UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
CENTRO DE ESTUDOS GERAIS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE

Ana Maria Lima de Farias
Luiz da Costa Laurencel

Setembro de 2007

.

Conteúdo

Capítulo 1

Probabilidade - Conceitos Básicos

1.1 Introdução

No nosso cotidiano, lidamos sempre com situações onde está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis sejam conhecidos. Por exemplo: o sexo de um embrião pode ser masculino ou feminino, mas só saberemos o resultado quando o experimento se concretizar, ou seja, quando o bebê nascer. Se estamos interessados na face voltada para cima quando jogamos um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas só saberemos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. É conveniente, então, dispormos de uma medida que exprima a incerteza presente em cada um destes acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

No estudo das distribuições de freqüências, vimos como essas são importantes para entendermos a variabilidade de um fenômeno aleatório. Por exemplo, se sorteamos uma amostra de empresas e analisamos a distribuição do número de empregados, sabemos que uma outra amostra forneceria resultados diferentes. No entanto, se sorteamos um grande número de amostras, esperamos que surja um determinado padrão que reflita a verdadeira distribuição da população de todas as empresas. Através de um modelo teórico, construído com base em suposições adequadas, podemos reproduzir a distribuição de freqüências quando o fenômeno é observado diretamente. Esses modelos são chamados *modelos probabilísticos* e eles serão estudados na segunda parte do curso de Estatística. A *probabilidade* é a ferramenta básica na construção de tais modelos e será estudada nesta primeira parte.

1.2 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Consideremos o lançamento de um dado. Queremos estudar a proporção de ocorrências das faces desse dado. O primeiro fato a observar é que existem apenas 6 resultados possíveis, as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. O segundo fato é uma suposição sobre o dado: em geral, é razoável supor que este seja equilibrado. Assim, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto, essa proporção deve ser $\frac{1}{6}$. Nessas condições, nosso modelo probabilístico para o lançamento de um dado pode ser expresso da seguinte forma:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Suponhamos que uma mulher esteja grávida de trigêmeos. Sabemos que cada bebê pode ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). Então, as possibilidades para o sexo das três crianças são: MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF. Uma suposição razoável é que todos esses resultados sejam igualmente prováveis, o que equivale dizer que cada bebê tem igual chance de ser do sexo masculino ou feminino. Então cada resultado tem uma chance de $\frac{1}{8}$ de acontecer e o modelo probabilístico para esse experimento seria

Sexo	MMM	MMF	MFM	FMM	FFM	FMF	MFF	FFF	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Por outro lado, se só estamos interessados no número de meninas, esse mesmo experimento leva ao seguinte modelo probabilístico:

Meninas	0	1	2	3	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Nesses exemplos, vemos que a especificação de um modelo probabilístico para um fenômeno casual depende da especificação dos *resultados possíveis* e das respectivas *probabilidades*. Vamos, então, estabelecer algumas definições antes de passarmos à definição propriamente dita de probabilidade.

1.2.1 Experimento aleatório

Um *experimento aleatório* é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Contrapondo aos experimentos aleatórios, temos os experimentos *determinísticos*, que são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos. Neste curso, estaremos interessados apenas nos experimentos aleatórios.

1.2.2 Espaço amostral

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Vamos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúscula, Ω. Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado espaço amostral *discreto*. Caso contrário, isto é, quando Ω é não enumerável, vamos chamá-lo de espaço amostral *contínuo*.

1.2.3 Eventos aleatórios

Os subconjuntos de Ω são chamados *eventos aleatórios*; já os elementos de Ω são chamados *eventos elementares*. A classe dos eventos aleatórios de um espaço amostral Ω, que denotaremos por $\mathcal{F}(\Omega)$, é o conjunto de todos os eventos (isto é, de todos os subconjuntos) do espaço amostral. A título de ilustração, consideremos um espaço amostral com três elementos: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. A classe dos eventos aleatórios é

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\}$$

Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

1.3 Exemplos

Exemplo 1.1 *O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, uma vez que, em cada lançamento, mantidas as mesmas condições, não podemos prever qual das duas faces (cara ou coroa) cairá para cima. Por outro lado, se colocarmos uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água, o resultado será sempre 100º C. Logo, este é um experimento determinístico.*

Exemplo 1.2 *Consideremos o experimento aleatório "lançamento de um dado". O espaço amostral é* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *, sendo, portanto, um espaço discreto. Os eventos elementares são* $\{1\}$ *,* $\{2\}$ *,* $\{3\}$ *,* $\{4\}$ *,* $\{5\}$ *,* $\{6\}$ *. Outros eventos são: "face par"=* $\{2, 4, 6\}$ *, "face ímpar" =* $\{1, 3, 5\}$ *, "face ímpar menor que 5" =* $\{1, 3\}$ *, etc.*

Exemplo 1.3 *Consideremos o lançamento simultâneo de duas moedas. Vamos representar por* K *a ocorrência de cara e por* C *a ocorrência de coroa. Um espaço amostral para esse experimento é* $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$ *, que também é um espaço discreto. Os eventos simples são* $\{KK\}$ *,* $\{KC\}$ *,* $\{CK\}$ *,* $\{CC\}$ *e um outro evento é "cara no primeiro lançamento" =* $\{KC, KK\}$ *. Para esse mesmo experimento, se estamos interessados apenas no número de caras, o espaço amostral pode ser definido como* $\Omega = \{0, 1, 2\}$ *.*

Exemplo 1.4 *Seja o experimento que consiste em medir, em decibéis, diariamente, durante um mês, o nível de ruído na vizinhança da obra de construção do metrô em Ipanema. O espaço amostral associado a este experimento é formado pelos números reais positivos, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo. Um evento: observar níveis superiores a 80 decibéis, representado pelo intervalo* $(80, \infty)$ *, que corresponde a situações de muito barulho.*

Exemplo 1.5 *Uma urna contém 4 bolas, das quais 2 são brancas (numeradas de 1 a 2) e 2 são pretas (numeradas de 3 a 4). Duas bolas são retiradas dessa urna, sem reposição. Defina um espaço amostral apropriado para esse experimento e os seguintes eventos:*

$$\begin{aligned} A &: \text{ a primeira bola é branca;} \\ B &: \text{ a segunda bola é branca;} \\ C &: \text{ ambas as bolas são brancas.} \end{aligned}$$

Solução:

Considerando a numeração das bolas, o espaço amostral pode ser definido como:

$$\Omega = \{(i,\, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

Mais especificamente:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,2)\,,(1,3)\,,(1,4)\,,(2,1)\,,(2,3)\,,(2,4)\,, \\ (3,1)\,,(3,2)\,,(3,4)\,,(4,1)\,,(4,2)\,,(4,3) \end{array} \right\}$$

Os eventos são:

$$A = \{(i,j) : i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\}$$

ou mais especificamente

$$A = \{(1,2)\,,(1,3)\,,(1,4)\,,(2,1)\,,(2,3)\,,(2,4)\}$$

$$B = \{(i,j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; i \neq j\}$$

ou

$$B = \{(2,1)\,,(3,1)\,,(4,1)\,,(1,2)\,,(3,2)\,,(4,2)\}$$

$$C = \{(i,\ j) : i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ i \neq j\}$$

ou

$$C = \{(1,2)\,,(2,1)\}$$

Exemplo 1.6 *Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:*

A : *todas as cartas selecionadas são vermelhas.*

B : *uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas.*

C : *três diferentes cores ocorrem.*

D : *todas as 4 cores ocorrem.*

Solução:

Vamos denotar por A, V, P e B as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B;\ i = 1, 2, 3\}$$

$$A = \{(V, V, V)\}$$

$$B = \{(V,A,P)\,,(V,P,A)\,,(A,V,P)\,,(A,P,V)\,,(P,A,V)\,,(P,V,A)\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B;\ i = 1, 2, 3;\ x_1 \neq x_2 \neq x_3\}$$

Ou

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (V,A,P)\,,(V,P,A)\,,(A,V,P)\,,(A,P,V)\,,(P,A,V)\,,(P,V,A)\,, \\ (V,P,B)\,,(V,B,P)\,,(P,V,B)\,,(P,B,V)\,,(B,V,P)\,,(B,P,V)\,, \\ (V,A,B)\,,(V,B,A)\,,(A,B,V)\,,(A,V,B)\,,(B,A,V)\,,(B,V,A)\,, \\ (P,A,B)\,,(P,B,A)\,,(A,P,B)\,,(A,B,P)\,,(B,A,P)\,,(B,P,A) \end{array} \right\}$$

Como temos 4 cores diferentes e apenas 3 extrações, não é possível obter todas as cores; logo,

$$D = \varnothing$$

1.4 Operações com eventos aleatórios

1.4.1 Interseção

O evento *interseção* de dois eventos A e B é o evento que equivale à ocorrência simultânea de A e B (ver **Figura 1.1**). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por $A \cap B$.

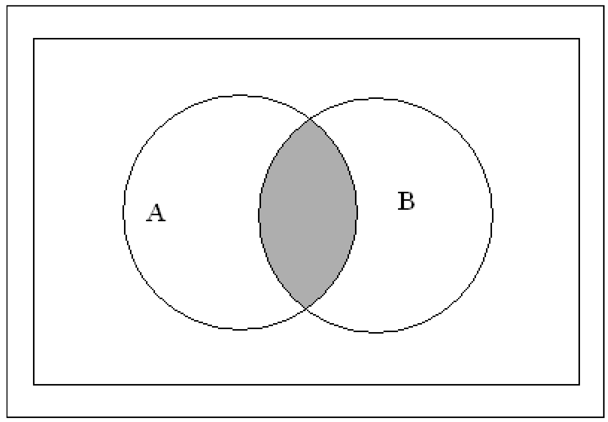

Figura 1.1: Interseção de dois eventos: $A \cap B$

Note que

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \underline{\mathbf{e}} \quad x \in B \tag{1.1}$$

Exemplo 1.7 *Consideremos o experimento "lançamento de dois dados" e os eventos $A =$"soma das faces é um número par" e $B =$ "soma das faces é um número maior que 9". Calcule $A \cap B$.*

Solução:

O espaço amostral desse experimento, que tem 36 elementos, é

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots,(6,6)\}$$

Para que um elemento pertença à interseção $A \cap B$, ele tem que pertencer simultaneamente ao evento A e ao evento B. O evento B é

$$B = \{(4,6)\,,(5,5)\,,(5,6)\,,(6,4)\,,(6,5)\,,(6,6)\}$$

Dos seus elementos, os únicos que pertencem ao evento A, isto é, que têm soma das faces par, são os eventos $(4,6)\,,(5,5)\,,(6,4)$ e $(6,6)$. Logo, $A \cap B = \{(4,6)\,,(5,5)\,,(6,4)\,,(6,6)\}$. Note que não precisamos listar o evento A! Ele tem 18 elementos!

1.4.2 Exclusão

Dois eventos A e B são *mutuamente exclusivos* quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos A e B não têm elementos em comum. Então, dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando sua interseção é o conjunto vazio, isto é, $A \cap B = \varnothing$ (ver **Figura 1.2**).

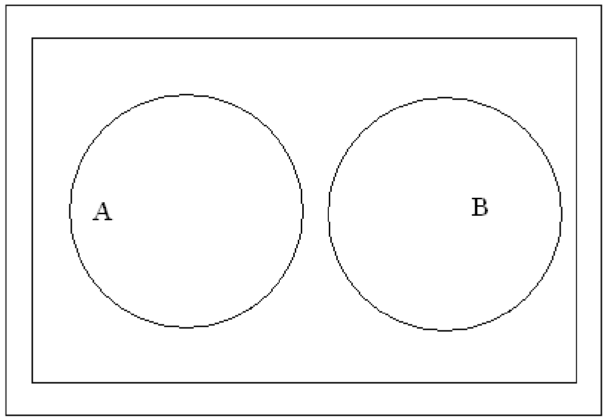

Figura 1.2: Eventos mutuamente exclusivos: $A \cap B = \varnothing$

Exemplo 1.8 *Consideremos novamente o experimento "lançamento de dois dados" e sejam os eventos* $A =$ *"soma das faces é ímpar" e* $B =$ *"duas faces iguais". Então,* A *e* B *são mutuamente exclusivos porque a soma de dois números iguais é sempre um número par!*

1.4.3 União

A *união* de dois eventos A e B é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Note que isso significa que pode ocorrer apenas A, ou apenas B ou A e B simultaneamente. Esse evento será representado por $A \cup B$ (ver **Figura 1.3**).

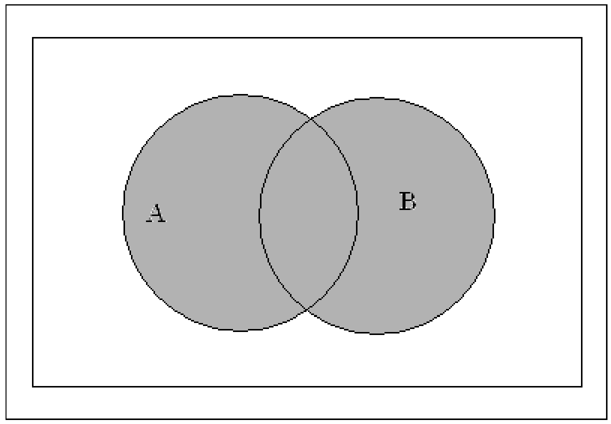

Figura 1.3: União de dois eventos: $A \cup B$

Note que

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \underline{\textbf{ou}} \quad x \in B \tag{1.2}$$

Exemplo 1.9 *Consideremos o experimento do lançamento de duas moedas, onde o espaço amostral é* $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$. *Sejam os eventos* $A =$ *"ocorrência de exatamente 1 cara" e* $B =$ *"duas faces iguais". Então* $A = \{KC, CK\}$ *e* $B = \{CC, KK\}$; *logo,* $A \cup B = \Omega$ *e* $A \cap B = \varnothing$. *Seja* C *o evento "pelo menos uma cara"; então* $C = \{KC, CK, KK\}$ *e* $B \cup C = \Omega$ *e* $B \cap C \neq \varnothing$.

1.4.4 Complementar

O *complementar* de um evento A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é a negação de A. Então, o complementar de A é formado pelos elementos que *não* pertencem a A (ver **Figura 1.4**).

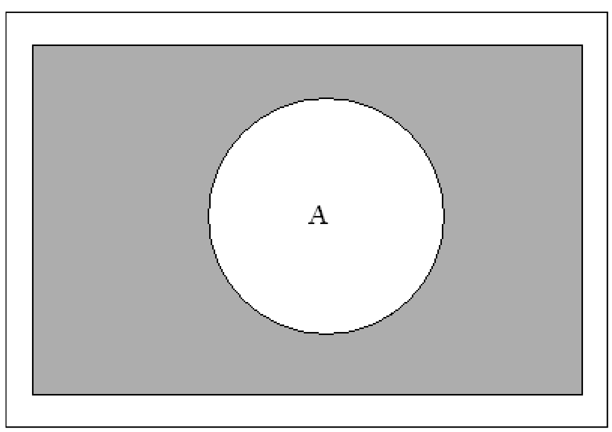

Figura 1.4: Complementar de um evento $A : \overline{A}$

Note que

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \tag{1.3}$$

e também que

$$A \cup \overline{A} = \Omega \tag{1.4}$$

Exemplo 1.10 *Consideremos o lançamento de um dado e seja A = "face par". Então, $\overline{A}$ é o evento "face ímpar". Note que $A = \{2, 4, 6\}$ e $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ e $\Omega = A \cup \overline{A}$.*

1.4.5 Diferença

A *diferença* entre dois eventos A e B, representada por $A - B$, ou equivalentemente, por $A \cap \overline{B}$, é o evento formado pelos pontos do espaço amostral que pertencem a A mas não pertencem a B (ver **Figura 1.5**).

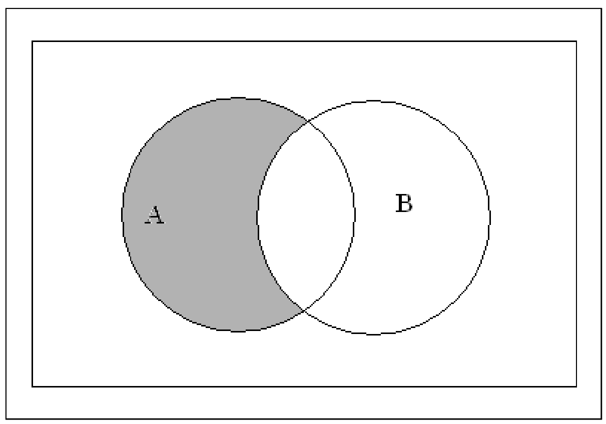

Figura 1.5: Diferença de dois conjuntos: $A - B = A \cap \overline{B}$

Note que

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \quad \textbf{e} \quad x \notin B \tag{1.5}$$

e também

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \tag{1.6}$$

Além disso, $A - B \neq B - A$, conforme ilustrado na **Figura 1.6**.

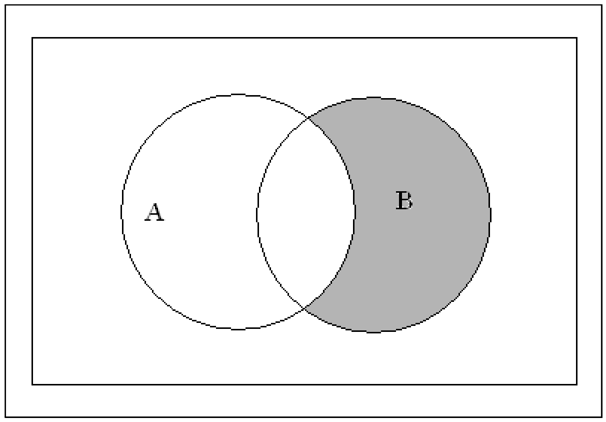

Figura 1.6: Diferença de dois conjuntos: $B - A = B \cap \overline{A}$

Exemplo 1.11 *Consideremos novamente o lançamento de dois dados e os eventos A = "soma das faces é par" e B = "soma das faces é maior que 9". Vamos considerar as duas diferenças, $A - B$ e $B - A$. Temos que*

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \end{array} \right\}$$

e

$$B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Logo,

$$A - B = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (6,2) \end{array} \right\}$$

$$B - A = \{(5,6), (6,5)\}$$

1.4.6 Partição de um espaço amostral

Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ forma uma *partição* do espaço amostral Ω se

1. os eventos A_i são disjuntos dois a dois, isto é, se $A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall \, i \neq j$;

2. a união dos eventos A_i é o espaço amostral Ω, isto é, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Na **Figura 1.7** ilustra-se esse conceito.

