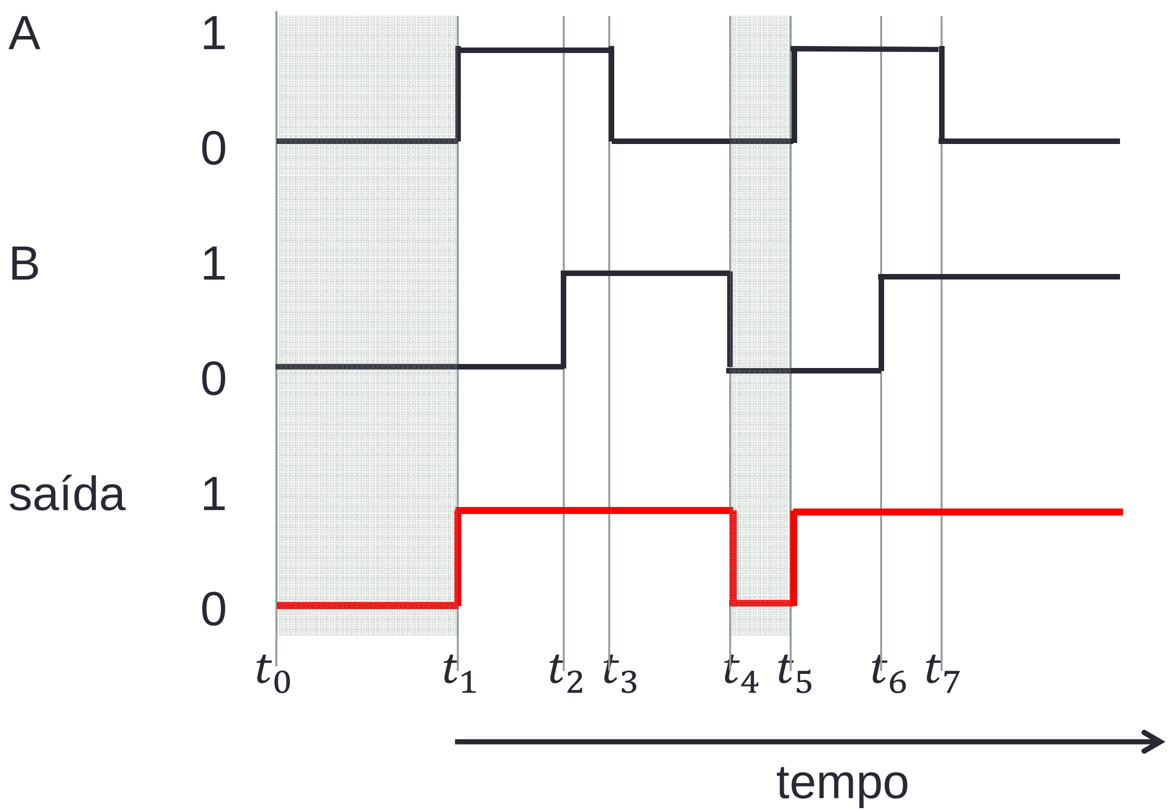
Exemplo

- Uso de uma porta OR em um sistema de alarme. O alarme deve ser ativado quando a temperatura OU a pressão excederem os seus respectivos limites (dados por V_{TR} e V_{PR}).



Exemplo

- Determine a saída da porta OR. As entradas A e B variam de acordo com o diagrama de tempo mostrado.

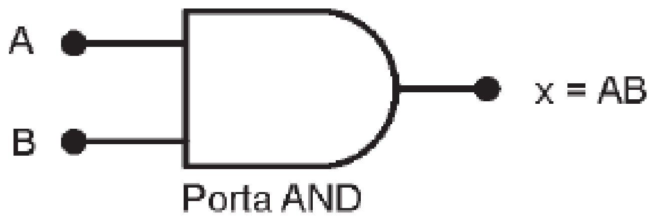


Operação AND (E) e a Porta AND

- A operação AND de duas entradas A e B produz um nível lógico 1 como resultado somente se ambas as entradas A e B estiverem em nível lógico 1.

AND

A	B	$x = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- A expressão booleana para a operação AND é:

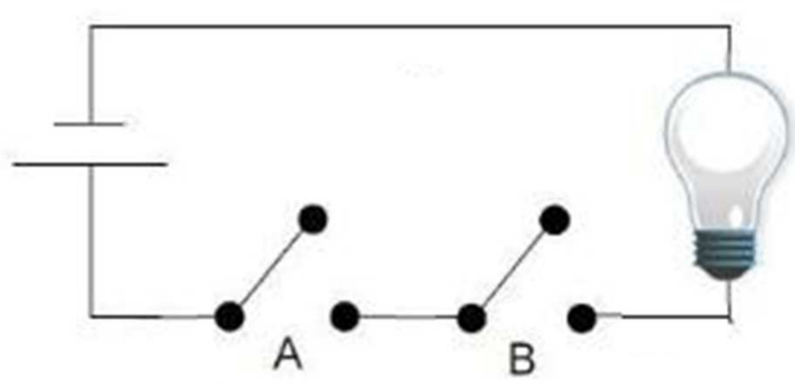
$$x = A.B = AB$$

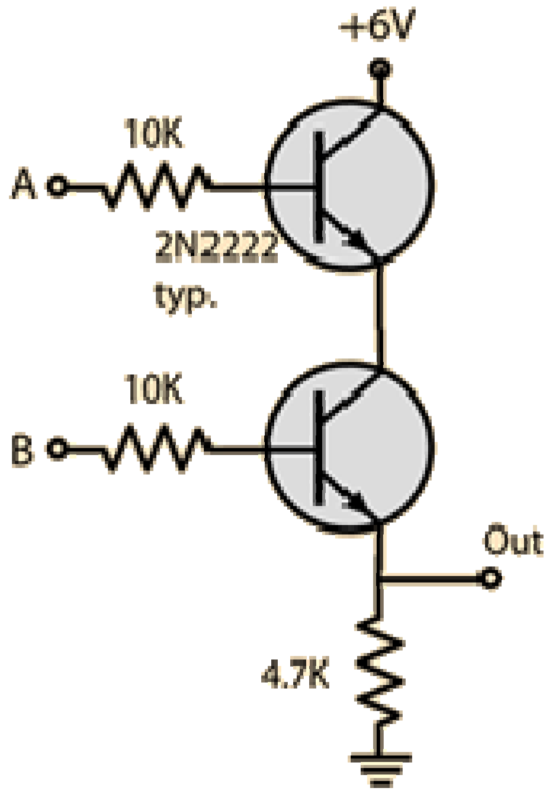
- Para três entradas, teremos:

$$x = A.B.C = ABC$$

Operação AND (E) e a Porta AND

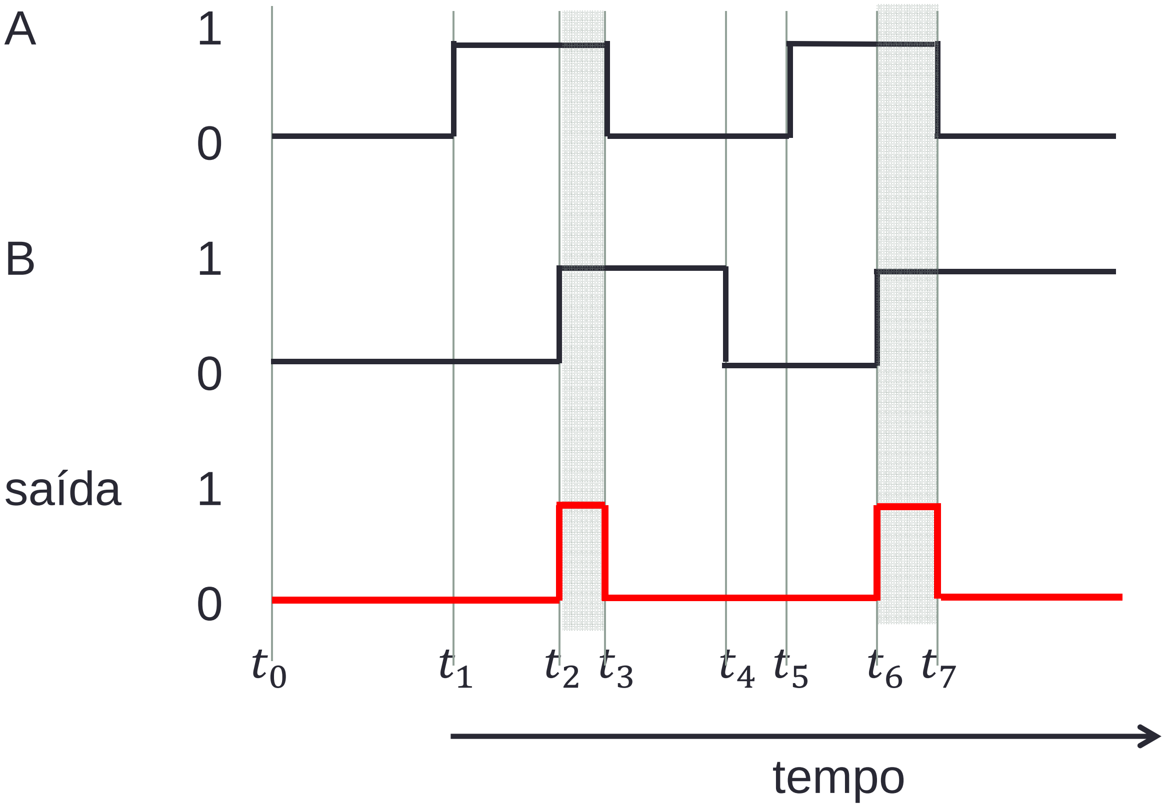
- Uma porta AND é um circuito com duas ou mais entradas que implementa a operação E

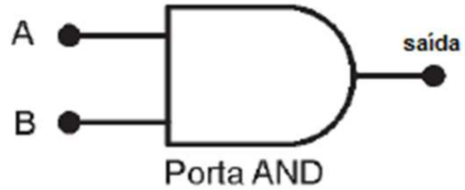




Exemplo

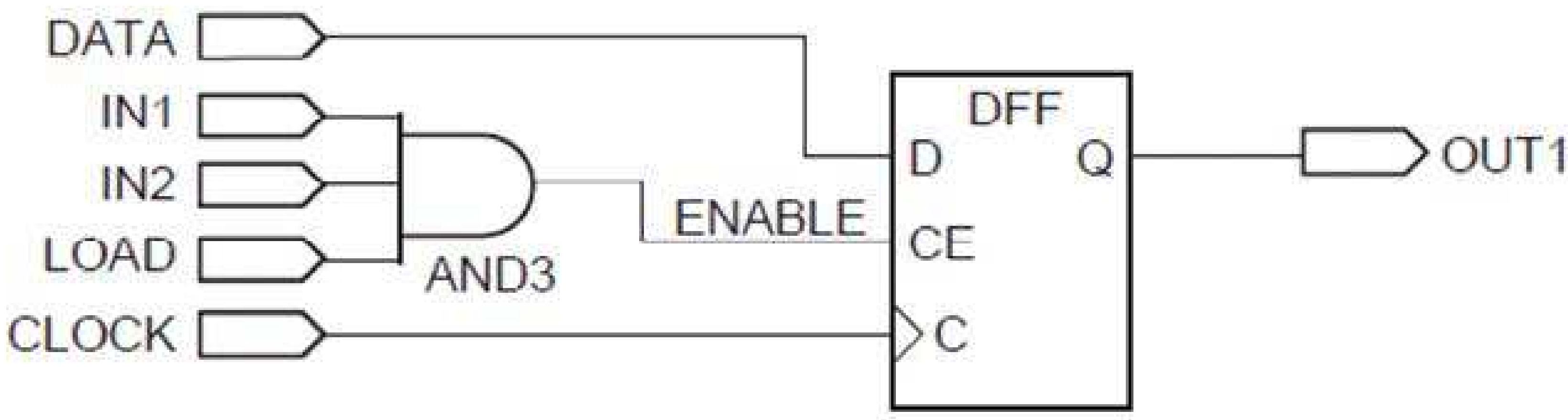
- Determine a saída da porta AND. As entradas A e B variam de acordo com o diagrama de tempo mostrado.





Exemplo de uso de uma porta AND

- Uma porta AND é muito usada quando se quer habilitar (enable) o clock ou um circuito.



Resumo das Operações OR e AND

- A operação OR gera um resultado (saída) 1 sempre que **qualquer** das entradas for 1. Caso contrário a saída é 0.
- Uma porta OR é o circuito que realiza a operação OR
- A expressão $x = A + B$ é lida assim: “x é igual a A OU B”
- A operação AND é realizada da mesma maneira que a multiplicação convencional de 1s e 0s.
- Uma porta AND é o circuito lógico que realiza a operação AND
- A saída de uma porta AND será 1 apenas quando **todas** as entradas forem 1. Para todos os outros casos a saída é 0.

Operação NOT (NÃO) ou Inversor

- Diferentemente de AND e OR, a operação NOT pode ser realizada sobre uma única variável de entrada. Algebricamente escrevemos:

$$x = \bar{A}$$

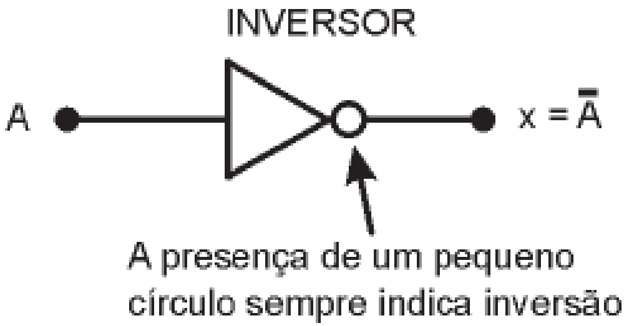
- A barra sobre a variável representa o inversor.
- A expressão significa: “x é igual a A negado”
- Outras alternativas:
  - “x é igual ao inverso de A“
  - “x é igual ao complemento de A“
  - “x é igual a A barrado“

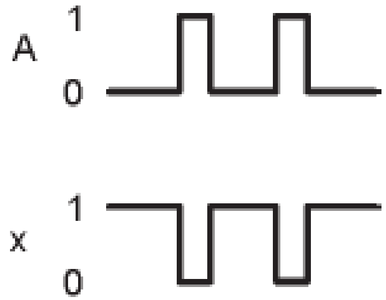
Circuito Inversor

- O inversor sempre tem só uma entrada e seu nível lógico da saída é o oposto ao nível lógico da entrada.

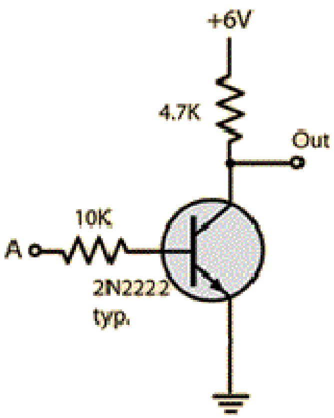
INVERSOR

A	$x = \bar{A}$
0	1
1	0





- Implementação com Transistor:



A	Vout
0V	6V
6V	0V

Resumo das Operações Lógicas Booleanas

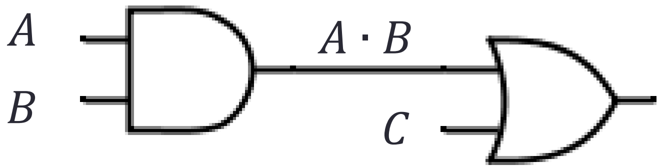
OR	AND	NOT
$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$	$\overline{1} = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$	
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	

- Questões:
  - Qual será a tabela verdade de uma porta OR com uma função NOT ligada à sua saída?
  - E para uma porta AND?
  - Você consegue criar uma porta AND através de uma porta OR e alguns inversores?
  - E criar uma porta OR usando a porta AND e inversores?

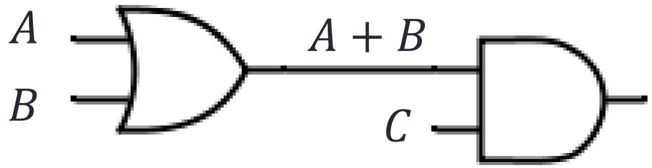
Descrevendo Circuitos Lógicos Algebricamente

- As portas AND, OR e NOT são os blocos fundamentais dos circuitos digitais
- Portanto qualquer circuito pode ser descrito através dessas três funções.
- Quando combinamos portas lógicas, uma expressão booleana será a variável de entrada de alguma porta lógica.
- Ao combinar expressões AND e OR, a operação AND é realizada primeiro, como na álgebra comum para a operação de multiplicação.
- Parêntesis são usados para se alterar a precedência.

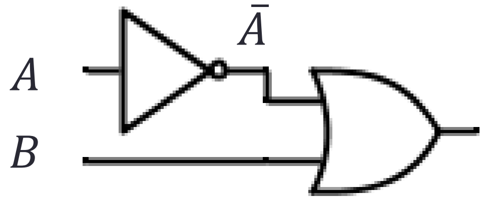
Exemplos



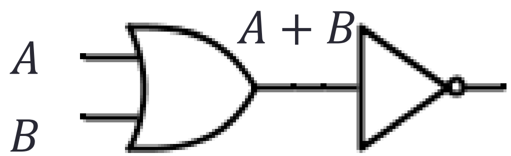
$$x = A \cdot B + C$$



$$x = (A + B) \cdot C$$



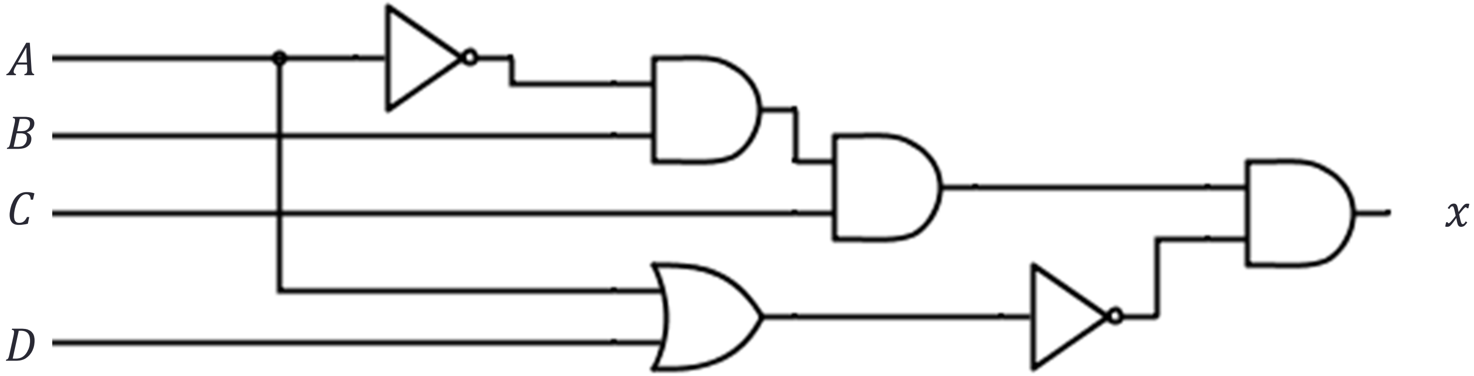
$$x = \bar{A} + B$$

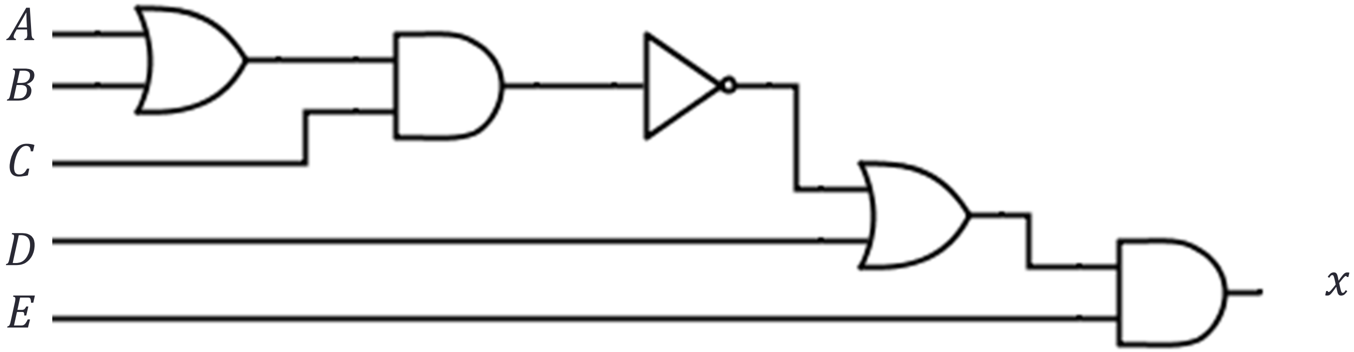


$$x = \overline{A + B}$$

Exercícios

- Nos circuitos abaixo: (a) escreva a expressão booleana para a saída x. (b) troque cada porta AND por porta OR e cada porta OR por porta AND e escreva novamente a expressão booleana para a saída x para os dois circuitos.