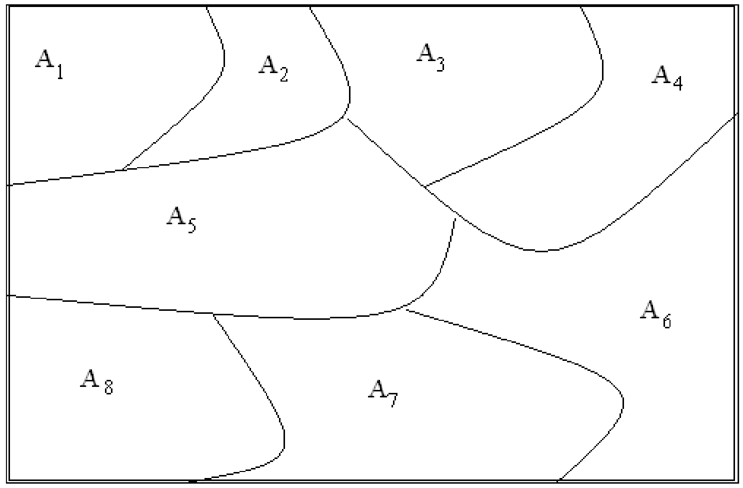

Figura 1.7: Partição do espaço amostral Ω

Exemplo 1.12 *No experimento "lançamento de um dado", os eventos $A =$ "face par" e $B =$ "face ímpar" formam uma partição do espaço amostral. Temos também que, qualquer que seja Ω, um evento A qualquer e seu complementar $\overline{A}$ formam uma partição, isto é, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = \Omega$.*

1.4.7 Propriedades das operações

Sejam A, B, C eventos de um espaço amostral Ω. Então valem as seguintes propriedades.

1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \varnothing &= \varnothing \\ A \cup \varnothing &= A \\ A \cap \Omega &= A \\ A \cup \Omega &= \Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

   (Note que Ω é o equivalente do conjunto universal da teoria de conjuntos.)

2. Complementar

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \varnothing \\ \overline{\varnothing} &= \Omega \\ A \cap \overline{A} &= \varnothing \\ A \cup \overline{A} &= \Omega \end{aligned} \tag{1.8}$$

3. Idempotente

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \tag{1.9}$$

4. Comutativa

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \tag{1.10}$$

5. Associativa

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \tag{1.11}$$

6. Distributiva

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{1.12}$$

A ilustração da primeira propriedade está na **Figura 1.8**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cap (B \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $A \cap (B \cup C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cap B) \cup (A \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cap B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A ilustração da segunda propriedade está na **Figura 1.9**. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade $A \cup (B \cap C)$: no diagrama à esquerda temos o evento A e no diagrama do centro temos o evento $B \cap C$. Para sombrear a união desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $A \cup (B \cap C)$. Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade $(A \cup B) \cap (A \cup C)$: no diagrama à esquerda temos o evento $A \cup B$ e no diagrama do centro, o evento $A \cup C$. Para sombrear a interseção desses dois eventos, basta sombrear todas as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas e isso resulta no diagrama à direita, onde temos o evento $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

7. Absorção

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \tag{1.13}$$

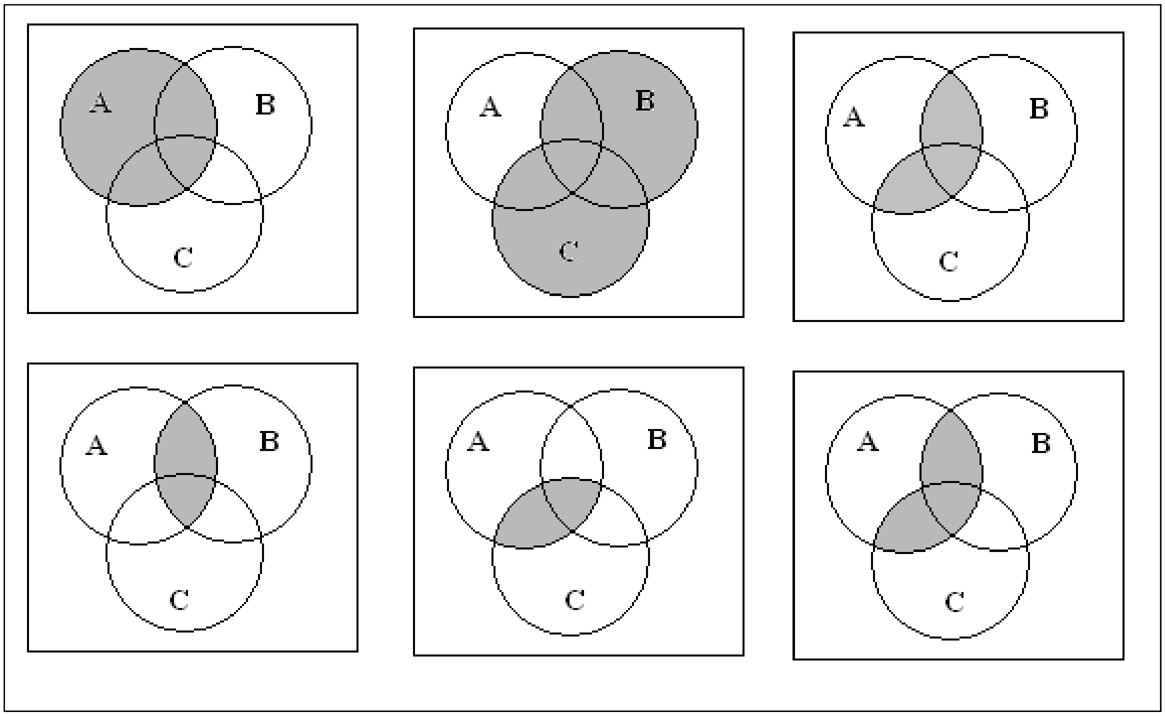

Figura 1.8: Ilustração da propriedade distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

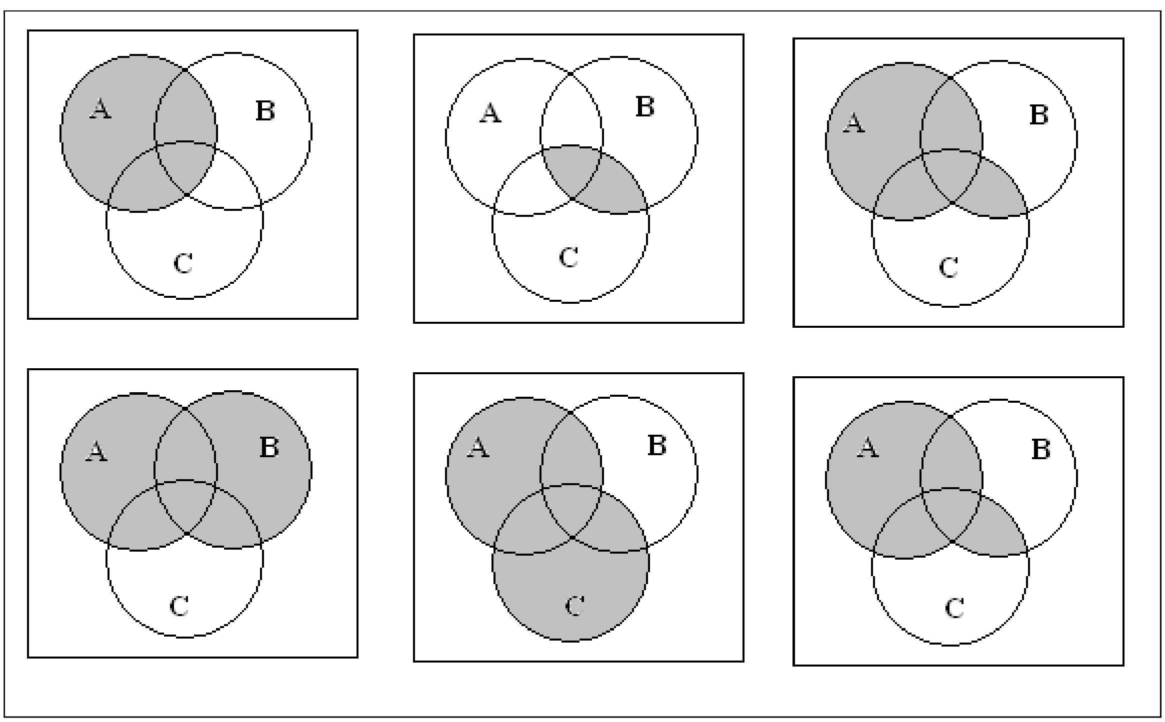

Figura 1.9: Ilustração da propriedade distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

8. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Na primeira linha da **Figura 1.10** ilustra-se a primeira propriedade $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cap B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente, $\overline{A}$ e $\overline{B}$; no diagrama à direita, temos $\overline{A} \cup \overline{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Na segunda linha da **Figura 1.10** ilustra-se a segunda propriedade $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: no diagrama à esquerda temos $\overline{A \cup B}$; nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente, $\overline{A}$ e $\overline{B}$; no diagrama à direita, temos $\overline{A} \cap \overline{B}$, que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

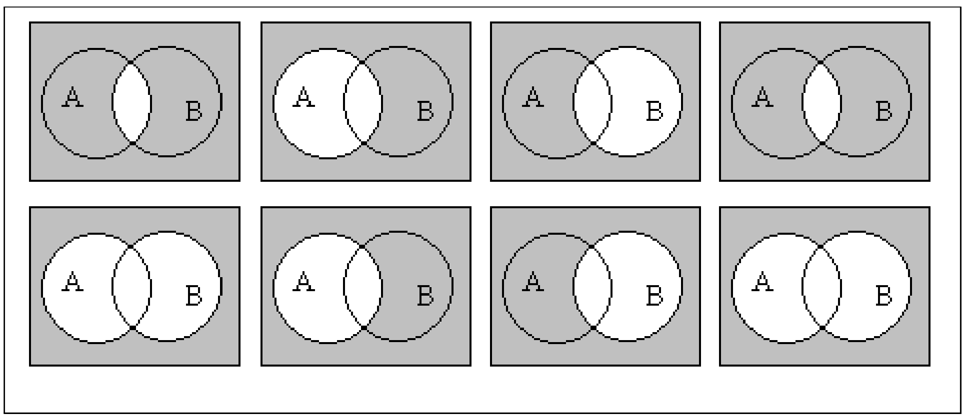

Figura 1.10: Ilustração das propriedades de De Morgan

1.5 Exemplos

Exemplo 1.13 *Sejam A, B, C três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos abaixo usando as operações união, interseção e complementação:*

1. *somente A ocorre;*
2. *A, B e C ocorrem;*
3. *pelo menos um ocorre;*
4. *exatamente dois ocorrem.*

Solução:

1. *O evento "Somente A ocorre" significa que A ocorreu e B não ocorreu e C não ocorreu; em linguagem de conjunto:*

$$\text{Somente } A \text{ ocorre} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2. *O evento "A, B e C ocorrem" significa que os três eventos ocorreram; em linguagem de conjunto,*

$$A,\ B \text{ e } C \text{ ocorrem} = A \cap B \cap C$$

3. *O evento "pelo menos um ocorre" significa que pode ter ocorrido apenas um, ou dois ou três; essa é a própria definição de união, ou seja, em linguagem de conjunto, temos que*

$$\text{pelo menos um ocorre} = A \cup B \cup C$$

4. *Os dois que ocorrem podem ser A e B ou A e C ou B e C. Ocorrendo dois desses, o terceiro não pode ocorrer. Logo, em linguagem de conjunto temos que:*

$$\text{exatamente dois ocorrem} = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$$

Exemplo 1.14 *Considere o lançamento de dois dados e defina os seguintes eventos:*

$$\begin{aligned} A &= \text{soma par} \\ B &= \text{soma } \geq 9 \\ C &= \text{máximo das faces é 6} \end{aligned}$$

Calcule $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $B \cap C$, $B - C$.

Solução:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$B = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(4,6), (5,5), (6,4), (6,6)\}$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6), \\ (3,6), (4,5), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5) \end{array} \right\}$$

$$A - B = A \cap \overline{B} = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (6,2) \end{array} \right\}$$

$$B - A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (5,6), (6,3), (6,5)\}$$

$$B \cap C = \{(3,6), (4,6), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B - C = \{(4,5), (5,4), (5,5)\}$$

Note que, de acordo com as propriedades já vistas,

$$\begin{aligned} (B \cap C) \cup (B - C) &= (B \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right) = \\ &= [(B \cap C) \cup B] \cap \left[(B \cap C) \cup \overline{C}\right] = [B] \cap \left[\overline{C} \cup (B \cap C)\right] \\ &= B \cap \left[\left(\overline{C} \cup B\right) \cap \left(\overline{C} \cup C\right)\right] = B \cap \left[\left(\overline{C} \cup B\right) \cap (\Omega)\right] \\ &= B \cap \left(\overline{C} \cup B\right) = \left(B \cap \overline{C}\right) \cup (B \cap B) \\ &= \left(B \cap \overline{C}\right) \cup B = B \end{aligned}$$

1.6 Exercícios Complementares

1.1 *Lançam-se três moedas. Enumerar o espaço amostral e os eventos $A =$ "faces iguais"; $B =$ "cara na primeira moeda"; $C =$ "coroa na segunda e terceira moedas".*

1.2 *Considere os diagramas na **Figura 1.11** .*

1. *No diagrama (1), assinale a área correspondente a $A - B$*
2. *No diagrama (2), assinale a área correspondente a $\overline{A} \cap \overline{B}$*
3. *No diagrama (3), assinale a área correspondente a $(A \cup C) \cap B$*
4. *No diagrama (4), assinale a área correspondente a $(A \cup B) \cap C$*

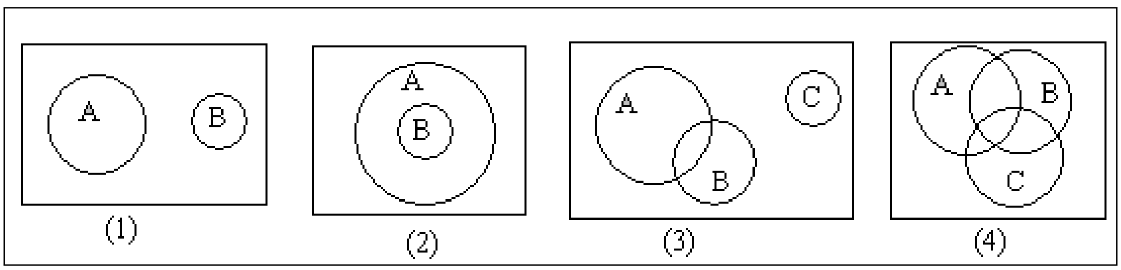

Figura 1.11: Exercício 1.2

1.3 *Na **Figura 1.12**, obtenha a expressão matemática para os eventos definidos por cada uma das áreas numeradas.*

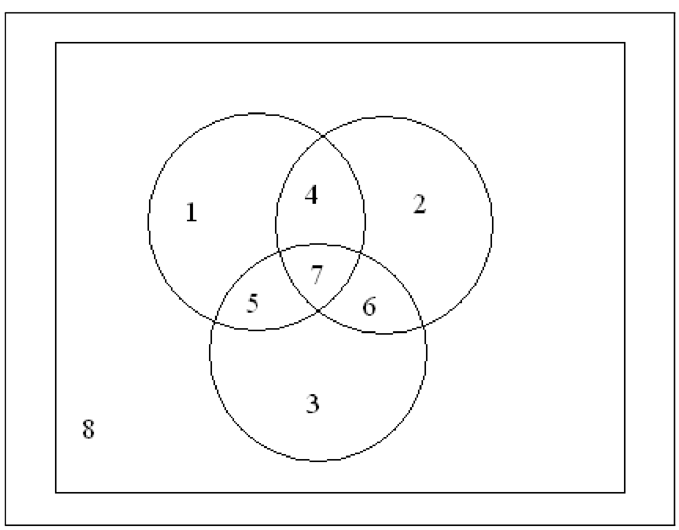

Figura 1.12: Exercício 1.3

1.4 *Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:*

1. *Em uma pesquisa de mercado, conta-se o número de clientes do sexo masculino que entram em um supermercado no horário de 8 às 12 horas.*
2. *Em um estudo de viabilidade de abertura de uma creche própria de uma grande empresa, fez-se um levantamento, por funcionário, do sexo dos filhos com menos de 5 anos de idade. O número máximo de filhos por funcionário é 4 e a informação relevante é o sexo dos filhos de cada funcionário.*
3. *Em um teste de controle de qualidade da produção, mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.*
4. *Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha até o último nome de mulher ser selecionado e anota-se o número de fichas selecionadas.*
5. *Lança-se uma moeda até aparecer cara pela primeira vez e anota-se o número de lançamentos.*
6. *Em uma urna há 5 bolas identificadas pelas letras* $\{A, B, C, D, E\}$. *Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra com reposição, e anota-se a configuração formada.*
7. *Mesmo enunciado anterior, mas as duas boas são selecionados simultaneamente.*

1.5 *Sejam* A, B, C *três eventos de um espaço amostral. Exprimir os eventos abaixo usando as operações união, interseção e complementação:*

1. *exatamente um ocorre;*
2. *nenhum ocorre;*
3. *pelo menos dois ocorrem;*
4. *no máximo dois ocorrem.*

Capítulo 2

Probabilidade - Definição Clássica

2.1 Definição clássica de probabilidade

No capítulo anterior, vimos que o espaço amostral para o experimento aleatório do lançamento de um dado é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vimos também que é usual supor que o dado seja equilibrado, o que equivale dizer que todos os resultados são igualmente prováveis. Então, se jogarmos o dado várias vezes, aproximadamente um sexto das ocorrências resultará na face 3, bem como metade das repetições resultará em um número par. Estamos analisando a chance de ocorrência dos eventos $A =$ "face 3" e $B =$ "face par". O evento A é um evento elementar, enquanto o evento B é um subconjunto com 3 elementos, o que representaremos por $\#A = 1$ e $\#B = 3$. Essa é uma terminologia usual para representar o número de elementos de um conjunto, que lemos como "cardinalidade de A ou B". É intuitivo dizer que A ocorrerá $\frac{1}{6}$ das vezes, enquanto B ocorrerá $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ das vezes. Define-se, assim, a probabilidade de um evento A como a razão entre o número de elementos de A e o número de elementos de Ω. Vamos nos referir aos elementos de A − o evento de interesse − como sendo os "casos favoráveis", enquanto os elementos de Ω são os "casos possíveis", o que nos leva à seguinte definição.

Definição 2.1 ***Definição clássica de probabilidade***

Seja A um evento de um espaço amostral Ω finito, cujos elementos são igualmente prováveis. Define-se a probabilidade do evento A como

$$\Pr(A) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{2.1}$$

Naturalmente, nesta definição estamos supondo que $\#\Omega > 0$, ou seja, que Ω tenha algum elemento pois, se não tivesse, não teríamos o que estudar! Esta foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576). Vamos nos referir a ela como a *definição clássica de probabilidade.* Note que ela se baseia em duas hipóteses:

1. Há um número finito de eventos elementares, isto é, Ω é um conjunto finito.

2. Os eventos elementares são igualmente prováveis.

Embora essas hipóteses restrinjam o campo de aplicação da definição, veremos que ela é muito importante e vários exercícios serão resolvidos baseados nela.

2.1.1 Propriedades da definição clássica de probabilidade

A definição clássica de probabiliade satisfaz as seguintes propriedades básicas:

1. $\Pr(A) \geq 0 \quad$ para todo evento $A \subset \Omega$

   Demonstração:

   Como $\#A \geq 0$ e $\#\Omega > 0$, $\Pr(A)$ é a razão de dois números não negativos, então, $\Pr(A) \geq 0$.

2. $\Pr(\Omega) = 1$.

   Demonstração:

   Por definição, $\Pr(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$.

3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

   Demonstração:

   Se A e B são mutuamente exclusivos, resulta que $A \cap B = \varnothing$. Neste caso, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ (veja a **Figura 2.1**). Logo,

$$\Pr(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} = \Pr(A) + \Pr(B)$$

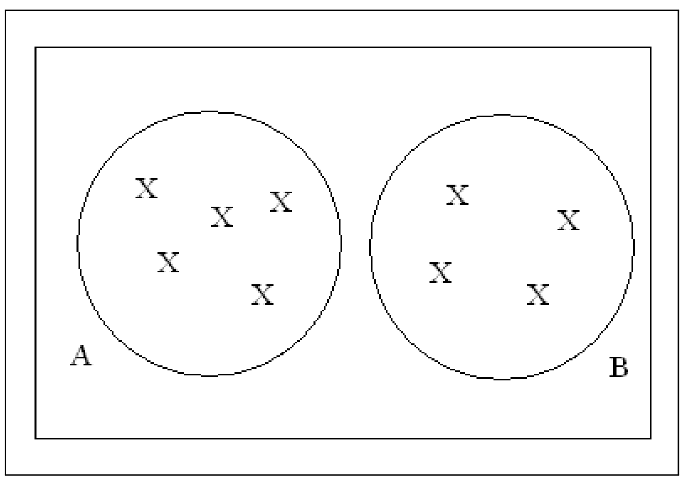

Figura 2.1: Cardinalidade da união de eventos mutuamente exclusivos

4. $\Pr(\varnothing) = 0$

   Demonstração:

   Como $\#\varnothing = 0$, resulta que $\Pr(\varnothing) = \dfrac{\#\varnothing}{\#\Omega} = \dfrac{0}{\#\Omega} = 0$

   Essa propriedade pode ser obtida também utilizando-se apenas as 3 primeiras. Para isso, note que podemos escrever

$$\Omega = \Omega \cup \varnothing$$

Como Ω e $\varnothing$ são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter

$$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega \cup \varnothing) = \Pr(\Omega) + \Pr(\varnothing)$$

Mas

$$\Pr(\Omega) = \Pr(\Omega) + \Pr(\varnothing) \Rightarrow \Pr(\varnothing) = \Pr(\Omega) - \Pr(\Omega) = 0$$

5. $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$

   Demonstração:

   Vimos no capítulo anterior que

$$\Omega = A \cup \overline{A}$$

   Como A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos, podemos aplicar a Propriedade 3 para obter que

$$\Pr(\Omega) = \Pr(A) + \Pr(\overline{A})$$

   Mas, pela Propriedade 2, $\Pr(\Omega) = 1$. Logo,

$$1 = \Pr(A) + \Pr(\overline{A}) \Rightarrow \Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

6. $\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$

   Demonstração:

   Veja a **Figura 2.2** para visualizar melhor esse resultado.

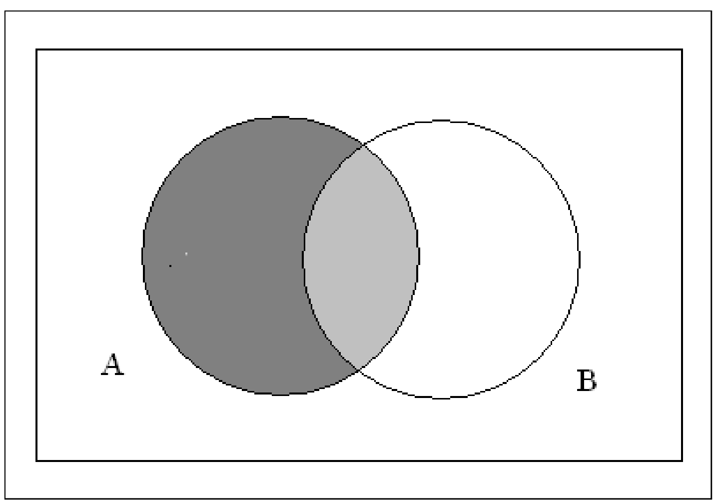

Figura 2.2: Diferença de dois eventos $A - B$

Temos que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

O primeiro termo é a parte sombreada mais escura e o segundo termo é a parte sombreada mais clara. Podemos ver que essas duas partes não têm interseção. Logo, pela Propriedade 3, podemos escrever:

$$\Pr(A) = \Pr(A - B) + \Pr(A \cap B) \Rightarrow \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

Volte à **Figura 2.2** para ver que o evento $B - A$ corresponde à parte não sombreada da figura e que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

7. Para dois eventos A e B quaisquer, $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

   Demonstração:

   Note que esse resultado generaliza a Propriedade 3 para dois eventos quaisquer, ou seja, não estamos exigindo que A e B sejam mutuamente exclusivos. Veja a **Figura 2.3.**

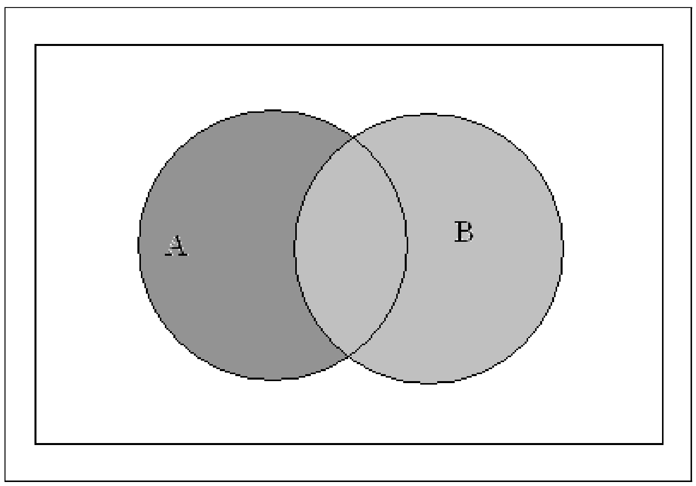

Figura 2.3: União de dois eventos quaisquer

Toda a parte sombreada representa a união dos dois eventos, que pode ser decomposta nas duas partes com diferentes sobreamentos. A parte mais escura é $A - B$ e a parte mais clara é B, ou seja:

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

Como essas duas partes não têm intereseção, pela Propriedade 3, podemos escrever

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A - B) + \Pr(B)$$

Mas na Propriedade 6, vimos que $\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$. Substituindo, obtemos que

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A - B) + \Pr(B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B)$$

8. Se $A \subset B$ então $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

   Demonstração:

   Veja a **Figura 2.4**. Se $A \subset B$ então $A \cap B = A$ - essa é a parte sombreada da figura. Nesse caso, usando a Propriedade 6, temos que

$$\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A)$$

   mas, pela Propriedade 1, a probabilidade de qualquer evento é não negativa. Logo,

$$\Pr(B) - \Pr(A) \geq 0 \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

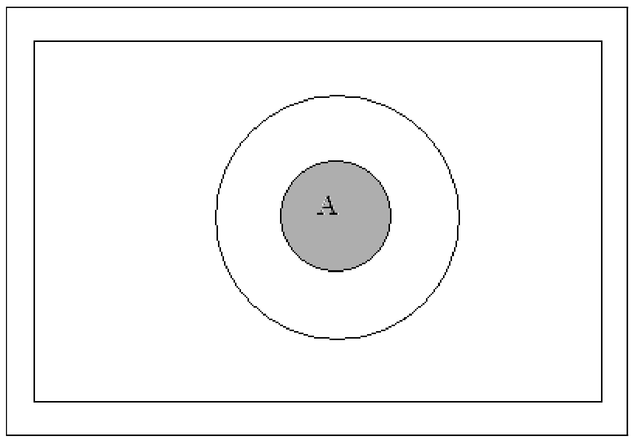

Figura 2.4: Ilustração da propriedade 8: $A \subset B$

9. $\Pr(A) \leq 1$ para qualquer evento $A \subset \Omega$.

   Demonstração:

   Usando as Propriedades 9 e 2, temos que

$$A \subset \Omega \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(\Omega) = 1 \Rightarrow \Pr(A) \leq 1$$

2.1.2 Resumo das propriedades

Vamos apresentar os resultados vistos anteriormente para facilitar o seu estudo.

Propriedades da probabilidade
$0 \leq \Pr(A) \leq 1$ $\Pr(\Omega) = 1$ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$
$\Pr(\varnothing) = 0$ $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$
$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$ $\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$ $A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$

2.1.3 Exemplos

Exemplo 2.1 *No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?*

Solução:

Sabemos que $\#\Omega = 6$ *e também que o evento de interesse é* $A = \{5, 6)$. *Logo,* $\Pr(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemplo 2.2 *Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são vermelhas e as dos dois últimos naipes, pretas. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Essas três últimas são figuras que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de que seja uma figura? Uma carta preta?*

Solução:

Como há 52 cartas ao todo, $\#\Omega = 52$. *Vamos denotar por* F *o evento "carta retirada é uma figura" e por* P *o evento "carta retirada é preta". Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é* 4×3, *ou seja,* $\#F = 12$. *Logo, a probabilidade de retirarmos uma figura é* $\Pr(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$. *Metade das cartas é de cor preta; logo, a probabilidade de que a carta seja preta é* $\Pr(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.3 *Um número é escolhido entre os 20 primeiros inteiros, 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja (i) par? (ii) primo? (iii) quadrado perfeito?*

Solução:

Vamos denotar por P o evento "número par", por R o evento "número primo" e por Q o evento "quadrado perfeito". Então, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; $P = \{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; $Q = \{1, 4, 9, 16\}$. Logo, $\Pr(P) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; $\Pr(R) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$; $\Pr(Q) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Exemplo 2.4 *Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso desta urna. Qual é a probabilidade de que (i) a bola não seja verde? (ii) a bola seja branca? (iii) a bola não seja nem branca nem verde?*

Solução:

Temos um total de $6 + 2 + 8 = 16$ bolas. Logo, $\#\Omega = 16$. Vamos denotar por P, B, V os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

(i) Queremos a probabilidade de $\overline{V}$, ou seja, do complementar de V. Vimos que $\Pr(\overline{V}) = 1 - \Pr(V) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

(ii) $\Pr(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

(iii) Se a bola não é branca nem verde, ela tem que ser preta. Note que estamos pedindo $\Pr(\overline{B} \cap \overline{V})$. *Pela lei de De Morgan e pelas Propriedades 3 e 4, temos que*

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{B} \cap \overline{V}) &= \Pr(\overline{B \cup V}) = 1 - \Pr(B \cup V) \\
&= 1 - [\Pr(B) + \Pr(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} \\
&= \frac{3}{8} = \Pr(P)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5 *Consideremos novamente o lançamento de dois dados. Vamos definir os seguintes eventos: $A =$ "soma das faces par", $B =$ "soma das faces maior que 9", $C =$ "soma das faces ímpar menor que 9". Vamos calcular a probabilidade de tais eventos.*

Solução:

A visualização do espaço amostral desse experimento pode ser vista na tabela a seguir, onde, para cada par possível de resultados, apresentamos também a soma das faces:

		Dado 2					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Dado 1	*1*	$(1,1) \to 2$	$(1,2) \to 3$	$(1,3) \to 4$	$(1,4) \to 5$	$(1,5) \to 6$	$(1,6) \to 7$
	2	$(2,1) \to 3$	$(2,2) \to 4$	$(2,3) \to 5$	$(2,4) \to 6$	$(2,5) \to 7$	$(2,6) \to 8$
	3	$(3,1) \to 4$	$(3,2) \to 5$	$(3,3) \to 6$	$(3,4) \to 7$	$(3,5) \to 8$	$(3,6) \to 9$
	4	$(4,1) \to 5$	$(4,2) \to 6$	$(4,3) \to 7$	$(4,4) \to 8$	$(4,5) \to 9$	$(4,6) \to 10$
	5	$(5,1) \to 6$	$(5,2) \to 7$	$(5,3) \to 8$	$(5,4) \to 9$	$(5,5) \to 10$	$(5,6) \to 11$
	6	$(6,1) \to 7$	$(6,2) \to 8$	$(6,3) \to 9$	$(6,4) \to 10$	$(6,5) \to 11$	$(6,6) \to 12$

Podemos ver que :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \#\Omega = 36 \tag{2.2}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), \\ (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), \\ (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \#A = 18$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow \#B = 6$$

$$C = \left\{ \begin{array}{c} (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), \\ (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (6,1), \end{array} \right\} \Rightarrow \#C = 12$$

Logo,

$$\Pr(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad \Pr(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2.6 *Em uma urna há 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Duas bolas são retiradas dessa urna, seqüencialmente e sem reposição. Qual é a probabilidade de obtermos (i) 2 bolas brancas? (ii) 2 bolas verdes? (iii) 2 bolas de cores diferentes?*

Solução:

Vamos indicar por B_1, B_2, B_3 e B_4 as quatro bolas brancas e por V_1, V_2 e V_3 as três bolas verdes. O espaço amostral para este experimento é

$$\Omega = \{(C_1, C_2); \quad C_1, C_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, V_1, V_2, V_3; \quad C_1 \neq C_2\}$$

A primeira bola pode ser qualquer uma; logo, há 7 bolas possíveis. Como a extração é sem reposição, para a segunda bola só há 6 possibilidades. Assim, o número total de pares é $7 \times 6 = 42$.

(i) O evento $A =$ "2 bolas brancas" é

$$A = \left\{ \begin{array}{c} B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, \\ B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 \end{array} \right\}$$

Logo, $\Pr(A) = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$

(ii) O evento $B =$ "2 bolas verdes" é

$$B = \{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2\}$$

Logo, $\Pr(B) = \dfrac{6}{42} = \dfrac{1}{7}$

(iii) O evento $C =$ "bolas de cores diferentes" é o complementar do evento $D =$ "bolas de cores iguais". Por sua vez, $D = A \cup B$ e como A e B são mutuamente exclusivos, $\Pr(D) = \Pr(A) + \Pr(B) = \dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$*. Logo,* $\Pr(C) = 1 - \Pr(D) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$

Note o trabalho que dá listar todos os elementos de um evento!

Exemplo 2.7 *É interessante notar o seguinte fato sobre a extração das bolas: em vez de fazermos extrações seqüenciais, podemos retirar 2 bolas simultaneamente. Em ambos os casos, as extrações são sem reposição, ou seja, a mesma bola não pode sair duas vezes. O que muda, então? Nas extrações simultâneas, não podemos diferenciar a ordem das bolas; por exemplo, os pares V_1V_2 e V_2V_1 são os mesmos. Dessa forma, a cardinalidade do espaço amostral fica reduzida por 2, que é $2!$, número de maneiras de organizar as 2 bolas. Se fossem 3 bolas, ficaria reduzido por $3! = 6$. Para ajudar na compreensão dessa diferença, vamos listar o espaço amostral nos dois casos, bem como os eventos que estudamos.*

Evento	*Extrações seqüenciais*	*Evento*	*Extrações simultâneas*
2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4,$ $B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3,$	*2 bolas brancas*	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4,$ $B_2B_3, B_2B_4,$ $B_3B_4,$
2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_1, V_2V_3,$ $V_3V_1, V_3V_2,$	*2 bolas verdes*	$V_1V_2, V_1V_3,$ $V_2V_3,$
Branca e verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ $B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3,$	*Uma branca e uma verde*	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3,$ $B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3,$ $B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3,$ B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3
Verde e branca	$V_1B_1, V_1B_2, V_1B_3, V_1B_4,$ $V_2B_1, V_2B_2, V_2B_3, V_2B_4,$ $V_3B_1, V_3B_2, V_3B_3, V_3B_4$		

Note que as probabilidades são as mesmas em ambos os casos:

	Pr*(2 verdes)*	*Pr(2 brancas)*	*Pr(cores diferentes)*
Extrações seqüenciais	$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	$\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
Extrações simultâneas	$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$	$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Exemplo 2.8 *Prove que:*

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B)$$

Os dois termos da esquerda dão, respectivamente, as probabilidades dos eventos "apenas A ocorre" e "apenas B ocorre". Logo, a afirmação trata da probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B ocorre.