Avaliando a Saída dos Circuitos Lógicos

- Uma vez de posse da expressão Booleana para a saída de um circuito, podemos obter o nível lógico da saída para qualquer combinação de níveis lógicos de entrada.
- Basta substituir na expressão os 0s e 1s e avaliar o resultado. Por exemplo:
- Avaliar $x = \bar{A}BC(\overline{A + D})$ para o caso em que $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 1$

$$x = \bar{A}BC(\overline{A + D})$$
$$x = \bar{0} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{0 + 1})$$
$$x = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{0 + 1})$$
$$x = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\bar{1})$$
$$x = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0$$
$$x = 0$$

Avaliando a Saída dos Circuitos Lógicos

- Outro exemplo: Avaliar $x = \left(D + \overline{(A + B)C}\right) \cdot E$ para o caso em que $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 1$ e $E = 1$

$$x = \left(D + \overline{(A + B)C}\right) \cdot E$$

$$x = \left(1 + \overline{(0 + 0) \cdot 1}\right) \cdot 1$$

$$x = (1 + \overline{0 \cdot 1}) \cdot 1$$

$$x = (1 + \overline{0}) \cdot 1$$

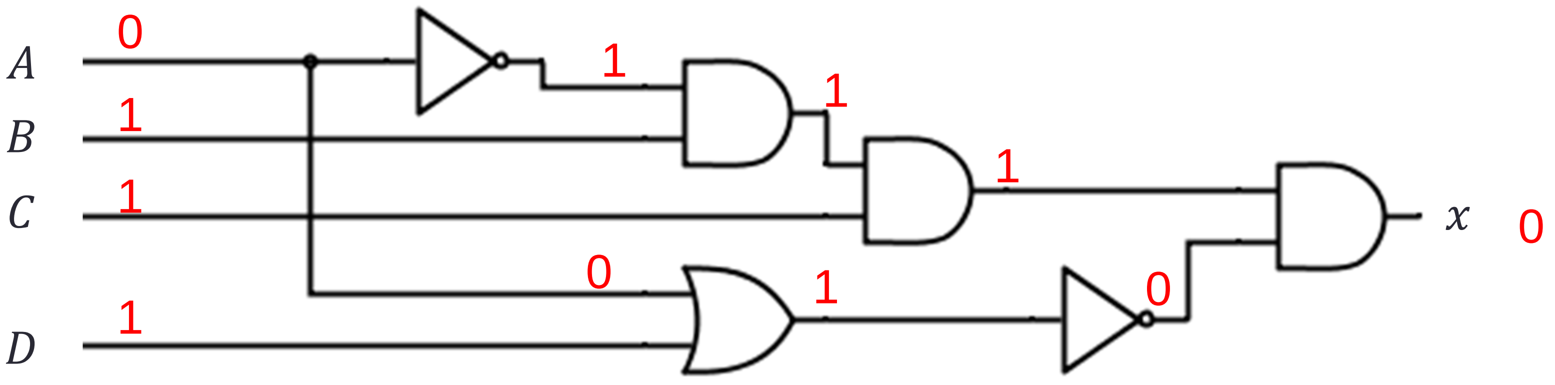
$$x = (1 + 1) \cdot 1$$

$$x = 1 \cdot 1$$

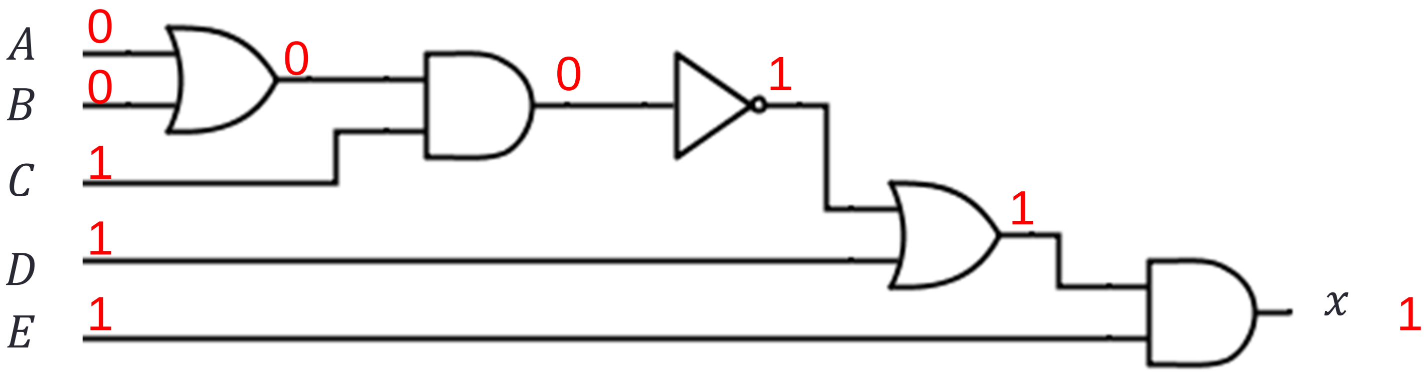
$$x = 1$$

Determinando o nível lógico da saída a partir de um diagrama

(1)



(2)



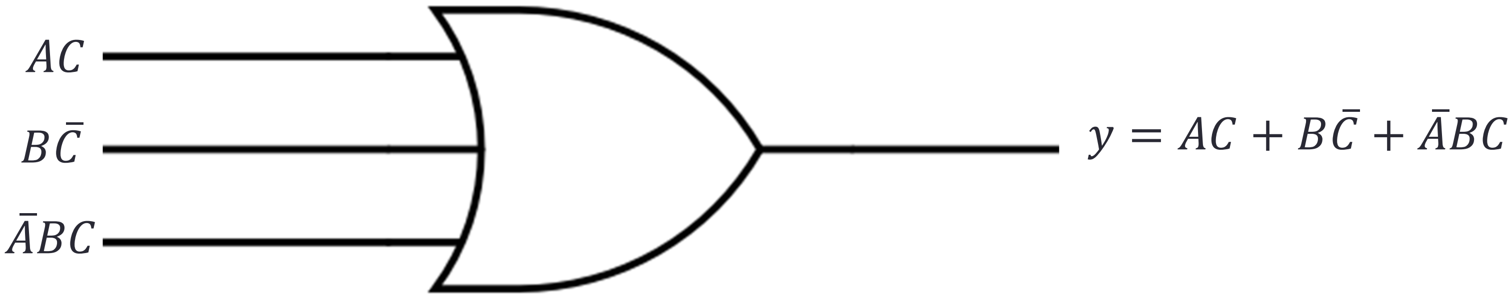
Exercícios

- Para os circuitos apresentados no slide anterior:

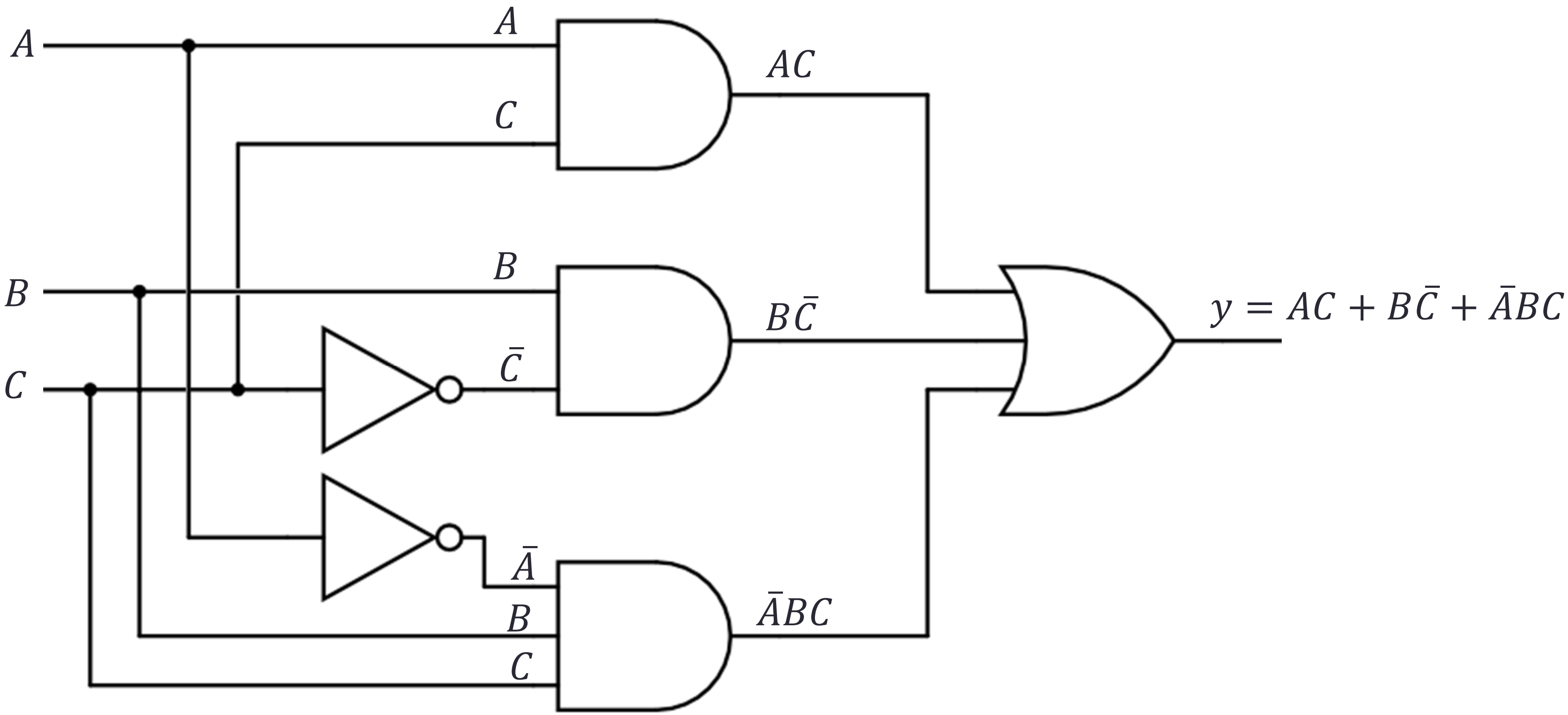
1. Use a expressão do circuito em (1) para determinar a saída do circuito para as condições: $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 0$.
2. Use a expressão do circuito em (2) para determinar a saída do circuito para as condições: $\mathrm{A} = B = E = 1$ e $\mathrm{C} = D = 0$.
3. Determine as respostas das questões anteriores a partir do diagrama.

Implementando circuitos a partir de expressões Booleanas

- Podemos desenhar um circuito a partir da expressão Booleana.
- Seja, por ex., a expressão Booleana $y = AC + B\bar{C} + \bar{A}BC$
- A expressão possui uma operação OR com três entradas que são os termos AC, $B\bar{C}$ e $\bar{A}BC$, como abaixo:



Implementando circuitos a partir de expressões Booleanas



Exercícios

Para cada uma das expressões a seguir, desenhe o circuito lógico correspondente usando portas AND, OR e INVERSORES:

a) $x = \overline{AB(C + D)}$

b) $x = \overline{(A + B + \bar{C}D\bar{E})} + \bar{B}C\bar{D}$

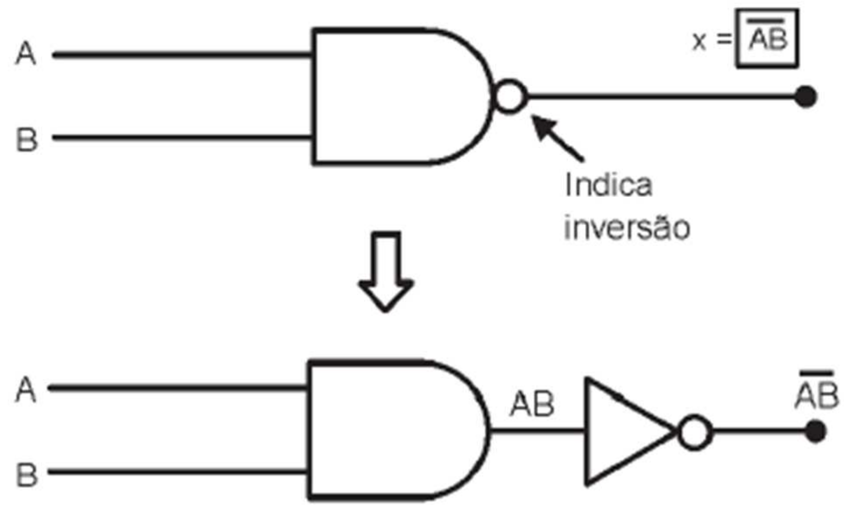
c) $x = (\overline{M + N} + \bar{P}Q)$

d) $x = \overline{W + P\bar{Q}}$

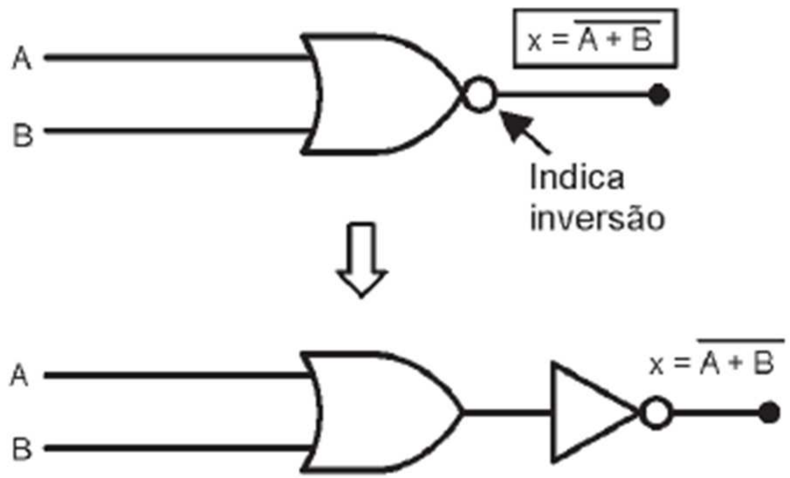
e) $x = MN(P + \bar{N})$

f) $x = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$

Porta NAND e NOR

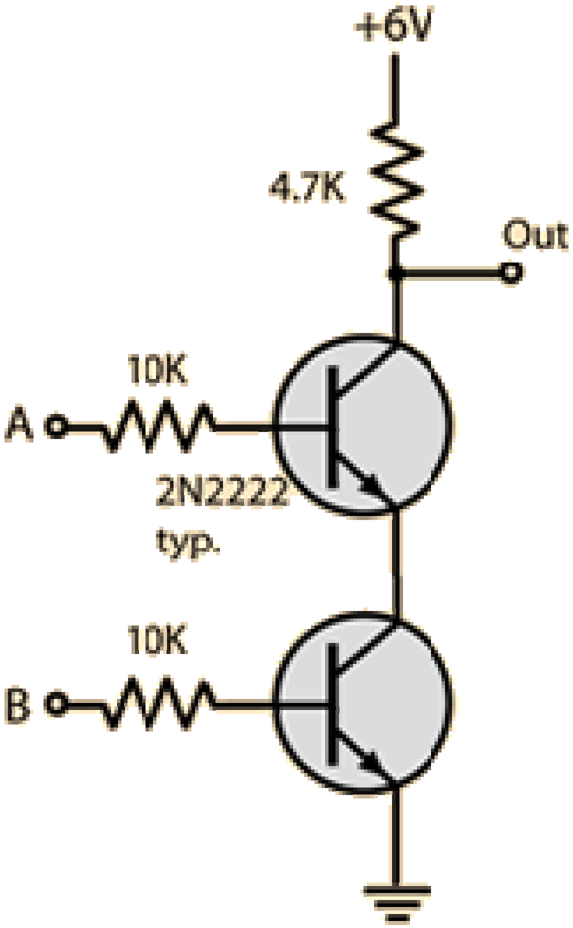


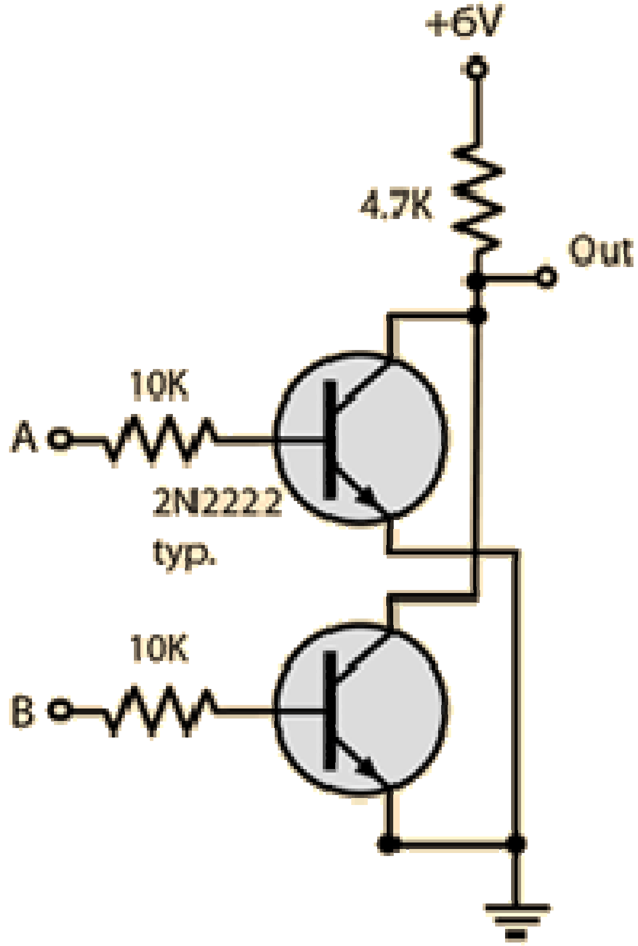
		AND	NAND
A	B	AB	$\overline{AB}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