Solução:

Pela Propriedade 6, temos que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) &= \Pr(A) - \Pr\left(A \cap B\right) \\
\Pr\left(\overline{A} \cap B\right) &= \Pr(B) - \Pr\left(A \cap B\right)
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, obtém-se que:

$$\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B\right) = \Pr(A) - \Pr\left(A \cap B\right) + \Pr(B) - \Pr\left(A \cap B\right)$$

Como $A \cap \overline{B}$ *e* $\overline{A} \cap B$ *são mutuamente exclusivos, a soma de suas probabilidades é a probabilidade da sua união, ou seja,*

$$\Pr\left(A \cap \overline{B}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B\right) = \Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right]$$

Logo,

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr\left(A \cap B\right)$$

Note que, pela definição clássica de probabilidade, isso significa que

$$\frac{\#\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right]}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} - 2 \times \frac{\#\left(A \cap B\right)}{\#\Omega}$$

e, portanto,

$$\#\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = \#A + \#B - 2 \times \#\left(A \cap B\right)$$

Exemplo 2.9 *Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um.*

1. *Quantos alunos não acertaram qualquer problema?*
2. *Quantos alunos acertaram apenas o segundo problema?*

Solução:

Vamos denotar por P_1 *e* P_2 *os eventos "acertar problema 1" e "acertar problema 2" respectivamente. Os dados do problema nos dão que:*

$$\begin{array}{rcll} \#(P_1 \cap P_2) & = & 120 & \textit{(acertar os 2)} \\ \#P_2 & = & 132 & \textit{(acertar o primeiro)} \\ \#\overline{P}_2 & = & 86 & \textit{(errar o segundo)} \\ \#\left[\left(P_1 \cap \overline{P}_2\right) \cup \left(\overline{P}_1 \cap P_2\right)\right] & = & 54 & \textit{(acertar apenas um)} \end{array}$$

Usando o resultado do exemplo anterior, tem-se que

$$\begin{array}{rcl} \#\left[\left(P_1 \cap \overline{P}_2\right) \cup \left(\overline{P}_1 \cap P_2\right)\right] & = & \#P1 + \#P2 - 2\#(P1 \cap P2) \Rightarrow \\ 54 & = & 132 + \#P2 - 2 \times 120 \Rightarrow \\ \#P2 & = & 162 \end{array}$$

Logo, o número total de alunos é

$$\#\Omega = \#(P2 \cup \overline{P2}) = \#P2 + \#\overline{P2} = 162 + 86 = 248$$

1. *Pela lei de De Morgan, tem-se que*

$$\begin{aligned}\Pr\left(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2\right) &= \Pr\left(\overline{P_1 \cup P_2}\right) = 1 - \Pr\left(P_1 \cup P_2\right) = \\ &= 1 - [\Pr(P_1) + \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2)] = \\ &= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\ &= \frac{74}{248} = \frac{37}{124}\end{aligned}$$

2. *Pela Propriedade 6, tem-se que:*

$$\Pr\left(P_2 \cap \overline{P}_1\right) = \Pr(P_2) - \Pr(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$

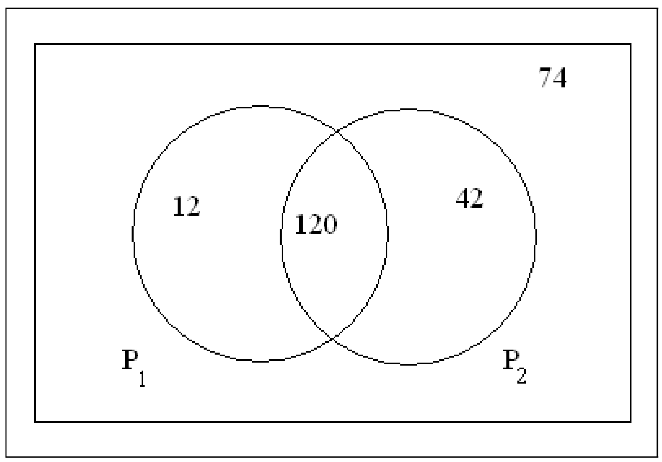

Figura 2.5: Espaço amostral do exemplo sobre acerto de 2 questões

2.1.4 Exercícios

2.1 *Em um arquivo há 4 balancetes de orçamento e 3 balancetes de custos. Em uma auditoria, o auditor seleciona aleatoriamente um destes balancetes. Qual é a probabilidade de que seja um balancete de custos? E de orçamento?*

2.2 *Considere a situação anterior, só que agora o auditor retira seqüencialmente 2 balancetes sem reposição. Qual é a probabilidade de serem sorteados (i) 2 balancetes de custos? (ii) 2 balancetes de orçamento? (iii) 2 balancetes de tipos diferentes?*

2.2 Revisão de análise combinatória

A definição clássica de probabilidade exige que saibamos contar o número de elementos de um conjunto. Nos exemplos anteriores, embora trabalhoso, era possível listar todos os elementos do espaço amostral, mas nem sempre esse é o caso. Muitas vezes será necessário obter o número de elementos sem enumerá-los. A análise combinatória consiste em um conjunto de regras de contagem, das quais veremos as principais.

2.2.1 Princípio fundamental da adição

Na apresentação da Propriedade 3, vimos que para dois eventos A e B mutuamente exclusivos, a cardinalidade da união deles era a soma das respectivas cardinalidades. No caso de mais de dois eventos, é possível generalizar esse resultado, desde que os eventos sejam dois a dois disjuntos ou mutuamente exclusivos.

Proposição 2.1 ***Princípio Fundamental da Adição***
*Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos tais que $A_i \cap A_j = \varnothing \; \forall i \neq j$ e $\#A_i = n_i$. (Veja a **Figura 2.6**.) Nesse caso, temos que*

$$\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} (\#A_i) = n_1 + \cdots + n_k$$

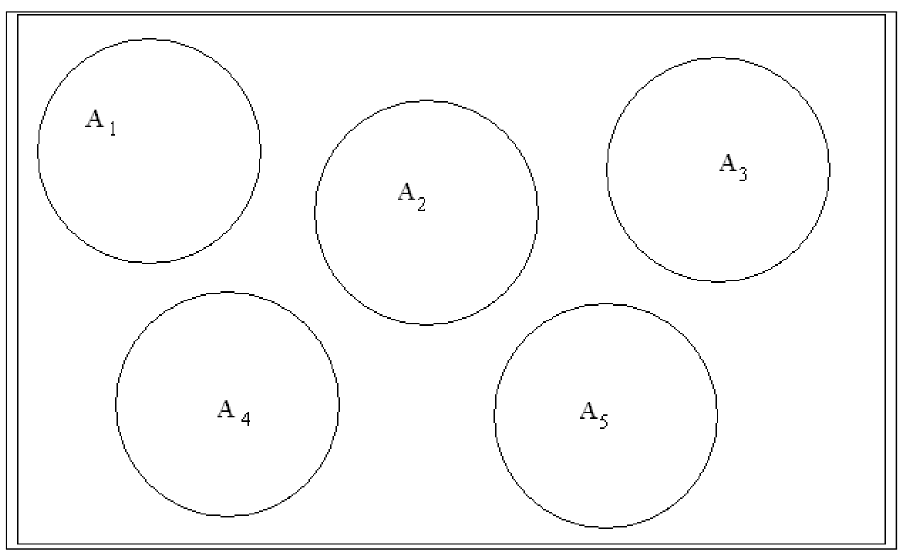

Figura 2.6: Cardinalidade da união de eventos mutuamente exclusivos dois a dois

2.2.2 Princípio fundamental da multiplicação

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere que numa sala há 3 homens (h_1, h_2, h_3) e 5 mulheres (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5). Quantos casais podem ser formados com essas pessoas? Para responder a essa pergunta, devemos notar que há 5 casais nos quais o homem é h_1, 5 nos quais o homem é h_2 e outros 5 nos quais o homem é h_3, perfazendo um total de $3 \times 5 = 15$ casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação.*

Proposição 2.2 ***Princípio Fundamental da Multiplicação***
Se temos k decisões $d_1, d_2, \ldots, d_k$ que podem ser tomadas de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 e $\cdots$ e d_k é $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

No exemplo anterior, temos 2 decisões: a primeira decisão é $d_1 =$ escolha do homem e a segunda decisão é $d_2 =$ escolha da mulher. Como há 3 homens e 5 mulheres, o número de casais que podemos formar é $3 \times 5 = 15$, como já visto. Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de elementos do espaço amostral formado pelos casais

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_1m_5, \\ h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_2m_5, \\ h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4, h_3m_5, \end{array} \right\}$$

sem ter que fazer essa enumeração enfadonha!

Exemplo 2.10 *Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?*
Solução:
Para o primeiro algarismo (milhar), existem 9 possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram 9 algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram 8 algarismos. Logo, existem $9 \times 9 \times 8 = 648$ números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?)

Exemplo 2.11 *Um prédio possui 8 portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?*
Solução:
Para a entrada posso escolher qualquer uma das 8 portas. Escolhida a porta de entrada, sobram 7 portas para a saída. Logo, existem $8 \times 7 = 56$ maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

Exemplo 2.12 *Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?*
Solução:
Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Se ele termina com 2, sobram 2 posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição temos 5 possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram 4 para a segunda posição. Logo, existem $5 \times 4 = 20$ números pares com 3 algarismos distintos terminando com 2. Analogamente, existem 20 que terminam com 4 e vinte que terminam com 6. Logo, o número total é 60.

2.2.3 Exercícios

2.3 *De quantos modos distintos podemos colocar 3 livros em uma prateleira?*

2.4 *Quantos números com cinco algarismos podemos construir com os algarismos 1,3,5,7,9? Desses, quantos apresentam os algarismos 1 e 3 juntos?*

2.2.4 Permutações

Consideremos quatro objetos distintos $a_1, a_2, a_3, a_{4.}$ De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$$\begin{array}{cccc} a_1a_2a_3a_4 & a_1a_2a_4a_3 & a_1a_3a_2a_4 & a_1a_3a_4a_2 \\ a_1a_4a_2a_3 & a_1a_4a_3a_2 & a_2a_1a_3a_4 & a_2a_1a_4a_3 \\ a_2a_3a_1a_4 & a_2a_3a_4a_1 & a_2a_4a_1a_3 & a_2a_4a_3a_1 \\ a_3a_1a_2a_4 & a_3a_1a_4a_2 & a_3a_2a_1a_4 & a_3a_2a_4a_1 \\ a_3a_4a_1a_2 & a_3a_4a_2a_1 & a_4a_1a_2a_3 & a_4a_1a_3a_2 \\ a_4a_2a_1a_3 & a_4a_2a_3a_1 & a_4a_3a_1a_2 & a_4a_3a_2a_1 \end{array}$$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande: note que, para apenas 4 objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma conseqüência direta do princípio da multiplicação. Consideremos, então, n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n.}$ Para a primeira posição, temos n possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram $n-1$ objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram $n-2$ objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as $n-1$ anteriores, sobra apenas 1 objeto. Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos P_n^n, é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$ e esse número, por definição, é o fatorial de n. Temos, assim, o seguinte resultado.

Proposição 2.3 *Dados n objetos distintos, o número de* ***permutações simples*** *de tais objetos é dado por $P_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, ou seja:*

$$\boxed{P_n^n = n!} \tag{2.3}$$

Exemplo 2.13 *Quantas filas diferentes podemos formar com 5 crianças?*

Solução

Essa é exatamente a definição de permutação; logo, o número de filas é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

Exemplo 2.14 *Temos 5 livros de Estatística, 3 livros de Matemática Financeira e 4 livros de Contabilidade. De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?*

Solução:

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem $12! = 479.001.600$ *maneiras de organizar os livros.*

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são 3 assuntos, há $3! = 6$ *maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há* $5! = 120$ *maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática financeira,* $3! = 6$ *maneiras e para os livros de Contabilidade,* $4! = 24$ *maneiras. Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é* $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$ *maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.*

Exemplo 2.15 *Cinco moças e cinco rapazes têm que sentar em 5 bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?*

Solução:

Comecemos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares; logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem duas possibilidades. Definidas as posições das meninas, temos 5 rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de 5! maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3840 \times 120 = 460.800$.

2.2.5 Exercícios

2.5 *Considere a palavra TEORIA.*

1. *Quantos anagramas* [1]*podemos formar?*
2. *Quantos anagramas começam com a letra T?*
3. *Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?*
4. *Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?*

2.6 *Quantas filas podem ser formadas por 5 moças e 5 rapazes? Se João e Maria fazem parte deste grupo, em quantas filas eles estão juntos? E em quantas filas eles estão separados?*

---

[1]Segundo o Aurélio SÉculo XXI:

Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase.

"E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América" (João Ribeiro, *Curiosidades Verbais*, p. 76)

2.2.6 Permutações de k objetos dentre n

Na definição acima de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas k dos n objetos, onde $k \leq n$. Nesse caso, temos a definição de *permutação simples de k objetos selecionados dentre n objetos distintos.* Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formas com as quatro pessoas sorteadas? Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8 e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$. Veja o esquema a seguir.

Posição	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$3^{\underline{a}}$	$4^{\underline{a}}$
Possibilidades	10	9	8	7

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas $(10 - 3) = [10 - (4 - 1)]$. Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$\begin{aligned} 10 \times 9 \times 8 \times 7 &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\ &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times 6!}{6!} \\ &= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!} \end{aligned}$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de permutações de k objetos dentre n, devemos notar que, para a primeira posição, existem n possibilidades. Para a segunda, $n - 1$ possibilidades. Para a k-ésima e última posição, já foram escolhidos $k-1$ objetos; portanto, sobram $n - (k - 1)$, ou seja, para a k-ésima posição há $n - (k - 1) = n - k + 1$ possibilidades. Logo, o número total de permutações de k elementos, tomados dentre n, é $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$. Vamos denotar por P_n^k esse número.

Proposição 2.4 *O número de* ***permutações simples*** *de k objetos distintos selecionados dentre n objetos distintos, denotado por P_n^k, é*

$$P_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Vamos usar um pequeno artifício para simplificar essa fórmula: vamos multiplicar e dividir o resultado por

$$(n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = (n-k)!$$

Então,

$$\begin{aligned} P_n^k &= n \times (n-1) \times \cdots \times [n-(k-1)] \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times [n-(k-1)] \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

De uma forma mais compacta, podemos escrever:

$$\boxed{P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}} \tag{2.4}$$

Note que, quando $n = k$, temos o resultado anterior: $P_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$, uma vez que, pode definição, $0! = 1$. Em alguns livros, ainda se encontra o termo *arranjo* utilizado para denotar permutações de k objetos dentre n.

Exemplo 2.16 *Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?*

Solução:

A resposta é P_{20}^3*, pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que*

$$P_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$$

Exemplo 2.17 *De um grupo de 10 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?*

Solução:

A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$P_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

2.2.7 Exercícios

2.7 *O segredo de um cofre é formado por uma seqüência de 3 dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual é o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?*

2.8 *Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6, 7, 8, 9?*

2.2.8 Combinações simples

Vamos considerar agora a situação análoga a uma permutação, mas onde a ordem não importa, ou seja, $a_1a_2a_3$ é igual a $a_3a_1a_2$. Consideremos a situação em que temos 5 objetos distintos dos quais vamos tomar 3. Como visto, o número de permutações é $\dfrac{5!}{2!} = 60$. Vamos listá-las.

Objetos envolvidos									
(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,4,5)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,4,5)	(3,4,5)
$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_4a_5$	$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_4a_5$	$a_3a_4a_5$
$a_1a_3a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_1a_5a_2$	$a_1a_4a_3$	$a_1a_5a_3$	$a_1a_5a_4$	$a_2a_4a_3$	$a_2a_5a_3$	$a_2a_5a_4$	$a_3a_5a_4$
$a_2a_1a_3$	$a_2a_1a_4$	$a_2a_1a_5$	$a_3a_1a_4$	$a_3a_1a_5$	$a_4a_1a_5$	$a_3a_2a_4$	$a_3a_2a_5$	$a_4a_2a_5$	$a_4a_3a_5$
$a_2a_3a_1$	$a_2a_4a_1$	$a_2a_5a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_3a_5a_1$	$a_4a_5a_1$	$a_3a_4a_2$	$a_3a_5a_2$	$a_4a_5a_2$	$a_4a_5a_3$
$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$	$a_5a_1a_2$	$a_4a_1a_3$	$a_5a_1a_3$	$a_5a_1a_4$	$a_4a_2a_3$	$a_5a_2a_3$	$a_5a_2a_4$	$a_5a_3a_4$
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_5a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_5a_3a_1$	$a_5a_4a_1$	$a_4a_3a_2$	$a_5a_3a_2$	$a_5a_4a_2$	$a_5a_4a_3$

Essa listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são equivalentes, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três elementos envolvidos. Logo, o número de elementos em cada coluna nesse exemplo é $3! = 6$. Como só precisamos de um de cada $3!$, o número total é $\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}$.

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de n elementos tomados k a k. Dado um conjunto de n elementos distintos, a *combinação dos n elementos tomados k a k* nos dá o número de subconjuntos com k elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).

Proposição 2.5 *O número de **combinações simples** de n elementos distintos tomados k a k é igual a*

$$\boxed{C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}} \tag{2.5}$$

O número $\binom{n}{k}$ é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatório.