		OR	NOR
A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

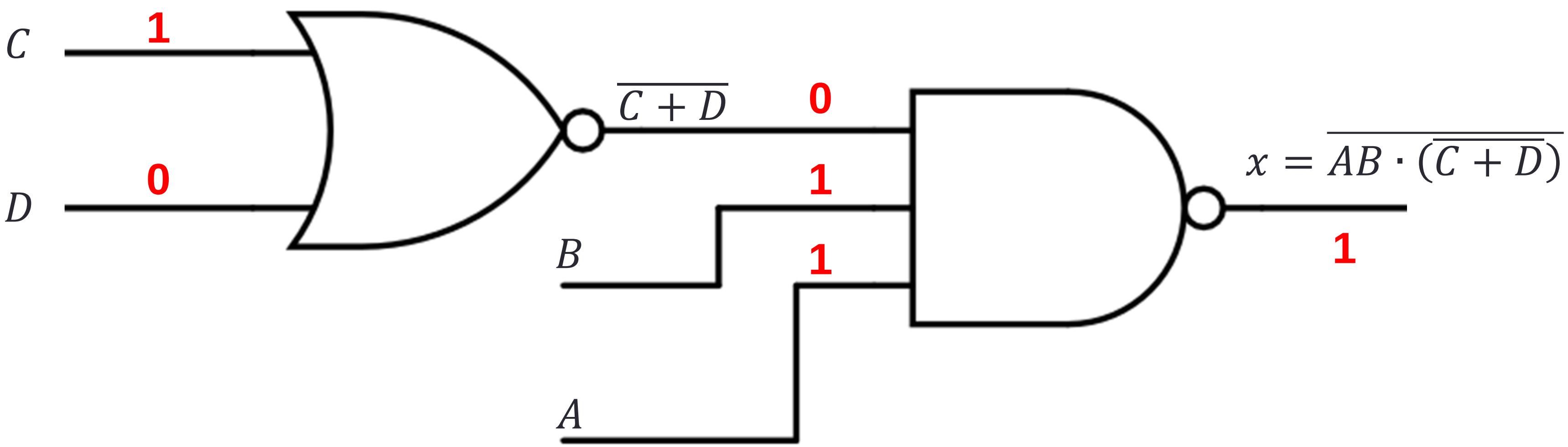
Porta NAND e NOR





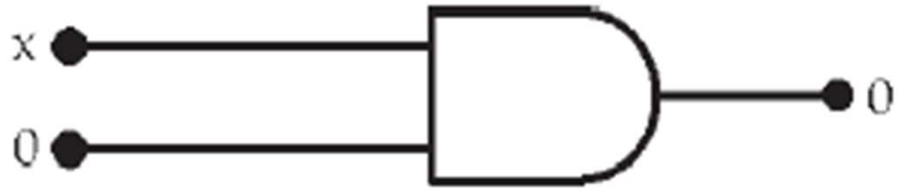
Exemplo

- Implemente o circuito lógico que tem como expressão $x = \overline{AB \cdot (\overline{C + D})}$ usando apenas portas NOR e NAND. Em seguida determine a saída do circuito para $A = B = C = 1$ e $D = 0$.

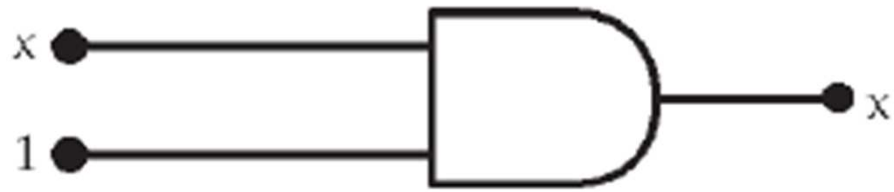


Teoremas Booleanos (portas AND)

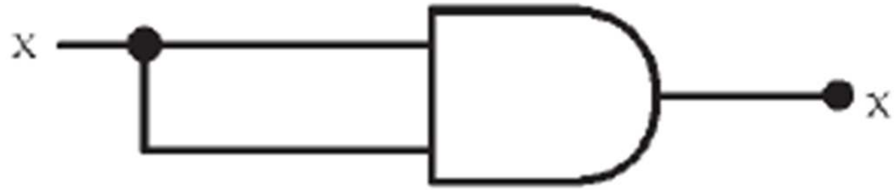
(1) $x \cdot 0 = 0$



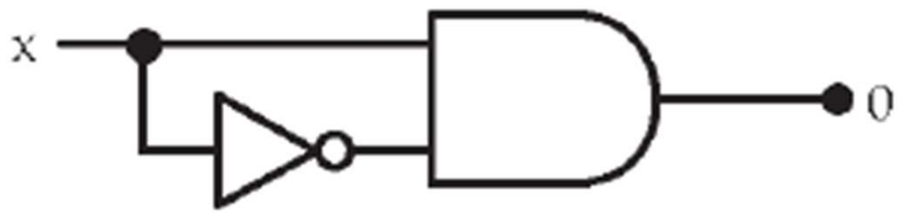
(2) $x \cdot 1 = x$



(3) $x \cdot x = x$



(4) $x \cdot \bar{x} = 0$



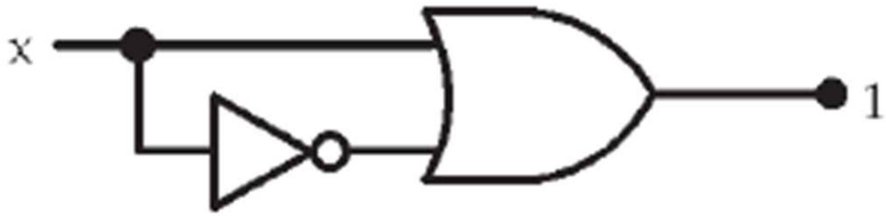
Teoremas Booleanos (portas OR)

(1) $x + 0 = x$

(2) $x + 1 = 1$

(3) $x + x = x$

(4) $x + \bar{x} = 1$



Teoremas com mais de uma variável

$$\left.\begin{array}{ll}(9) & x+y=y+x \\ (10) & x\cdot y=y\cdot x\end{array}\right\}\textit{Leis comutativas}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(11) & x+(y+z)=(x+y)+z=x+y+z \\ (12) & \mathrm{x}(yz)=(xy)z=xyz\end{array}\right\}\textit{Leis associativas}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(13a) & x(y+z)=xy+xz \\ (13b) & (w+x)(y+z)=wy+xy+wz+xz\end{array}\right\}\textit{Leis distributivas}$$

$$\begin{array}{ll}(14) & x+xy=x \\ (15a) & x+\bar{x}y=x+y \\ (15b) & \bar{x}+xy=\bar{x}+y\end{array}$$

Teoremas com mais de uma variável

- Prova do teorema 15a (análogo para o 15b):

$$
\begin{gathered}
x + \bar{x}y = \\
x(\bar{y} + y) + \bar{x}y = \\
x\bar{y} + xy + \bar{x}y = \\
x\bar{y} + xy + xy + \bar{x}y = \\
x(\bar{y} + y) + y(x + \bar{x}) = \\
x.1 + y.1 = \\
x + y =
\end{gathered}
$$

$$x + \bar{x}y = x + y$$

Exercícios

Simplifique as expressões booleanas abaixo:

a) $y = A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$

b) $z = (\bar{A} + B)(A + B)$

c) $x = ACD + \bar{A}BCD$

d) $y = A\bar{C} + AB\bar{C}$ *(use o teorema 14, ou 13 e 6)*

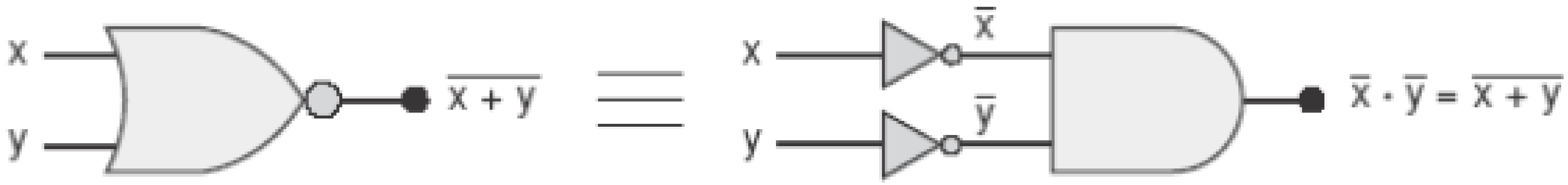
e) $y = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ *(use os teoremas 13 e 8)*

f) $y = A\bar{D} + ABD$ *(use os teoremas 13 e 15b)*

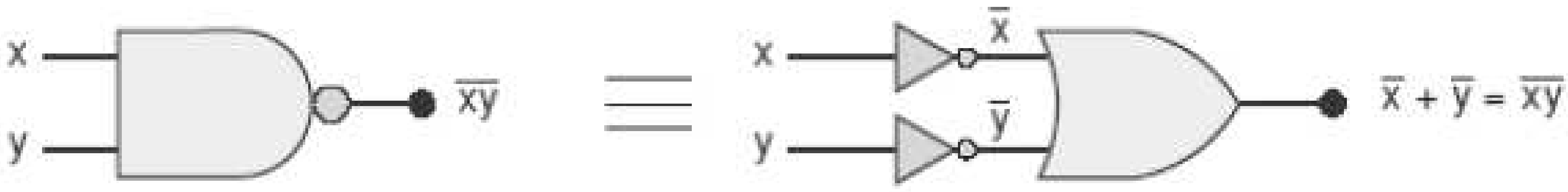
Teoremas de Demorgan

- Os dois teoremas de Demorgan são extremamente úteis:

(16) $$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$



(17) $$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$



Aplicação de Demorgan

Simplifique as expressões abaixo para que elas tenham somente variáveis simples invertidas:

a) $\overline{(A\overline{B} + C)}$

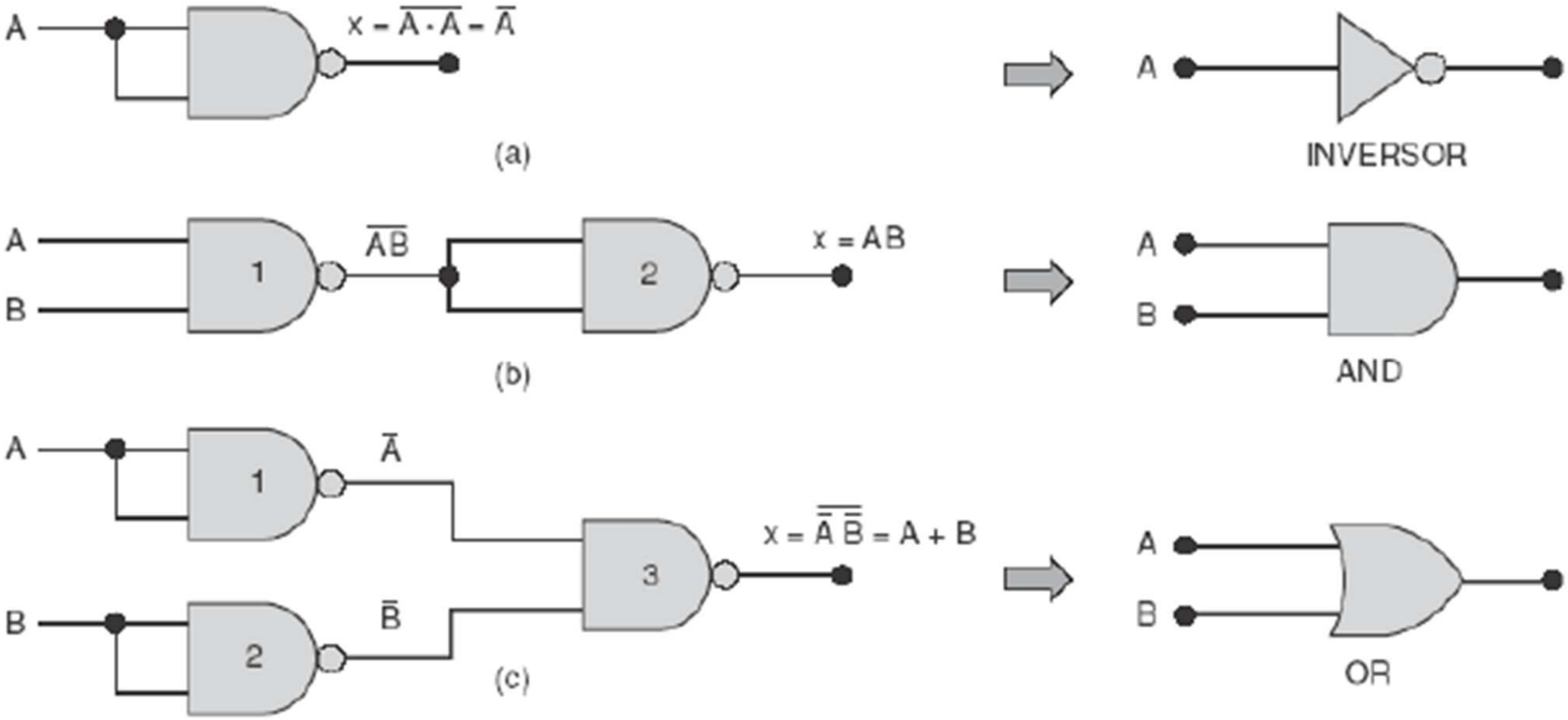
b) $\overline{(\overline{A} + C) \cdot (B + \overline{D})}$

c) $\overline{A + \overline{B} + C}$

d) $\overline{(A + BC) \cdot (D + EF)}$

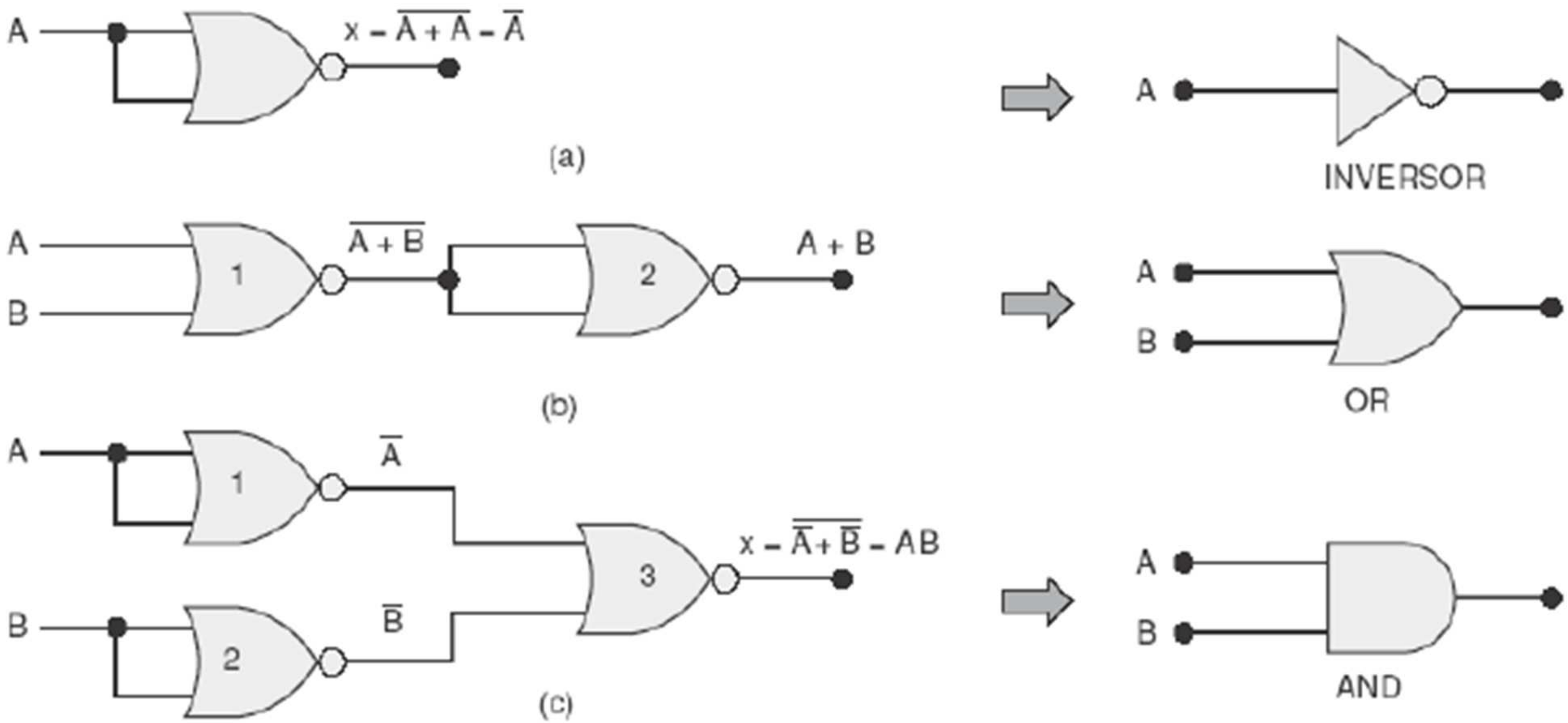
Universalidade das portas NAND e NOR

- Equivalência de portas NAND



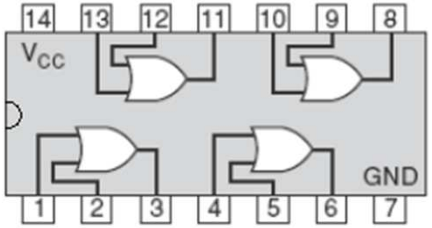
Universalidade das portas NAND e NOR

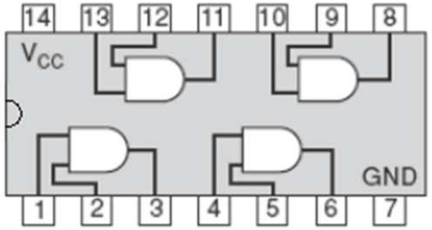
- Equivalência de portas NOR

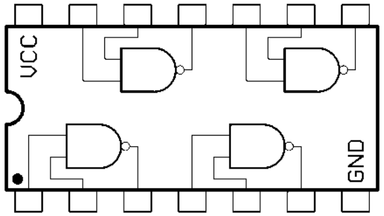


Circuitos Integrados

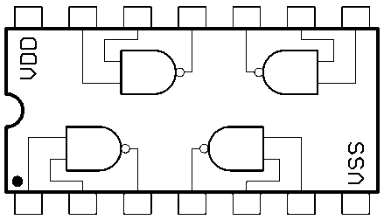
- As portas lógicas estão disponíveis em Circuitos Integrados. Dois exemplos da família TTL são:

74LS32


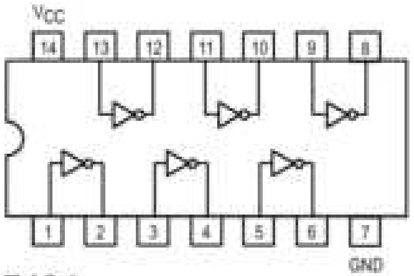
74LS08




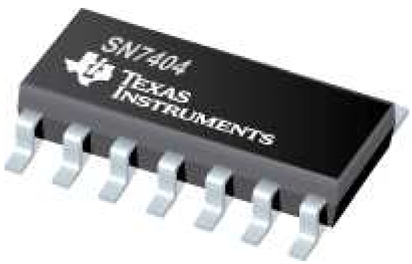
7400



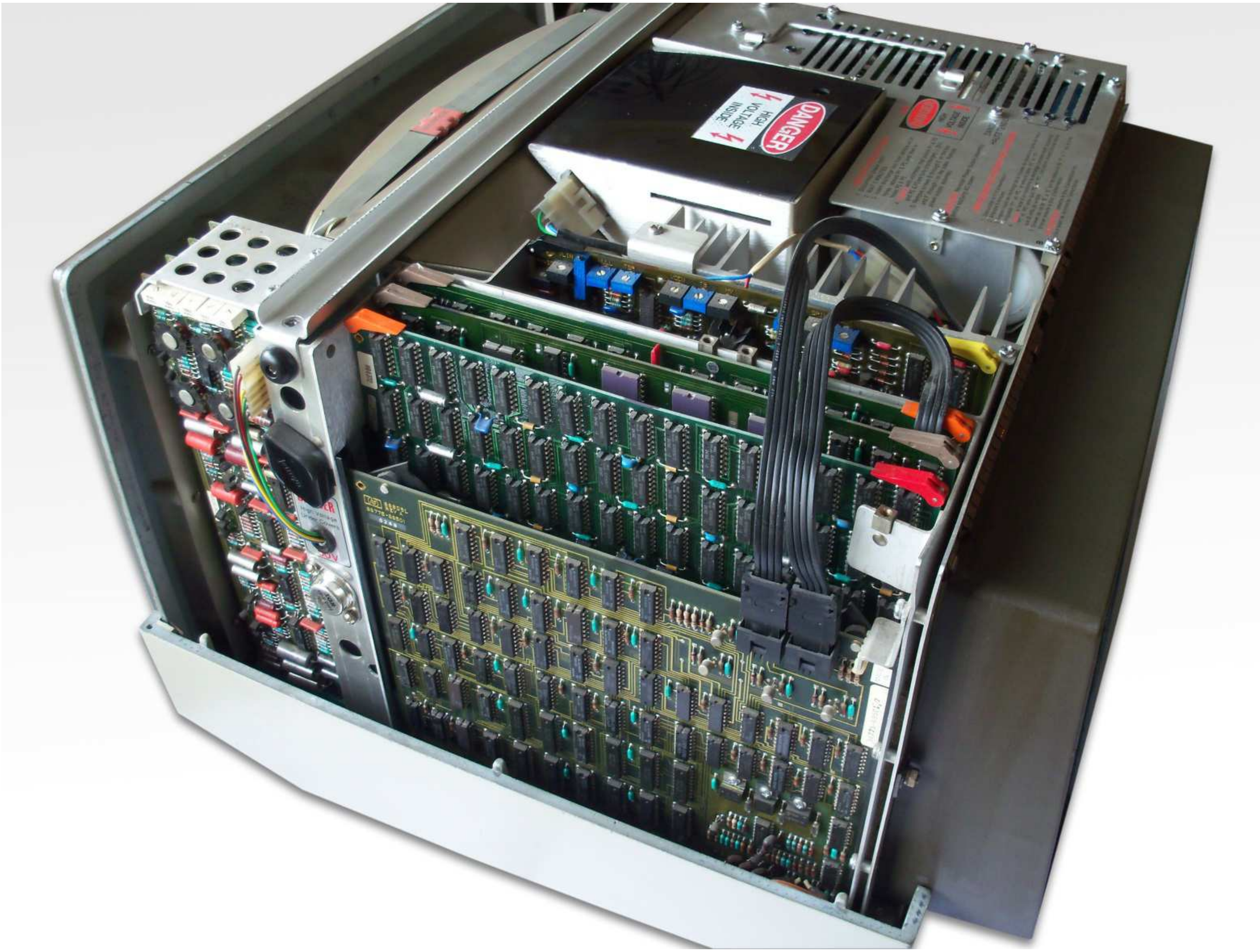
4011



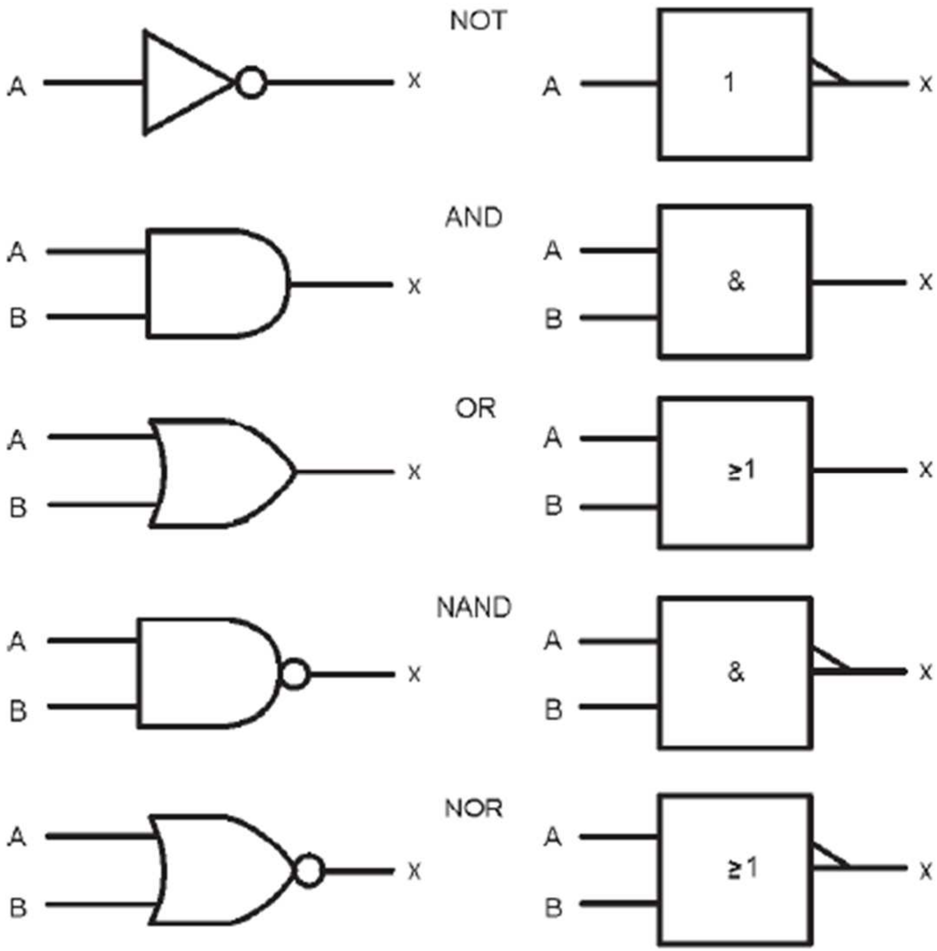
7404



HP9845 Desktop (anos 70)

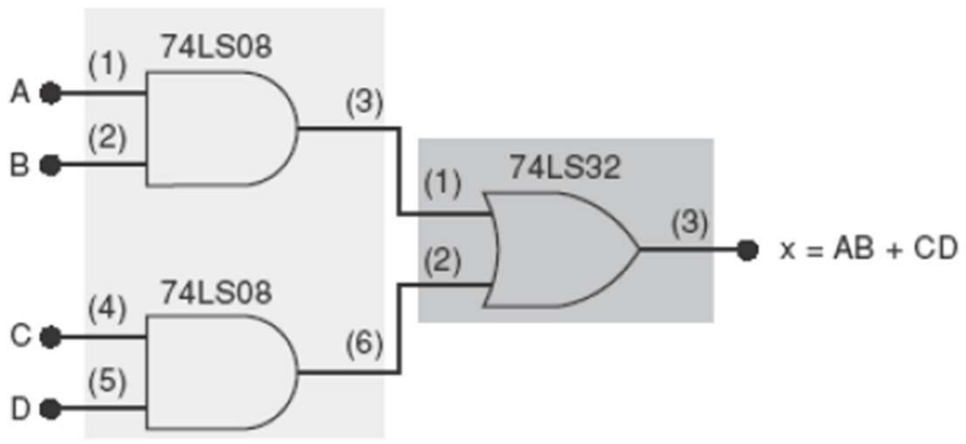


Símbolos Lógicos Padrão IEEE/ANSI



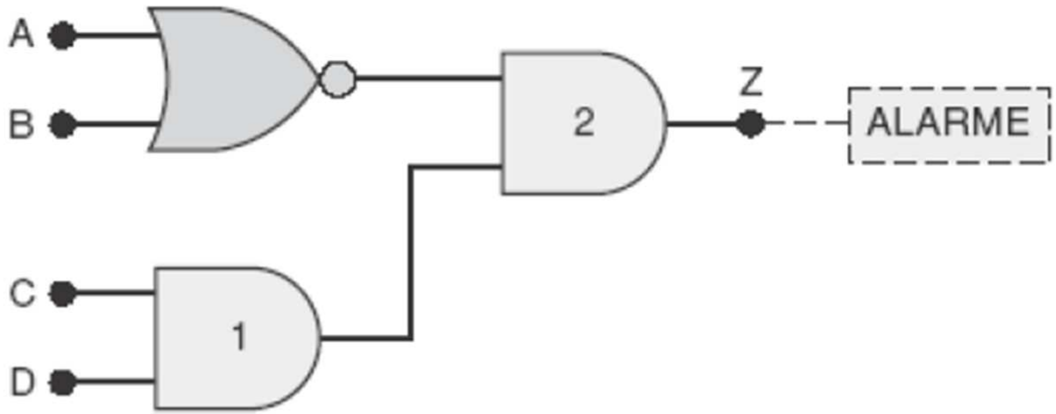
Exercícios

(1) Encontre um circuito equivalente utilizando apenas portas NAND. Repita o exercício utilizando somente portas NOR



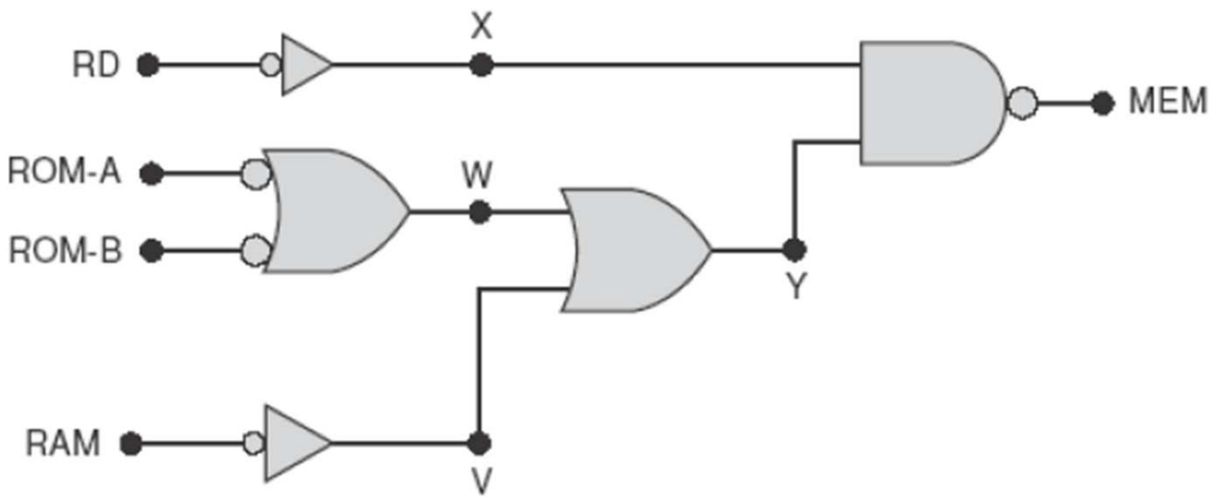
Exercícios

(2) Sabendo que o alarme é ativado quando $Z = 1$, determine em que combinações de entrada o alarme é ativado