Note a diferença: no conceito de permutação, estamos lidando com seqüências de k elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com subconjuntos. Nas seqüências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

Exemplo 2.18 *De um grupo de 8 homens e 5 mulheres devem ser escolhidos 3 homens e 3 mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas?*

Solução:

Os 3 homens podem ser escolhidos de $\binom{8}{3}$ maneiras; as três mulheres podem ser escolhidas de $\binom{5}{3}$ maneiras. Pelo princípio da multiplicação, há $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3}$ maneiras de escolher a comissão. Note que

$$\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = \frac{8!}{5!3!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{2} = 560$$

Exemplo 2.19 *Um baralho de pôquer é formado pelas cartas 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei, ás de cada um dos quatro naipes. Em uma mão de pôquer, sacam-se 5 cartas sem reposição. Quantas são as extrações possíveis?*

Solução:

Temos ao todo $4 \times 8 = 32$ *cartas. Como a ordem de retirada não importa, o número total de extrações possíveis é*

$$\begin{aligned} C_{32}^{5} &= \frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5! \times 27!} \\ &= \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{(4 \times 8) \times 31 \times (15 \times 2) \times 29 \times 28}{(4 \times 2) \times (5 \times 3) \times 1} \\ &= 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201.376 \end{aligned}$$

Exemplo 2.20 ***Mega-Sena*** *No joga da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de 6 números e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão. Qual é o número total de jogos simples distintos? Num cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R\$1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?*

Solução

Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é

$$\begin{aligned} \binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\ &= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\ &= 50.063.860 \end{aligned}$$

Isso significa que a sua chance de acertar a sena é $\dfrac{1}{50.063.860} = 0,000000019974.$

Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

e, assim, o preço desse cartão é $1,50 \times 5005 = 7507,5$ *e a probabilidade de se acertar a sena com um cartão desses é*

$$\frac{5005}{50.063.860} = 0,00009997$$

Exemplo 2.21 ***Problema dos aniversários*** *Em um grupo de 10 pessoas , qual é a probabilidade de que pelo menos 2 façam aniversário no mesmo dia? Para simplificar, suponha que nenhuma dessas pessoas tenha nascido em ano bissexto.*

Solução:

Note que, no caso de 10 pessoas, "pelo menos 2" significa ou 2, ou 3, ou 4, . . . , ou 10. Então, podemos resolver essa versão mais simples do problema do aniversário usando a regra do complementar, ou seja, vamos calcular a probabilidade de todas as 10 pessoas fazerem aniversário em datas diferentes. Para isso, vamos usar o princípio fundamental da multiplicação.

O aniversário de cada uma das 10 pessoas pode ser em um dos 365 dias do ano. Logo, o número total de possibilidades para as datas dos aniversários das 10 pessoas é $365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^{10}$ *pelo princípio fundamental da multiplicação. Isso nos dá* $\#\Omega$.

Consideremos, agora, o evento $A =$ *"as 10 pessoas fazem aniversário em dias diferentes". Escolhida a primeira pessoa, ela pode fazer aniversário em qualquer dia; logo, o número de possibilidades é* 365. *Para a segunda pessoa, como o aniversário tem que ser em data diferente, sobram 364 possibilidades. Para a terceira, sobram 363; continuando, para a décima pessoa, sobram* $365 - 9 = 356$ *possibilidades. Logo,*

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 356}{365^{10}} = 0,88305$$

Logo, a probabilidade de que pelo menos 2 pessoas façam aniversário no mesmo dia é

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = 0,11695$$

2.2.9 Exercícios

2.9 *De um grupo de 8 homens e 5 mulheres devem ser escolhidos 3 homens e 3 mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?*

2.10 *Três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule a probabilidade de que:*

1. *todas as três sejam de espadas;*
2. *as três cartas sejam do mesmo naipe;*
3. *as três cartas sejam de naipes diferentes.*

2.2.10 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

O triângulo de Pascal é um quadro em formato de um triângulo (que consideraremos retângulo para facilitar a exibição), formado pelos números binomiais dispostos da seguinte forma: na hipotenusa, todos os elementos são iguais a 1, bem como no cateto vertical:

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1		1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1
⋮	⋮						

Cada elemento no interior do triângulo é obtido como a soma do elemento imediatamente acima e do primeiro elemento acima à esquerda; veja a Figura 2.7

.

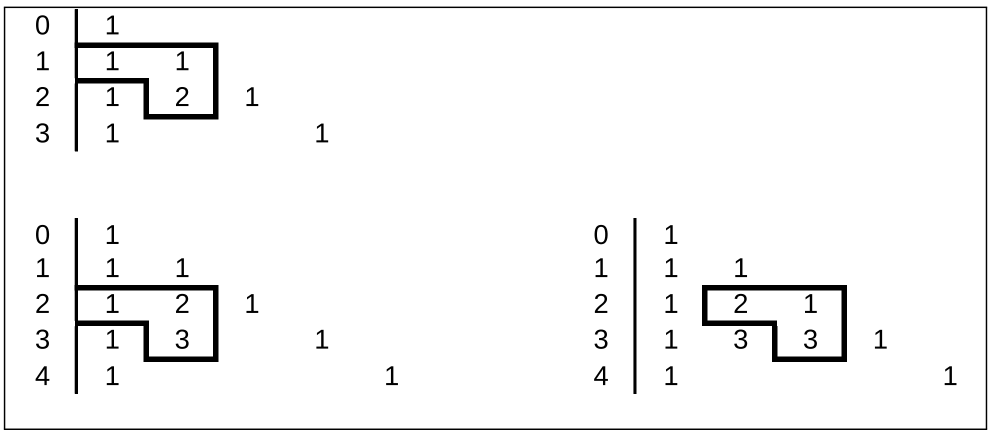

Figura 2.7: Construção do triângulo de Pascal

Com esse procedimento, obtém-se o triângulo de Pascal a seguir (note que esse triângulo tem infinitas linhas e infinitas colunas...)

Linha							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮						

Os números que aparecem em cada linha do triângulo nada mais são que os números combinatórios. Numerando as linhas e colunas do triângulo a partir de zero, o elemento da linha n e coluna k é $\binom{n}{k}$. Então, em cada linha n, os elementos vão desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$.

0	1							$\binom{0}{0}$						
1	1	1						$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	1	2	1					$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	1	3	3	1				$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	1	4	6	4	1			$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	1	5	10	10	5	1		$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	1	6	15	20	15	6	1	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
$\vdots$											$\vdots$			

Existem vários resultados sobre os números combinatórios e várias propriedades associadas às linhas e colunas do triângulo de Pascal.

Proposição 2.6 *Relação de Stifel*

A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo da última parcela, ou seja

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2.6}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{[(k+1)\,k!]\,[(n-k)\,(n-k-1)!]} = \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Considere a n-ésima linha do triângulo de Pascal e seja $k < n$. Então, $\binom{n}{k}$ é o elemento que está na linha n avançado de k colunas em relação ao início da linha; já $\binom{n}{n-k}$ é o elemento que está na linha n atrasado de k colunas em relação ao final da linha. Números combinatórios como $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ são chamados *combinações complementares.*

Proposição 2.7 *Relação das Combinações Complementares*

Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2.7}$$

Demonstração:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad \blacksquare$$

Proposição 2.8 *Teorema das Linhas*

A soma dos elementos da n-ésima linha é igual a 2^n, ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \tag{2.8}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$$

Demonstração:

Como visto, o número combinatório $\binom{n}{k}$ dá o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. Assim, na expressão (2.8), cada número combinatório dá o número de subconjuntos de determinado tamanho e a soma deles dá o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n. Mas para formar subconjuntos de tal conjunto podemos usar o seguinte artifício: cada elemento pode ser marcado com um $+$ para indicar que pertence ao subconjunto, ou com um $-$, para indicar que não pertence ao subconjunto. O número total de formas de fazer isso é $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ e isso prova que o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho n é 2^n e isso completa a prova. $\blacksquare$

Proposição 2.9 *Teorema das colunas*

A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, começando da primeira linha, é igual ao elemento que está avançado uma linha e uam coluna em relação ao último elemento da soma, ou seja:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Demonstração:

Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna $k+1$, a partir da primeira linha desta coluna:

$$\begin{aligned}
\tbinom{k+1}{k+1} &= \tbinom{k}{k} \\
\tbinom{k+2}{k+1} &= \tbinom{k+1}{k} + \tbinom{k+1}{k+1} \\
\tbinom{k+3}{k+1} &= \tbinom{k+2}{k} + \tbinom{k+2}{k+1} \\
\tbinom{k+4}{k+1} &= \tbinom{k+3}{k} + \tbinom{k+3}{k+1} \\
&\;\vdots \\
\tbinom{k+n-1}{k+1} &= \tbinom{k+n-2}{k} + \tbinom{k+n-2}{k+1} \\
\tbinom{k+n}{k+1} &= \tbinom{k+n-1}{k} + \tbinom{k+n-1}{k+1} \\
\tbinom{k+n+1}{k+1} &= \tbinom{k+n}{k} + \tbinom{k+n}{k+1}
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo,podemos ver que há parcelas iguais em lados opostos, que podem ser simplificadas. Todos os termos do lado esquerdo, com exceção do último, cancelam com termos do lado direito e o que sobra é:

$$\binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \cdots + \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n}{k}$$

ou seja

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

o que completa a prova. ■

Proposição 2.10 *Binômio de Newton*

Dados quaisquer números reais x e a e um inteiro qualquer n, então

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \tag{2.9}$$

Demonstração:

Vamos provar este resultado usando o método da indução.

- *O resultado é válido para $n = 1$. De fato:*

$$(x+a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

- *Suponhamos que o resultado seja válido para n qualquer e vamos provar que é válido para $n+1$. De fato:*

$$\begin{aligned}
& (x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) \\
= \;& \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}\right](x+a) \\
= \;& \left[\binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0\right](x+a) \\
= \;& \left[\binom{n}{0}a^0x^{n+1} + \binom{n}{1}a^1x^n + \binom{n}{2}a^2x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-2}a^{n-2}x^3 + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^2 + \binom{n}{n}a^nx^1\right] + \\
& \left[\binom{n}{0}a^1x^n + \binom{n}{1}a^2x^{n-1} + \binom{n}{2}a^3x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}a^{n-1}x^2 + \binom{n}{n-1}a^nx^1 + \binom{n}{n}a^{n+1}x^0\right] \\
= \;& \binom{n}{0}a^0x^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^1x^n + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^2x^{n-1} + \cdots \\
& + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right]a^{n-1}x^2 + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]a^nx^1 + \binom{n}{n}a^{n+1}x^0
\end{aligned}$$

- *Mas, pela relação de Stifel [equação (2.6)], temos que*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} + \binom{n}{0} &= \binom{n+1}{1} \\
\binom{n}{2} + \binom{n}{1} &= \binom{n+1}{2} \\
&\vdots \\
\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2} &= \binom{n+1}{n-1} \\
\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} &= \binom{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0}\\ \binom{n}{n} &= \binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^0x^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^1x^n + \binom{n+1}{2}a^2x^{n-1} + \cdots\\ &\quad + \binom{n+1}{n-1}a^{n-1}x^2 + \binom{n+1}{n}a^nx^1 + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}x^0\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kx^{n+1-k}\end{aligned}$$

e isso completa a prova. ■

2.2.11 Aplicações

1. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = 1$ na equação (2.9), obtemos que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

o que nos dá uma outra prova do teorema das linhas.

2. Note que, fazendo $x = 1$ e $a = -1$ na equação (2.9), obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

3. Fórmula de Euler:

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \tag{2.10}$$

Essa fórmula pode ser considerada verdadeira para quaisquer valores de m, n, r desde que adotemos a convenção de que $\binom{n}{r} = 0$ para $r > n$.

Para demonstrar esse resultado usando argumentos combinatórios, suponha um conjunto com $n+m$ elementos, de modo que m desses elementos estão em uma categoria I e os n elementos restantes estão em outra categoria II (veja a Figura 2.8).

Vamos expandir o termo do lado esquerdo:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

O termo do lado direito da expressão nos dá o número de subconjuntos deste conjunto com r elementos. O primeiro termo da soma do lado esquerdo nos dá o número de subconjuntos com nenhum elemento da categoria I e r elementos da categoria II; o segundo termo nos dá

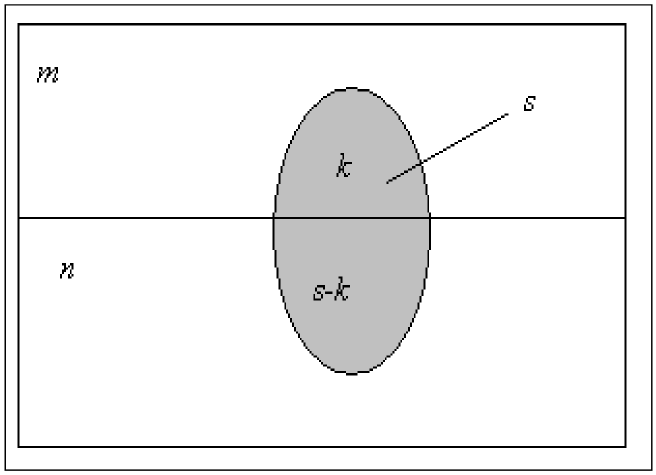

Figura 2.8: Ilustração do contexto da Fórmula de Euler

o número de subconjuntos com exatamente um elemento da categoria I e $r-1$ elementos da categoria II; o terceiro termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente dois elementos da categoria I e $r-2$ elementos da categoria II e, sucessivamente, o último termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente r elementos da categoria I e nenhum elemento da categoria II. Somando esses termos, obtemos o número total de subconjuntos com r elementos, que é $\binom{m+n}{r}$.

4. Fazendo $m = r = n$ na equação (2.10), obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Mas pela relação das combinações complementares $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, o que nos dá:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

De fato:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

Como $k \neq 0$, podemos dividir ambos os termos por k, o que resulta

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $k-1=j$, podemos escrever (note os índices do somatório!):

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = n\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$$

usando o resultado (2.8).

6. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

De fato: fazendo $k-1=j$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\binom{n}{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\frac{n!}{(j+1)j!!(n-j-1)!} = \sum_{j=1}^{n-1} j\frac{n!}{j(j-1)!(n-j-1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!}
\end{aligned}$$

Fazendo $j-1=i$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{n!}{i!(n-i-2)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}\frac{n(n-1)(n-2)!}{i!(n-2-i)!} = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i} = n(n-1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

Mais uma vez, usamos o teorema das linhas.

7. Se n é par, então

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1} = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}$$

De fato: o desenvolvimento do binômio de Newton nos dá que

$$\begin{aligned}
(x+a)^n &= \binom{n}{0}a^0x^n+\binom{n}{1}a^1x^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1+\binom{n}{n}a^nx^0 \\
&\equiv T_0+T_1+T_2+\cdots+T_{n-1}+T_n
\end{aligned}$$

em que

$$T_k = \binom{n}{k}a^kx^{n-k}$$

Analogamente, se n é par

$$\begin{aligned}
(x-a)^n &= \binom{n}{0}(-a)^0x^n+\binom{n}{1}(-a)^1x^{n-1}+\binom{n}{2}(-a)^2x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}(-a)^{n-1}x^1+\binom{n}{n}(-a)^nx^0 \\
&\equiv T_0-T_1+T_2+\cdots-T_{n-1}+T_n
\end{aligned}$$

Então,

$$(x+a)^n+(x-a)^n = 2(T_0+T_2+\cdots+T_{n-2}+T_n)$$

e

$$(x+a)^n - (x-a)^n = 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1})$$

Fazendo $x = a = 1$, resulta que

$$\begin{aligned} 2^n &= 2(T_0 + T_2 + \cdots + T_{n-2} + T_n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}\right] \\ 2^n &= 2(T_1 + T_3 + \cdots + T_{n-3} + T_{n-1}) = 2\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right] \end{aligned}$$

Logo, se n é par

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

8. Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

   O número de Fibonacci F_n é definido como a soma dos elementos da $n-$ésima “diagonal inversa” do triângulo de Pascal. Veja a Figura 2.9

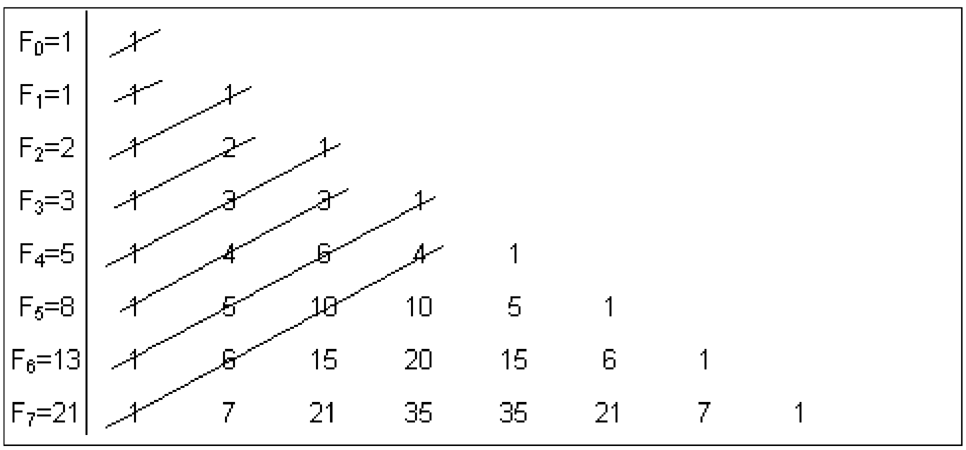

Figura 2.9: Números de Fibonacci o triângulo de Pascal

Então,

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots$$

Cada número na seqüência de Fibonacci é a soma dos dois números anteriores, isto é:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

De fato:

$$\begin{aligned} F_n + F_{n+1} &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots\right] + \\ &\quad \left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots\right] \\ &= \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3}\right] + \cdots \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots \\ &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots \\ &= F_{n+2} \end{aligned}$$

2.3 Exercícios Complementares

2.11 *Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?*

2.12 *Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?*

2.13 *Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição. Qual é a probabilidade de que:*

1. *o menor número seja 7 ?*
2. *o maior número seja 7 ?*

2.14 *Usando as propriedades já vistas, mostre que*

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) \\ &\quad - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\ &\quad + \Pr(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Sugestão: Note que, pela propriedade associativa, você pode escrever $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$. *Pense que* A *e* $B \cup C$ *são dois eventos e aplique a Propriedade 7, que dá a probabilidade da união de dois eventos.*

2.15 *Quantos são os anagramas da palavra SIMULTANEO*

1. *que começam por consoante e terminam por vogal?*
2. *que têm as letras S, I, M juntas nessa ordem?*
3. *que têm as letras S, I, M juntas em qualquer ordem?*
4. *que têm a letra S no primeiro lugar e a letra I no segundo lugar?*
5. *que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar?*
6. *que têm a letra S no primeiro lugar ou a letra I no segundo lugar ou a letra M no terceiro lugar? Sugestão: Aqui você deve usar o resultado do exercício anterior.*

2.16 *Usando a Propriedade 6, mostre as seguintes igualdades:*

1. $\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$
2. $\Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$

2.17 *Em uma cidade onde se publicam três jornais A, B, C, constatou-se que, entre 1000 famílias, assinam*

$$A\text{: } 470 \quad B\text{: } 420 \quad C\text{: } 315 \quad A \text{ e } B\text{: } 110 \quad A \text{ e } C\text{: } 220 \quad B \text{ e } C\text{: } 140 \quad A, B \text{ e } C\text{: } 75$$

Escolhendo-se ao acaso uma família, qual é a probabilidade de que ela

1. *não assine qualquer dos três jornais?*
2. *assine apenas um dos três jornais?*
3. *assine pelo menos dois jornais?*

2.18 *Em um levantamento em um bairro de 1000 moradores, verifica-se que*

- *220 têm curso superior;*
- *160 são casados;*
- *100 estão desempregados;*
- *50 têm curso superior, são casados e estão empregados;*
- *60 têm curso superior e estão desempregados;*
- *20 têm curso superior, são casados e estão desempregados.*

Escolhe-se ao acaso um morador desse bairro. Qual é a probabilidade de que ele

1. *tenha curso superior e seja casado?*
2. *ou tenha curso superior e seja casado ou esteja empregado?*
3. *ou tenha curso superior ou esteja desempregado?*

2.19 *Um lote é formado por 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Ache a probabilidade de que:*

1. *ele não tenha defeitos;*
2. *ele não tenha defeitos graves;*
3. *ele seja perfeito ou tenha defeitos graves.*

2.20 *Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes, dos quais 12 são do 1º ciclo e 18 do 2º ciclo. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:*

1. *um do 1º ciclo?*
2. *no máximo um do 2º ciclo?*
3. *pelo menos um de cada ciclo?*

Capítulo 3

Axiomas, Probabilidade Condicional e Independência

3.1 Definição axiomática de probabilidade

No capítulo anterior, vimos que a definição clássica de probabilidade se restringe a espaços amostrais finitos, onde os eventos elementares são equiprováveis. Apesar de tais restrições, essa definição tem várias propriedades interessantes, que foram deduzidas (ou demonstradas) a partir das três primeiras. Isso nos leva à *definição axiomática* [1] *de probabilidade.*

O primeiro fato a observar é o seguinte: de acordo com a definição clássica, a probabilidade é um número que associamos a cada evento de um espaço amostral Ω. Segundo, esse número - chamado probabilidade - tem determinadas propriedades, algumas das quais foram deduzidas a partir de outras. A definição que iremos apresentar leva em conta esses fatos.