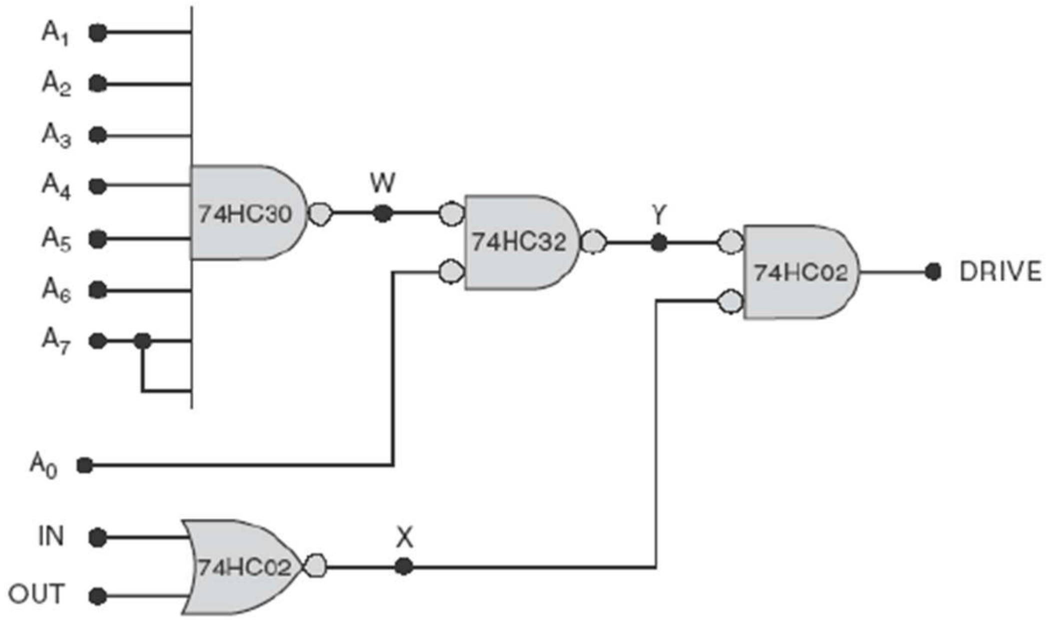
Exercícios

(3) Sabendo que o sinal MEM é ativo quando em nível lógico 1, determine em que condições de entrada ele é ativado.



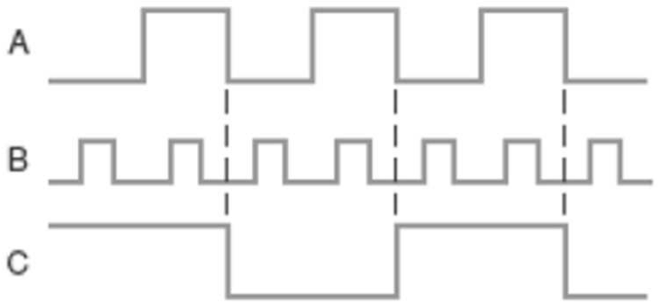
Exercícios

(4) Determine em que condições o sinal DRIVE assume nível lógico alto.



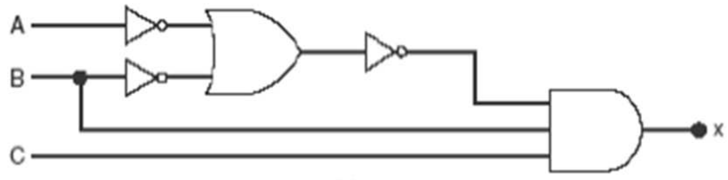
Exercícios

(5) Desenhe o diagrama de tempo com forma de onda da saída x.

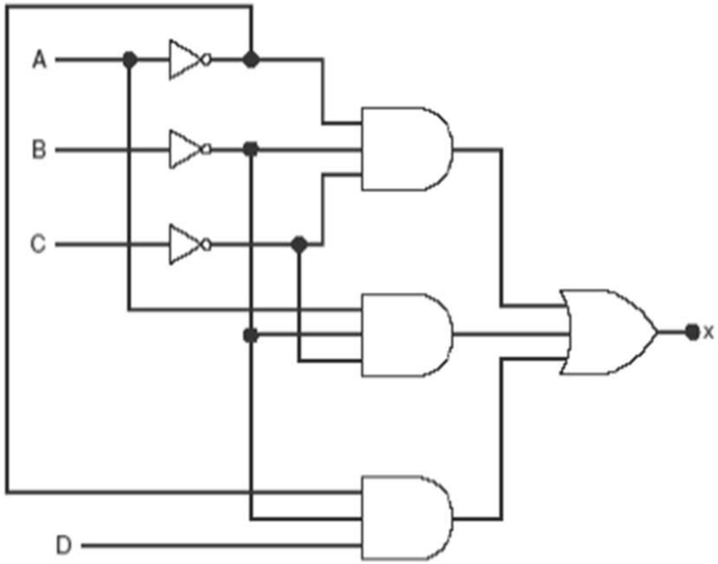


Exercícios

(6) Obtenha as expressões Booleanas e as Tabelas Verdade para os circuitos (a) e (b) abaixo.



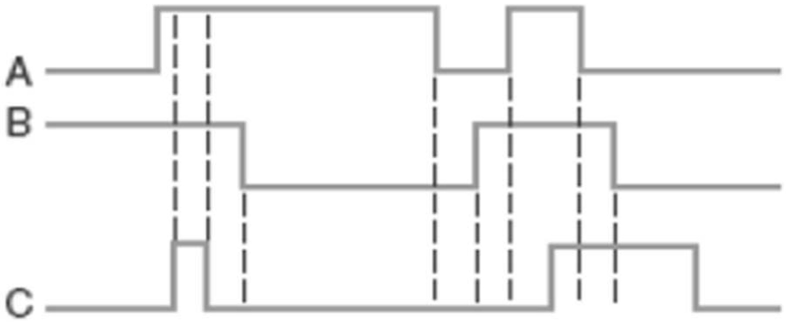
(a)

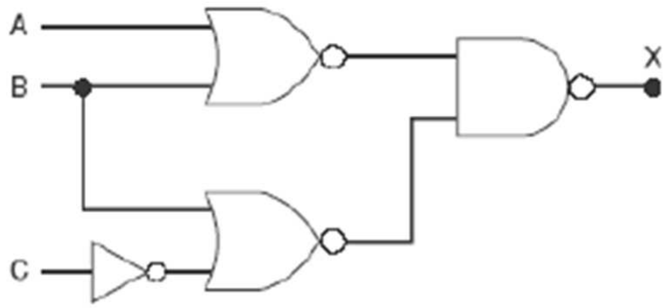


(b)

Exercícios

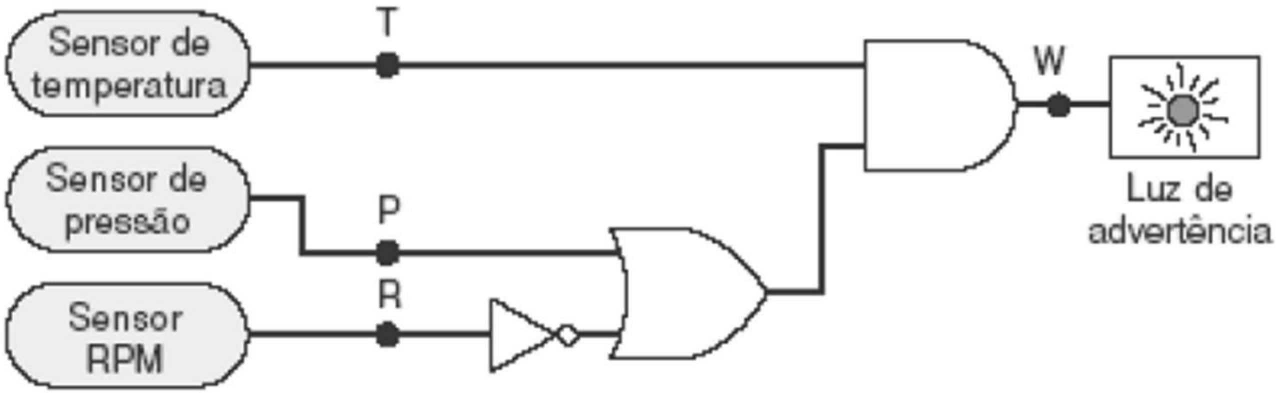
(7) Desenhe o diagrama de tempo com forma de onda da saída x.





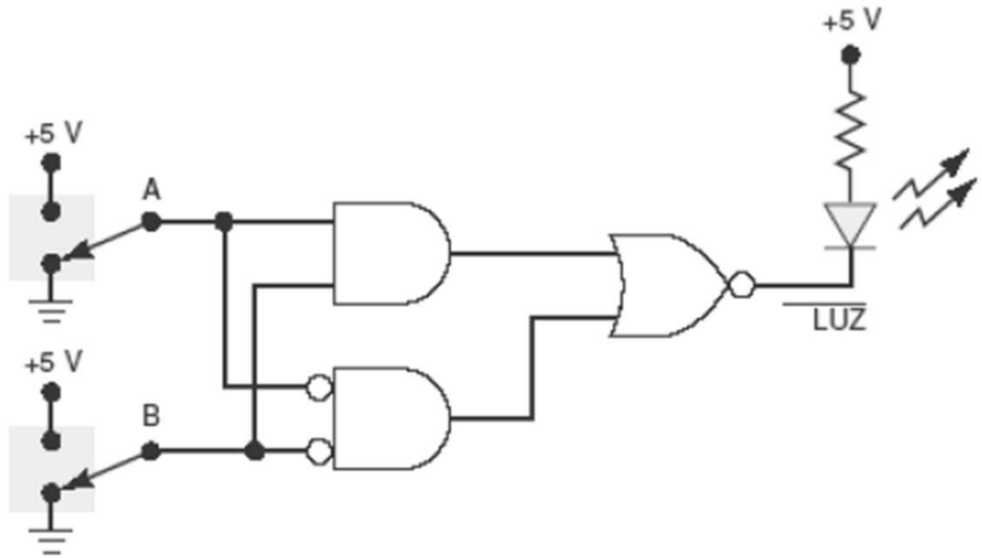
Exercícios

(8) Imagine que os sensores mostrados abaixo monitoram um motor. Quando a operação do motor não é normal, uma luz de advertência é acesa. Em que circunstâncias ela acenderá?



Exercícios

(9) Em que circunstâncias o LED acenderá?



Exercícios

(10) Dado o circuito ao lado, redesenhe o circuito usando um menor número de portas, sem restrições (AND, OR, NAND, NOR e INVERSOR). Encontre também a tabela verdade para o circuito.