Definição 3.1 ***Definição axiomática de probabilidade***
Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função, denotada por $\Pr$, que associa a cada evento A de Ω um número real $\Pr(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\begin{aligned}
\textit{Axioma } 1 &: \Pr(A) \geq 0 \\
\textit{Axioma } 2 &: \Pr(\Omega) = 1 \\
\textit{Axioma } 3 &: A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)
\end{aligned}$$

Na **Figura 3.1** ilustra-se o conceito de probabilidade como uma função, construindo-se um gráfico de barras para representá-la.

É importante que você observe que os três axiomas correspondem às três primeiras propriedades vistas para a definição clássica de probabilidade no capítulo anterior. Para a definição clássica, a

[1] Segundo o dicionário Aurélio: *Axioma*
Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

Figura 3.1: Definição axiomática de probabilidade

demonstração da validade dessas três propriedades é imediata - e óbvia - a partir da teoria de conjuntos. No caso geral, elas formam o conjunto de *axiomas da probabilidade*. Como todas as outras propriedades foram deduzidas a partir dessas três propriedades, elas continuam valendo no caso geral, ou seja, a partir dos três axiomas deduzimos as seguintes propriedades:

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\begin{aligned} \Pr(A - B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ \Pr(B - A) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

$$\Pr(A) \leq 1$$

3.1.1 Exemplos

Exemplo 3.1 *Dados* $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $\Pr(A) = \frac{1}{3}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$, *calcule:*

1. $\Pr(C)$
2. $\Pr(A \cup B)$
3. $\Pr(\overline{A})$
4. $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$
5. $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solução

1. *Como* $\Pr(\Omega) = 1$, *resulta que* $\Pr(C) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = \frac{1}{3}$.

2. *Como A e B são mutuamente exclusivos,* $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{2}{3}$.
3. $\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A) = \frac{2}{3}$.
4. *Pela lei de De Morgan, temos que* $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
5. *Pela lei de De Morgan, temos que* $\Pr(\overline{A} \cup \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cap B}) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0 = 1$.

Exemplo 3.2 *Dado que* $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ *, verifique se é possível definir uma medida de probabilidade em* Ω *tal que*

$$\begin{aligned}\Pr(\{-1,1\}) &= 0,6\\ \Pr(\{0,1\}) &= 0,9\\ \Pr(\{-1,0\}) &= 0,5\end{aligned}$$

Justifique sua resposta.

Solução:

Note que o evento $\{-1,1\} = \{-1\} \cup \{1\}$. *Logo, as probabilidades dadas se transformam no seguinte sistema de 3 equações com 3 incógnitas:*

$$\begin{aligned}\Pr(-1) + \Pr(1) &= 0,6\\ \Pr(0) + \Pr(1) &= 0,9\\ \Pr(-1) + \Pr(0) &= 0,5\end{aligned}$$

Da primeira equação, obtemos que $\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1)$. *Substituindo na segunda, obtemos o seguinte sistema de 2 equações e 2 incógnitas:*

$$\begin{aligned}\Pr(0) + 0,6 - \Pr(-1) &= 0,9\\ \Pr(-1) + \Pr(0) &= 0,5\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Pr(0) - \Pr(-1) &= 0,3\\ \Pr(0) + \Pr(-1) &= 0,5\end{aligned}$$

Somando termo a termo, resulta que

$$2 \times \Pr(0) = 0,8 \Rightarrow \Pr(0) = 0,4$$

Substituindo, obtemos que

$$\Pr(-1) = 0,5 - \Pr(0) = 0,5 - 0,4 \Rightarrow \Pr(-1) = 0,1$$

Substituindo novamente, obtemos

$$\Pr(1) = 0,6 - \Pr(-1) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Como todos os valores obtidos estão no intervalo $(0,1)$, *a atribuição dada é válida.*

3.1.2 Exercícios

3.1 *Se* $\Pr(A) = 1/3$ *e* $\Pr\left(\overline{B}\right) = 1/4$, *A e B podem ser mutuamente exclusivos?*

3.2 *Sejam A e B são eventos mutuamente exclusivos tais que* $\Pr(A) = 0,5$ *e* $\Pr(B) = 0,4$.

1. *Calcule* $\Pr(A \cup B)$.
2. *Calcule* $\Pr(B \cap \overline{A})$.

3.2 Probabilidade condicional

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado. Já vimos que o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 56, \}$. Considere o evento A = "sair face 2". Se não temos qualquer informação além de o dado ser equilibrado, vimos que $\Pr(A) = \frac{1}{6}$.

Suponhamos, agora, que o dado tenha sido lançado e a seguinte informação fornecida: "saiu facer par". Qual é a probabilidade de ter saído face 2? Note a diferença: agora nós temos uma informação parcial sobre o experimento e devemos usá-la para reavaliar a nossa estimativa. Mais precisamente, sabemos que ocorreu o evento B = "face par". Com essa informação, podemos nos concentrar no evento $B = \{2, 4, 6\}$, uma vez que as faces 1,3,5 ficam descartadas em função da informação dada. Dentro dessas três possibilidades, a probabilidade do evento A passa a ser $\frac{1}{3}$. Calculamos, assim, a probabilidade do evento A, sabendo que ocorreu o evento B. Essa probabilidade será denotada $\Pr(A \mid B)$ (lê-se probabilidade de A dado B).

Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos A = "soma das faces é par" e B = "soma das faces é maior ou igual a 9". Se sabemos que ocorreu B, qual é a probabilidade de ter ocorrido A? Queremos calcular $\Pr(A|B)$. Temos que

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), \\ (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$B = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Se ocorreu B, a única chance de ter ocorrido A é que tenha ocorrido o evento

$$A \cap B = \{(4,6), (5,5), (6,4), (6,6)\}$$

e, nesse caso, a probabilidade é $\frac{4}{10}$, ou seja,

$$\Pr(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Esses dois exemplos ilustram o fato geral que está exibido na **Figura 3.2**: se sabemos que aconteceu o evento B, esse evento passa a ser o "novo espaço amostral" e nesse novo espaço amostral, a única parte de A presente é $A \cap B$ - parte sombreada mais clara.

Com esses exemplos, estamos ilustrando uma situação comum, onde temos que calcular a probabilidade de um evento tendo uma *informação parcial* Esse é o conceito de *probabilidade condicional*.

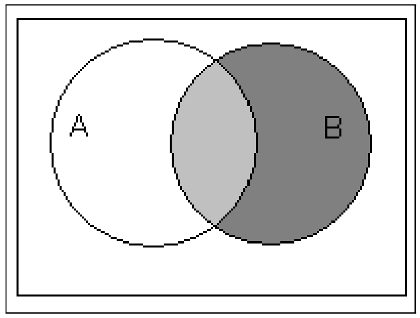

Figura 3.2: Probabilidade condicional $\Pr(A|B)$

Definição 3.2 *A **probabilidade condicional** do evento A dada a ocorrência do evento B é*

$$\boxed{\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}} \tag{3.1}$$

Note que, nessa definição, temos que supor que o evento B é um evento possível, já que ele ocorreu. Logo, é óbvio que $\Pr(B) > 0$.

3.2.1 Exemplos

Exemplo 3.3 *Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela abaixo.*

Sexo	*Atividade de lazer*			
	Cinema	*Praia*	*Esporte*	*Total*
Masculino	*10*	*12*	*13*	*20*
Feminino	*15*	*41*	*9*	*80*
Total	*25*	*53*	*22*	*100*

1. *Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ser do sexo masculino?*
2. *Se a pessoa escolhida prefere a praia como atividade de lazer, qual é a probabilidade de que seja um homem?*

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos: M = "masculino"; F = "feminino"; C = "cinema"; P = "praia"; E = "esporte".

1. *O problema pede* $\Pr(M)$. *Como há 20 homens dentre as 100 pessoas, temos que*

$$\Pr(M) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

2. *O problema pede* $\Pr(M|P)$. *Por definição,*

$$\Pr(M|P) = \frac{\Pr(M \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53}$$

Note que a probabilidade do evento "aluno do sexo masculino" se modifica quando sabemos que a pessoa prefere a praia como atividade de lazer, isto é: $\Pr(M|P) \neq \Pr(M)$.

Exemplo 3.4 *De um baralho de 52 cartas, extrai-se uma ao acaso. Defina os eventos* $C =$ *"carta é de copas" e* $R =$ *"carta é um rei". Calcule* $\Pr(C)$, $\Pr(R)$, $\Pr(C \cap R)$, $\Pr(C|R)$.

Solução:

$$\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\Pr(C \cap R) = \frac{1}{52}$$

$$\Pr(C|R) = \frac{\Pr(C \cap R)}{\Pr(R)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = \Pr(C)$$

Neste caso, a probabilidade do evento C *não se modifica quando sabemos da ocorrência do evento* R*, isto é,* $\Pr(C|R) = \Pr(C)$.

Exemplo 3.5 *De um total de 500 empregados, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se aleatoriamente um empregado dessa empresa.*

1. *Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar?*

2. *Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar?*

3. *Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar?*

4. *Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa?*

Solução:

Vamos denotar por E *o evento "empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa" e por* P *o evento "empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar". O problema diz que*

$$\Pr(P) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \qquad \Pr(E) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} \qquad \Pr(P \cap E) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Note que essas informações podem ser dispostas no formato de tabela da seguinte forma:

		Plano pessoal		*Total*
		Sim	*Não*	
Plano da	*Sim*	***200***	*200*	***400***
Empresa	*Não*	*0*	*100*	*100*
Total		***200***	*300*	***500***

Os números em negrito são as informações dadas no problema; o restante é calculado observando-se os totais de linha e de coluna.

1. *O problema pede*

$$\Pr(P \cup E) = \Pr(P) + \Pr(E) - \Pr(P \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

2. *O problema pede*

$$\Pr(\overline{P} \cap \overline{E}) = \Pr(\overline{P \cup E}) = 1 - \Pr(P \cup E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

3. *O problema pede*

$$\Pr(P|E) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

4. *O problema pede*

$$\Pr(E|P) = \frac{\Pr(P \cap E)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1$$

3.2.2 Exercícios

3.3 *Dois dados equilibrados são lançados.*

1. *Encontre a probabilidade de saírem faces iguais nos 2 dados.*
2. *Sabendo-se que a soma das faces foi menor ou igual a 4, calcule a probabilidade de saírem faces iguais nos 2 dados.*
3. *Calcule a probabilidade de sair 5 em pelo menos um dado.*
4. *Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair 5 em pelo menos um dado.*

3.4 *A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha publicitária é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.*

1. *Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?*

2. *Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?*

3. *Se a campanha ficou pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de que a diretoria a aprove?*

3.5 *Sejam A e B eventos do espaço amostral Ω tais que* $\Pr(A) = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{1}{3}$ *e* $\Pr(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

1. *Calcule* $\Pr(A \cup B)$.

2. *Calcule* $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$.

3. *Calcule* $\Pr(A|\overline{B})$.

3.3 Probabilidade condicional como lei de probabilidade

É interessante notar que a probabilidade condicional definida acima *realmente* define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa a cada evento A de Ω o número $\Pr(A|B)$ satisfaz os axiomas de probabilidade. De fato:

- Axioma 1:
$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \geq 0$$
pois $\Pr(A \cap B) \geq 0$ e $\Pr(B) > 0$.

- Axioma 2:
$$\Pr(\Omega|B) = \frac{\Pr(\Omega \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$$
Na verdade, como $\Pr(B|B) = \dfrac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$, toda a probabilidade condicional está concentrada em B, o que justifica considerarmos B como o novo espaço amostral para essa nova lei de probabilidade.

- Axioma 3:

Sejam A_1 e A_2 dois eventos mutuamente exclusivos (veja a **Figura 3.3**). Usando a propriedade distributiva, temos que

$$\Pr(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\Pr[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{\Pr(B)} = \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)}$$

Mas, como A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos, resulta que $(A_1 \cap B)$ e $(A_2 \cap B)$ também o são − esses dois eventos correspondem à parte sombreada da figura. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{\Pr[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{\Pr(B)} = \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} = \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} + \frac{\Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} = \\
&= \Pr(A_1|B) + \Pr(A_2|B)
\end{aligned}$$

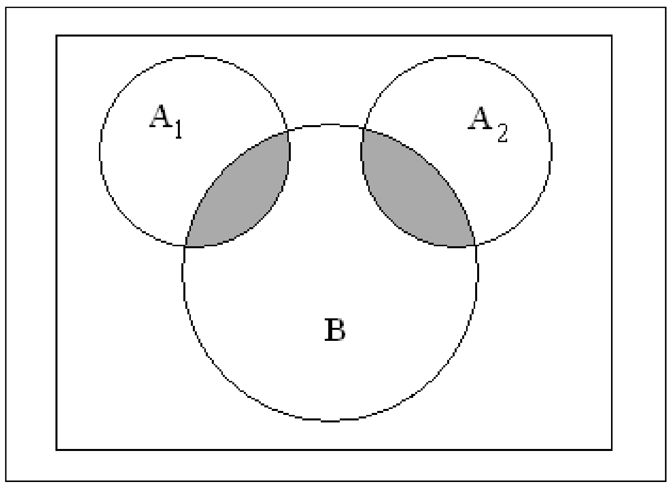

Figura 3.3: Axioma 3 da probabilidade condicional

Sendo a probabilidade condicional uma lei de probabilidade, todas as propriedades vistas anteriormente, que eram conseqüências dos axiomas, valem também para a probabilidade condicional.

- Propriedade 1:

$$\Pr(\varnothing|B) = \frac{\Pr(\varnothing \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(\varnothing)}{\Pr(B)} = 0$$

- Propriedade 2:

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A}|B) &= \frac{\Pr(\overline{A} \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B - A)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B) - \Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} - \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = 1 - \Pr(A|B)
\end{aligned}$$

- Propriedade 3:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[(A_1 - A_2)\,|B\right] &= \Pr(A_1 \cap \overline{A}_2|B) \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A_1 \cap B \cap \overline{A}_2)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr\left[(A_1 \cap B) - A_2\right]}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A_1 \cap B) - \Pr(A_1 \cap B \cap A_2)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} - \frac{\Pr(A_1 \cap B \cap A_2)}{\Pr(B)} \\
&= \Pr(A_1|B) - \frac{\Pr(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \Pr(A_1|B) - \Pr\left[(A_1 \cap A_2)\,|B\right]
\end{aligned}$$

- Propriedade 4:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[(A_1 \cup A_2)\,|B\right] &= \frac{\Pr\left[(A_1 \cup A_2) \cap B\right]}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\right]}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) - \Pr(A_1 \cap B \cap A_2 \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A_1 \cap B)}{\Pr(B)} + \frac{\Pr(A_2 \cap B)}{\Pr(B)} - \frac{\Pr(A_1 \cap A_2 \cap B)}{\Pr(B)} \\
&= \Pr(A_1|B) + \Pr(A_2|B) - \Pr\left[(A_1 \cap A_2)\,|B\right]
\end{aligned}$$

- Propriedade 5:

$$\begin{aligned}
A_2 &\subset A_1 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = A_2 \Rightarrow \\
\Pr\left[(A_1 - A_2)\,|B\right] &= \Pr(A_1|B) - \Pr\left[(A_1 \cap A_2)\,|B\right] \Rightarrow \\
\Pr\left[(A_1 - A_2)\,|B\right] &= \Pr(A_1|B) - \Pr(A_2|B) \Rightarrow \\
\Pr(A_1|B) - \Pr(A_2|B) &\geq 0 \Rightarrow \Pr(A_2|B) \leq \Pr(A_1|B)
\end{aligned}$$

- Propriedade 6:

$$\begin{aligned}
A \cap B &\subset B \Rightarrow \Pr(A \cap B) \leq \Pr(B) \Rightarrow \\
\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &\leq 1 \Rightarrow \Pr(A|B) \leq 1
\end{aligned}$$

Observação importante

Note que a definição de probabilidade condicional está vinculada ao evento B em que estamos condicionando, ou seja, se condicionarmos em um outro evento C, estaremos definindo uma outra função de probabilidade - a função de probabilidade condicional em C.

3.4 Regra da multiplicação

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como *regra da multiplicação.*

Proposição 3.1 ***Regra da multiplicação para 2 eventos***
Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então

$$\Pr(A \cap B) = \begin{cases} \Pr(B)\Pr(A|B) \\ \\ \Pr(A)\Pr(B|A) \end{cases} \tag{3.2}$$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter seqüencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra. Em tais situações, pode ser de ajuda desenhar um *diagrama de árvore* para ilustrar os eventos em questão. Vamos ver alguns exemplos.

3.4.1 Exemplos

Exemplo 3.6 *Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02. A probabilidade de um avião estar presente nesta área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião? (Note que esses são os dois erros possíveis nesta situação.)*

Solução:

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} A &= \text{“\textit{avião presente}”} \\ D &= \text{“\textit{radar detecta presença de avião}”} \end{aligned}$$

Os eventos complementares são:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \text{“\textit{avião não está presente}”} \\ \overline{D} &= \text{“\textit{radar não detecta avião}”} \end{aligned}$$

O problema nos dá as seguintes informações:

$$\Pr(D|A) = 0,99 \qquad \Pr\left(D|\overline{A}\right) = 0,02 \qquad \Pr(A) = 0,05$$

Pela lei do evento complementar, temos que

$$\Pr\left(\overline{D}|A\right) = 0,01 \qquad \Pr\left(\overline{D}|\overline{A}\right) = 0,98 \qquad \Pr(\overline{A}) = 0,95$$

O problema pede

$$\begin{array}{ll} \Pr(D|\overline{A}) & \textit{falso alarme} \\ \Pr(\overline{D}|A) & \end{array}$$

*Na **Figura 3.4** temos a ilustração desse experimento. Daí podemos ver que as probabilidades pedidas são:*

$$\Pr(D|\overline{A}) = \Pr\left(\overline{A}\right)\Pr\left(D|\overline{A}\right) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

$$\Pr(\overline{D}|A) = \Pr\left(A\right)\Pr\left(\overline{D}|A\right) = 0,05 \times 0,01 = 0,0005$$

Note que a probabilidade de um erro é a soma dessas probabilidades.

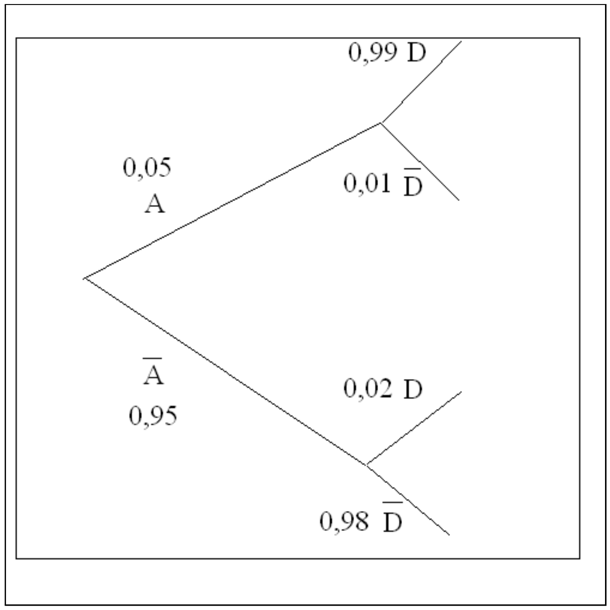

Figura 3.4: Diagrama de árvore para o problema do radar

Exemplo 3.7 *Considere que duas cartas de um baralho de pôquer (13 cartas de cada um dos naipes copas, paus, ouro, espada) sejam extraídas sem reposição, uma depois da outra. Qual é a probabilidade de nenhuma das duas ser de copas?*

Solução:

Para solucionar esse problema, devemos notar que as cartas no baralho são igualmente prováveis, antes e depois da primeira extração. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \textit{copas na primeira extração} \\ C_2 &= \textit{copas na segunda extração} \end{aligned}$$

Queremos calcular $\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right)$. *Pela regra da multiplicação, temos que*

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right)\Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right)$$

Na primeira extração, temos 39 cartas que não são de copas, em um baralho de 52. Na segunda extração, dado que na primeira não saiu copas, temos 38 cartas que não são copas em um baralho de 51. Logo,

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right)\Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

*Veja a **Figura 3.5**, onde temos o diagrama de árvore para esse problema. Cada nó na árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de todos os eventos representados pelos nós anteriores no caminho correspondente. Assim, a parte superior da árvore corresponde à ocorrência de copas na primeira extração - evento* C_1 *- e a parte inferior à não ocorrência de copas na primeira extração - evento* $\overline{C}_1$*.*

Continuando com a parte superior, vemos que

$$\begin{aligned}
\Pr(C_1) &= \frac{13}{52} \\
\Pr(C_2|C_1) &= \frac{12}{51} \\
\Pr\left(\overline{C}_2|C_1\right) &= \frac{39}{51}
\end{aligned}$$

Note que, pela lei do complementar, $\Pr(C_2|C_1)+\Pr\left(\overline{C}_2|C_1\right) = 1$*. Na parte inferior da árvore temos*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{C}_1\right) &= \frac{39}{52} \\
\Pr\left(C_2|\overline{C}_1\right) &= \frac{13}{51} \\
\Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right) &= \frac{38}{51}
\end{aligned}$$

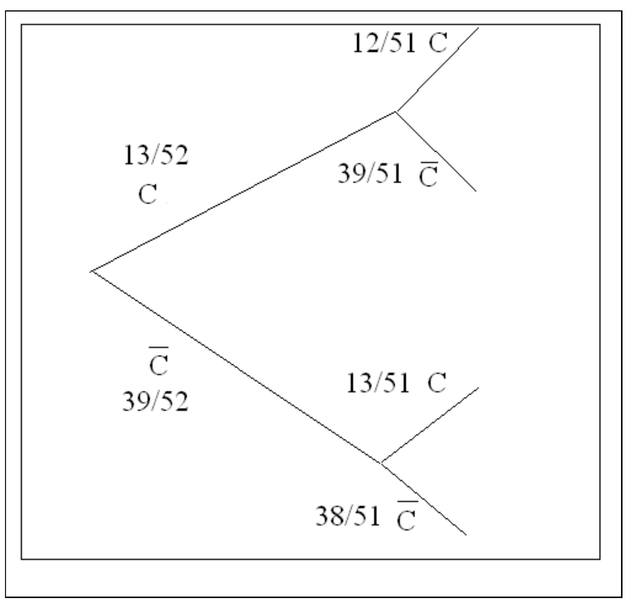

Figura 3.5: Diagrama de árvore para o experimento de extração de 2 cartas sem reposição

Exemplo 3.8 *Suponhamos agora a extração de 3 cartas sem reposição, onde estamos interessados no mesmo evento "nenhuma de copas". Queremos* $\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right)$*. Como generalizar a regra da* *multiplicação para esse caso? Usando um recurso algébrico, podemos escrever (note que os termos se cancelam):*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) &= \Pr\left(\overline{C}_1\right) \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_1\right)} \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right)}{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)} = \\
&= \Pr\left(\overline{C}_1\right) \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_1\right)} \times \frac{\Pr\left(\overline{C}_3 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}{\Pr\left(\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)}
\end{aligned}$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, resulta que

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) = \Pr\left(\overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right) \Pr\left(\overline{C}_3|\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right)$$

Voltando ao baralho, temos, como antes, $\Pr\left(\overline{C}_1\right) = \frac{39}{52}$ *e* $\Pr\left(\overline{C}_2|\overline{C}_1\right) = \frac{38}{51}$. *Com o mesmo tipo de raciocínio, resulta que* $\Pr\left(\overline{C}_3|\overline{C}_2 \cap \overline{C}_1\right) = \frac{37}{50}$. *Logo,*

$$\Pr\left(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \overline{C}_3\right) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

Veja a ***Figura 3.6***. *No diagrama de árvore, o espaço amostral completo é exibido. Algumas probabilidades são:*

$$\begin{aligned}
\Pr(C_1 \cap C_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{22}{1700} & &\textit{ramo 1} \\
\Pr(C_1 \cap \overline{C}_2 \cap C_3) &= \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{12}{50} = \frac{78}{1700} & &\textit{ramo 3} \\
\Pr(\overline{C}_1 \cap C_2 \cap \overline{C}_3) &= \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} = \frac{247}{1700} & &\textit{ramo 6}
\end{aligned}$$

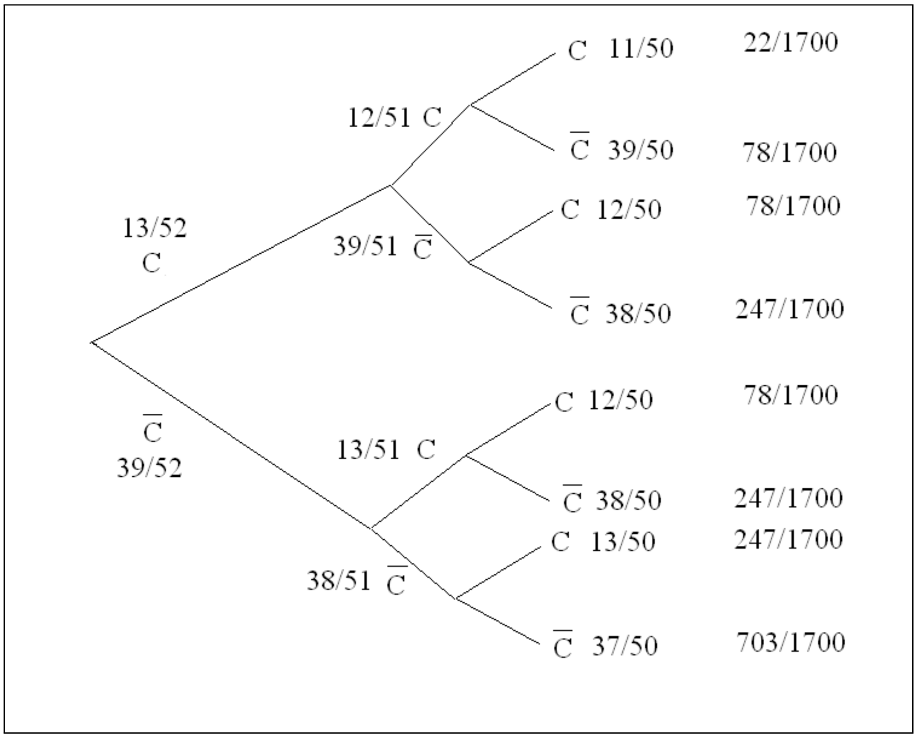

Figura 3.6: Diagrama de árvore para o experimento de extração de 3 cartas sem reposição

3.5 Regra geral da multiplicação

O exemplo anterior ilustra a regra geral de multiplicação.

Proposição 3.2 ***Regra Geral da Multiplicação***
Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos de um espaço amostral Ω. Então

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2|A_1) \times \cdots \times \Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{3.3}$$

3.5.1 Exercícios

3.6 *Em uma pesquisa realizada com um grupo de alunos da UFF, constatou-se que 10% dos estudantes não utilizam transporte público para ir às aulas e que 65% dos estudantes que utilizam o transporte público fazem refeições no bandejão do campus. Selecionando-se aleatoriamente um estudante deste grupo, calcule a probabilidade de que ele use transporte público e faça refeições no bandejão.*

3.7 *As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela a seguir.*

	Tipo de filme		
Sexo	*Comédia*	*Romance*	*Policial*
Masculino	*136*	*92*	*248*
Feminino	*102*	*195*	*62*

Sorteando-se ao acaso um registro de locação, pede-se a probabilidade de:

1. *ser um filme policial alugado por uma mulher;*
2. *ser uma comédia;*
3. *ser de um homem ou de um romance;*
4. *ser de um filme policial dado que foi alugado por um homem.*

3.8 *Uma urna contém 6 bolas pretas e 5 bolas amarelas. Extraem-se seqüencialmente 3 bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as 3 bolas sejam de cores iguais?*

3.6 Independência de eventos

Considere novamente um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} C &= \text{“carta é de copas”} \\ R &= \text{“carta é um rei”} \\ V &= \text{“carta é vermelha”} \end{aligned}$$

Já vimos que $\Pr(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; $\Pr(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e $\Pr(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$. Vamos agora calcular as seguintes probabilidades condicionais: $\Pr(R|C)$ e $\Pr(V|C)$. No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas e no segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$\begin{aligned} \Pr(R|C) &= \frac{\Pr(R \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = \Pr(R) \\ \Pr(V|C) &= \frac{\Pr(V \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1 \neq \Pr(V) \end{aligned}$$

No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber ou não que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei. Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos a probabilidade de sair carta vermelha. Como podemos ver, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta *tem* que ser vermelha. Esses exemplos ilustram um conceito importante. No primeiro caso, dizemos que os eventos R e C são *independentes* e no segundo caso, os eventos V e C são *dependentes*. No primeiro caso, o conhecimento da ocorrência de C não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de C;no segundo caso, o conhecimento da ocorrência de C faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de V.

Definição 3.3 *Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então, A e B são* ***independentes*** *se*

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Essa definição tem algumas implicações importantes. A primeira delas é a seguinte:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A) \Rightarrow \Pr(B|A) = \Pr(B)$$

De fato:

$$\begin{aligned} \Pr(A|B) &= \Pr(A) \Rightarrow \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \Pr(A) \\ &\Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow \\ \Pr(B|A) &= \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(A)} = \Pr(B) \end{aligned}$$

A conclusão disso é a seguinte: se A e B são independentes, então B e A também o são (comutatividade).

A segunda implicação, bastante importante, é a seguinte: se A e B são independentes, então $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. Mas a recíproca dessa afirmativa também é verdadeira, ou seja, se $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ então A e B são independentes. De fato:

$$\begin{aligned} \Pr(A \cap B) &= \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow \\ \Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A) \Rightarrow \\ & A \text{ e } B \text{ são independentes} \end{aligned}$$

Esse resultado nos permite estabelecer uma outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

Definição 3.4 *Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω. Então, A e B são* ***independentes*** *se*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

3.6.1 Exemplos

Exemplo 3.9 *Num exemplo anterior, analisamos os dados apresentados na tabela a seguir, referentes à participação de funcionários de uma empresa em planos de aposentadoria complementar:*

		Plano pessoal		*Total*
		Sim	*Não*	
Plano da	*Sim*	***200***	*200*	***400***
Empresa	*Não*	*0*	*100*	*100*
Total		***200***	*300*	***500***

Naquele exemplo, estudamos os eventos $E =$ *"empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa" e por* $P =$ *"empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar". Vamos ver se esses eventos são independentes.*

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(P) &= \frac{2}{5} \\
\Pr(E) &= \frac{4}{5} \\
\Pr(P \cap E) &= \frac{2}{5} \neq \Pr(P)\Pr(E)
\end{aligned}$$

Logo, os eventos P *e* E *não são independentes. Outra forma de ver isso é*

$$\Pr(E|P) = \frac{200}{200} = 1 \neq \Pr(E) = \frac{4}{5}$$

Exemplo 3.10 *Sejam* A *e* B *eventos independentes em um espaço amostral* Ω. *Prove que os seguintes eventos também são independentes:*

1. $\overline{A}$ *e* B
2. $\overline{A}$ *e* $\overline{B}$

Solução:

1. *Temos que*

$$\Pr(\overline{A} \cap B) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Como A *e* B *são independentes,* $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) \\
&= \Pr(B)[1 - \Pr(A)] \\
&= \Pr(B)\Pr(\overline{A})
\end{aligned}$$

Logo, os eventos $\overline{A}$ *e* B *são independentes.*

2. *Pela lei de De Morgan e pela lei do complementar, temos que*

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) \\
&= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A \cap B)
\end{aligned}$$

Como A *e* B *são independentes,* $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A)\Pr(B) \\
&= [1 - \Pr(A)] - \Pr(B)[1 - \Pr(A)] \\
&= [1 - \Pr(A)][1 - \Pr(B)] \\
&= \Pr(\overline{A})\Pr(\overline{B})
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{A}$ *e* $\overline{B}$ *são independentes.*

3.6.2 Exercícios

3.9 *Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que* $\Pr(A) = \frac{1}{5}$, $\Pr(B) = p$ *e* $\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2}$. *Determine o valor de p para que A e B sejam independentes.*

3.10 *Volte ao Exercício 3.4 da Seção 3.2. Verifique se os eventos considerados são independentes.*

3.11 *Sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω tais que* $\Pr(A) > 0$ *e* $\Pr(B) > 0$.

1. *Mostre que se A e B são independentes, então A e B não podem ser mutuamente exclusivos.*

2. *Mostre que se A e B são mutuamente exclusivos, então A e B não podem ser independentes.*

3.7 Exercícios Complementares

3.12 *Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Sabe-se que* $\Pr(A) = 0,3$; $\Pr(B) = 0,7$ *e* $\Pr(A \cap B) = 0,21$. *Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras. Justifique sua resposta.*

1. *A e B são mutuamente exclusivos;*

2. *A e B são independentes;*

3. *A e $\overline{B}$ são independentes;*

4. *A e $\overline{B}$ são mutuamente exclusivos;*

5. *A e $\overline{A}$ são independentes.*

3.13 *Dois dados equilibrados são lançados.*

1. *Calcule a probabilidade de sair 6 em pelo menos um dado.*

2. *Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair 6 em pelo menos um dado.*

3. *Os eventos "seis em pelo menos um dado" e "faces diferentes nos dois dados" são independentes?*

3.14 *Uma sala possui três soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais 6 estão queimadas, retiram-se 3 lâmpadas ao acaso, colocando-se as mesmas nos três bocais. Calcular a probabilidade de que:*

1. *pelo menos uma lâmpada acenda;*

2. *todas as lâmpadas acendam.*

3.15 *O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade da inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. Qual é a probabilidade de se criarem 200.000 empregos nesse ano?*

3.16 *Na urna I há 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 8 azuis. Na urna II há 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 3 ou 6, escolhe-se uma bola da urna I; caso contrário, escolhe-se uma bola da urna II. Calcule a probabilidade de*

1. *sair uma bola vermelha;*
2. *sair uma bola branca;*
3. *sair uma bola azul.*

3.17 *Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é* $\frac{8}{10}$*. A probabilidade de que o correio não a perca é* $\frac{9}{10}$*. A probabilidade de que o carteiro a entregue é também* $\frac{9}{10}$*.*

1. *Construa o diagrama de árvore representando o espaço amostral deste problema.*
2. *Calcule a probabilidade de Camila não receber a carta.*

3.18 *Sejam* A *e* B *dois eventos tais que* $\Pr(A) = 0,4$ *e* $\Pr(A \cup B) = 0,7$*. Seja* $\Pr(B) = p$*. Determine o valor de* p *para que*

1. A *e* B *sejam mutuamente exclusivos;*
2. A *e* B *sejam independentes.*

3.19 *Sejam* A *e* B *eventos possíveis de um mesmo espaço amostral* Ω*. Se* $P(\overline{A}|B) = 1$ *verifique a veracidade das seguintes afirmativas, justificando sua resposta.*

1. A *e* B *são independentes.*
2. A *e* B *são mutuamente exclusivos.*

3.20 *Sejam* A, B, C *eventos de um mesmo espaço amostral. Sabe-se que (i)* B *é um subconjunto de* A*; (ii)* A *e* C *são independentes e (iii)* B *e* C *são mutuamente exclusivos. A probabilidade do complementar da união dos eventos* A *e* C *é 0,48; a probabilidade da união dos eventos* B *e* C *é 0,3 e a probabilidade do evento* C *é o dobro da probabilidade do evento* B*. Calcule a probabilidade da união de* A *e* B*.*

3.21 *Uma comissão de dois estudantes deve ser sorteada de um grupo de 5 alunas e 3 alunos. Sejam os eventos:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{“primeiro estudante sorteado é mulher”} \\ M_2 &= \text{“segundo estudante sorteado é mulher”} \end{aligned}$$

1. *Construa um diagrama de árvore que represente o espaço amostral deste experimento, indicando as probabilidades.*

2. *Calcule* $\Pr(M_1)$ *e* $\Pr(M_2)$.

3. *Verifique se* M_1 *e* M_2 *são independentes.*

3.22 *Em um campeonato de natação, estão competindo três estudantes: Alberto, Bosco e Carlos. Alberto e Bosco têm a mesma probabilidade de ganhar, que é o dobro da de Carlos ganhar.*

1. *Ache a probabilidade de que Bosco ou Carlos ganhe a competição.*

2. *Que hipótese você fez para resolver essa questão? Essa hipótese é razoável?*

3.23 *Solicita-se a dois estudantes, Maria e Pedro, que resolvam determinado problema. Eles trabalham na solução do mesmo independentemente, e têm, respectivamente, probabilidade 0,8 e 0,7 de resolvê-lo.*

1. *Qual é a probabilidade de que nenhum deles resolva o problema?*

2. *Qual é a probabilidade do problema ser resolvido?*

3. *Dado que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que tenha sido resolvido apenas por Pedro?*

3.24 *Joga-se um dado duas vezes. Considere os seguintes eventos:* $A =$ *" resultado do primeiro lançamento é par" e* $B =$ *"soma dos resultados é par".* A *e* B *são independentes? Justifique.*

3.25 *Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola". Qual é a probabilidade de ele acertar a questão?*

Capítulo 4

Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Neste capítulo, você estudará dois importantes teoremas de probabilidade e verá suas aplicações em diversas situações envolvendo a tomada de decisão. Esses teoremas, conhecidos como teorema da probabilidade total e teorema de Bayes, resultam diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

A apresentação desses teoremas será feita inicialmente através de exemplos, para que você compreenda bem o contexto de sua aplicação. Ao final, será apresentada a formulação geral dos teoremas.

Exemplo 4.1

Em uma linha de produção de uma certa fábrica, determinada peça é produzida em duas máquinas. A máquina 1, mais antiga, é responsável por 35% da produção e os 65% restantes vêm da máquina 2. A partir dos dados passados e das informações do fabricante das máquinas, estima-se em 5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 1 e em 2,5% a proporção de defeituosas produzidas pela máquina 2. As peças produzidas pelas duas máquinas seguem para o departamento de armazenamento e embalagem, para venda posterior, sem distinção de qual máquina a produziu.

1. Qual é a proporção de peças defeituosas colocadas no mercado por essa fábrica?
2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina 2?

Solução:

1. Na **Figura 4.1** representa-se a situação descrita no exemplo. Nosso experimento aleatório é o sorteio de uma peça produzida por essa fábrica e nosso espaço amostral, representado pelo retângulo, é o conjunto de todas as peças produzidas em determinado período. Podemos ver que o espaço amostral está dividido em 2 eventos mutuamente exclusivos: M_1, peças produzidas pela máquina 1, e M_2, peças produzidas pela máquina 2. Mais precisamente, $\Omega = M_1 \cup M_2$ – isso significa que M_1 e M_2 formam uma partição do espaço amostral (retorne

à Seção **??**, se necessário). Um outro evento de interesse é o evento $D =$ "peça é defeituosa". Podemos ver que esse evento tem interseção com os eventos M_1 e M_2, ou seja, há peças defeituosas produzidas na máquina 1 e na máquina 2.

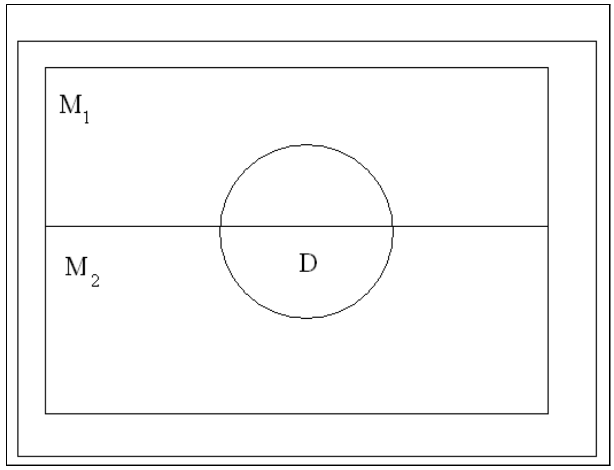

Figura 4.1: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 4.1

Pelos dados do problema, temos uma estimativa *a priori* das proporções de peças produzidas em cada máquina, ou seja, as probabilidades *a priori* dos eventos M_1 e M_2 são:

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= 0,35 \\ \Pr(M_2) &= 0,65 \end{aligned}$$

Sabemos também a proporção de peças defeituosas produzidas por cada máquina. Essa proporção se traduz em uma probabilidade condicional: se a peça foi produzida pela máquina 1, existe 5% de chance de ser defeituosa; para a máquina 2, essa chance reduz-se a 2,5%. Em termos de probabilidade, temos

$$\begin{aligned} \Pr(D|M_1) &= 0,05 \\ \Pr(D|M_2) &= 0,025 \end{aligned}$$

Como M_1 e M_2 formam uma partição de Ω, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)$$

Mas M_1 e M_2 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$ e $(D \cap M_2)$ também o são. Assim, pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr\left[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)\right] \\ &= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) \end{aligned}$$

Pela regra da multiplicação (veja o capítulo anterior) sabemos que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= \Pr(M_1)\Pr(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) \\
&= 0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025 \\
&= 0,03375
\end{aligned}$$

Note que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina; os pesos são definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

2. Na segunda parte do exemplo, temos uma informação sobre a peça: ela é defeituosa, ou seja, sabemos que ocorreu o evento D. O que o problema pede é que, com essa informação, reavaliemos a probabilidade de a peça ter sido produzida pela máquina 2. Essa probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori,* ou seja, é a probabilidade que calculamos depois de realizado o experimento de sorteio e teste da peça. Em notação matemática, temos que calcular $\Pr(M_2|D)$. Por definição, temos

$$\Pr(M_2|D) = \frac{\Pr(M_2 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
\Pr(M_2|D) &= \frac{\Pr(M_2)\Pr(M_2|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2)} \\
&= \frac{0,65 \times 0,025}{0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025} \\
&= \frac{0,01625}{0,03375} = 0,4815
\end{aligned}$$

Compare os resultados: sem qualquer informação sobre o resultado do experimento, nossa estimativa para a probabilidade de ocorrência de M_2 − peça ser produzida pela máquina 2 − era 0,65; com a informação de que a peça é defeituosa, a probabilidade de ter sido produzida pela máquina 2 diminui para 0,4815.

Exemplo 4.2

Considere novamente a situação do Exemplo 4.1, mas com a seguinte modificação: as peças são produzidas em três máquinas, que são responsáveis por 30%, 35% e 35% da produção, respectivamente. As proporções de peças defeituosas produzidas nessas máquinas são 5%, 2,5% e 2%.

1. Qual é a proporção de peças defeituosas produzidas na fábrica?

2. Se um cliente identifica uma peça defeituosa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina 1? E na máquina 2? E na máquina 3?

Solução:

1. O espaço amostral desse experimento está ilustrado no diagrama de árvore da **Figura 4.2**.

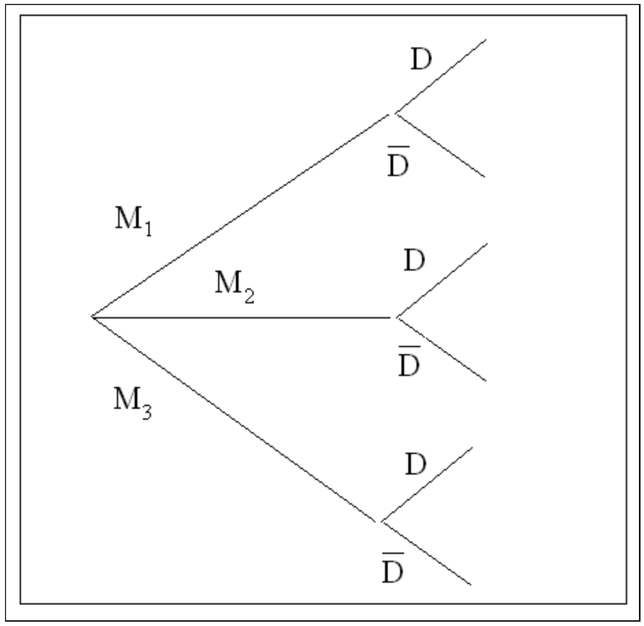

Figura 4.2: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 4.2

Como visto no capítulo anterior, cada galho da árvore corresponde ao condicionamento do evento aos eventos dos galhos anteriores. Assim, na parte superior da árvore, temos os eventos $D|M_1$ e $\overline{D}|M_1$. Na parte do meio, temos os eventos $D|M_2$ e $\overline{D}|M_2$ e na parte inferior, $D|M_3$ e $\overline{D}|M_3$.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades a priori:

$$\begin{aligned} \Pr(M_1) &= 0,30 \\ \Pr(M_2) &= \Pr(M_3) = 0,35 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Pr(D|M_1) &= 0,05 \\ \Pr(D|M_2) &= 0,025 \\ \Pr(D|M_3) &= 0,02 \end{aligned}$$

Como antes, M_1, M_2 e M_3 formam uma partição de Ω e, portanto, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Mas M_1, M_2 e M_3 são mutuamente exclusivos; logo, $(D \cap M_1)$, $(D \cap M_2)$ e $(D \cap M_3)$ também o são. Pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(D) &= \Pr\left[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)\right] \\ &= \Pr(D \cap M_1) + \Pr(D \cap M_2) + \Pr(D \cap M_3) \end{aligned}$$

Pela regra da multiplicação sabemos que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= \Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3) \\
&= 0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02 \\
&= 0,03075
\end{aligned}$$

Como antes, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina, com os pesos definidos de acordo com o nível de produçãode cada máquina.

2. Na segunda parte do exemplo, deseja-se calcular as probabilidades a posteriori $\Pr(M_1|D)$, $\Pr(M_2|D)$ e $\Pr(M_3|D)$. Por definição, temos

$$\Pr(M_1|D) = \frac{\Pr(M_1 \cap D)}{\Pr(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
\Pr(M_1|D) &= \frac{\Pr(M_1)\Pr(M_1|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,30 \times 0,05}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,015}{0,03075} = 0,487805
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(M_2|D) &= \frac{\Pr(M_2)\Pr(M_2|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,35 \times 0,025}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,00875}{0,03075} = 0,284553
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(M_3|D) &= \frac{\Pr(M_3)\Pr(M_3|D)}{\Pr(M_1)PR(D|M_1) + \Pr(M_2)\Pr(D|M_2) + \Pr(M_3)\Pr(D|M_3)} \\
&= \frac{0,35 \times 0,02}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\
&= \frac{0,007}{0,03075} = 0,227642
\end{aligned}$$

Note que $0,487805 + 0,284553 + 0,227642 = 1,000000$; esse resultado é imediato a partir do fato de que $\Pr(\Omega) = 1$. Se ocorreu uma peça defeituosa, essa peça só pode ter vindo de umas das três máquinas.

Exemplo 4.3

Sabe-se que um "soro da verdade", quando aplicado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas, onde 95% jamais cometeram qualquer crime.

1. Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?
2. Se o soro indica "culpado", qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Solução:

1. Vamos definir os seguintes eventos (veja a **Figura 4.3**):

   $C =$ "suspeito é culpado" $\overline{C} =$ "suspeito é inocente"

   $V =$ "soro indica culpado" $\overline{V} =$ "soro indica inocente"

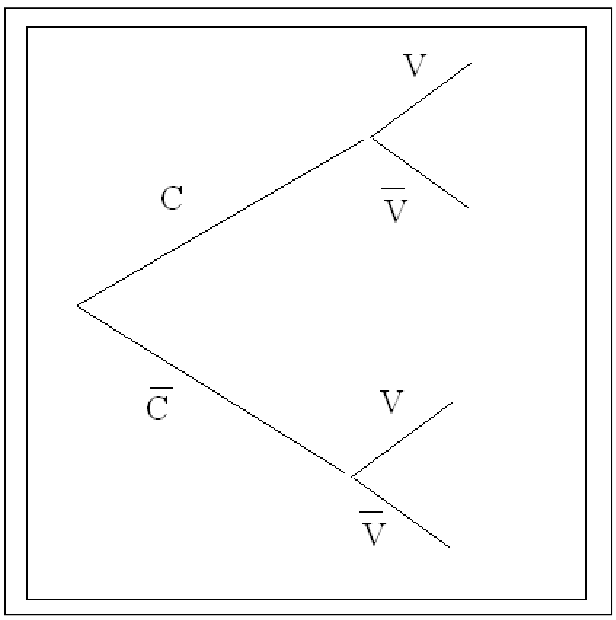

Figura 4.3: Espaço amostral para o experimento do Exemplo 4.3

Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta é "culpado" ou "inocente" e não "soro acerta" ou "soro erra".

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
\Pr(V \mid C) &= 0,90 \\
\Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) &= 0,99 \\
\Pr(\overline{C}) &= 0,95
\end{aligned}
$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos que:

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{V} \mid C) &= 0,10 \\ \Pr(V \mid \overline{C}) &= 0,01 \\ \Pr(C) &= 0,05 \end{aligned}$$

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos C e $\overline{C}$, para os quais temos as probabilidades a priori. Os eventos de interesse são V e $\overline{V}$.

Seja o evento $A =$ "soro acerta o diagnóstico". Note que o soro pode diagnosticar corretamente sendo o suspeito culpado ou inocente.Veja a tabela a seguir.

		Suspeito	
		Inocente $\overline{C}$	Culpado C
Resultado	Inocente $\overline{V}$	OK!	Erro
do soro	Culpado V	Erro	OK!

Dessa forma,

$$A = (C \cap V) \cup \left(\overline{C} \cap \overline{V}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(C \cap V) + \Pr\left(\overline{C} \cap \overline{V}\right) \\ &= \Pr(C)\Pr(V \mid C) + \Pr(\overline{C})\Pr(\overline{V} \mid \overline{C}) \\ &= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 \\ &= 0,9855 \end{aligned}$$

2. Queremos calcular $\Pr(\overline{C} \mid V)$. Por definição temos que:

$$\Pr(\overline{C} \mid V) = \frac{\Pr(\overline{C} \cap V)}{\Pr(V)}$$

O soro pode indicar culpado sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico) ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

$$\begin{aligned} \Pr(V) &= \Pr(V \cap C) + \Pr\left(V \cap \overline{C}\right) \\ &= \Pr(V \mid C) \times \Pr(C) + \Pr\left(V \mid \overline{C}\right) \times \Pr(\overline{C}) \\ &= 0,90 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95 = 0,045 + 0,0095 = 0,0545 \end{aligned}$$

e

$$\Pr\left(V \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(V \mid \overline{C}\right) \times \Pr(\overline{C}) = 0,01 \times 095 = 0,0095$$

Logo,

$$\Pr(\overline{C} \mid V) = \frac{0,0095}{0,0545} = 0,1743$$

Exemplo 4.4

Uma caixa contém três moedas. A moeda 1 é honesta, a moeda 2 tem duas caras e a moeda 3 é viciada de tal modo que cara é duas vezes mais provável que coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

1. Qual é a probabilidade de observarmos cara e moeda 1?
2. Qual é a probabilidade de observarmos cara?
3. Se o resultado foi cara, qual a probabilidade que a moeda lançada tenha sido a moeda 1?

   Solução:

   Vamos definir os eventos

$$\begin{aligned} K &= \text{cara} \qquad C = \text{coroa} \\ M_1 &= \text{moeda 1} \qquad M_2 = \text{ moeda 2} \qquad M_3 = \text{ moeda 3} \end{aligned}$$

   É dado que

$$\Pr\left(K|M_1\right) = \frac{1}{2} \qquad \Pr\left(K|M_2\right) = 1$$

   Para a moeda 3, como a probabilidade de cara é duas vezes a probabilidade de coroa e a soma dessas probabilidades tem que ser 1, resulta que

$$\Pr(K|M_3) = \frac{2}{3}$$

   Como a moeda lançada é escolhida aleatoriamente, temos que

$$\Pr(M_1) = \Pr(M_2) = \Pr(M_3) = \frac{1}{3}$$

   Veja a **Figura 4.4**.

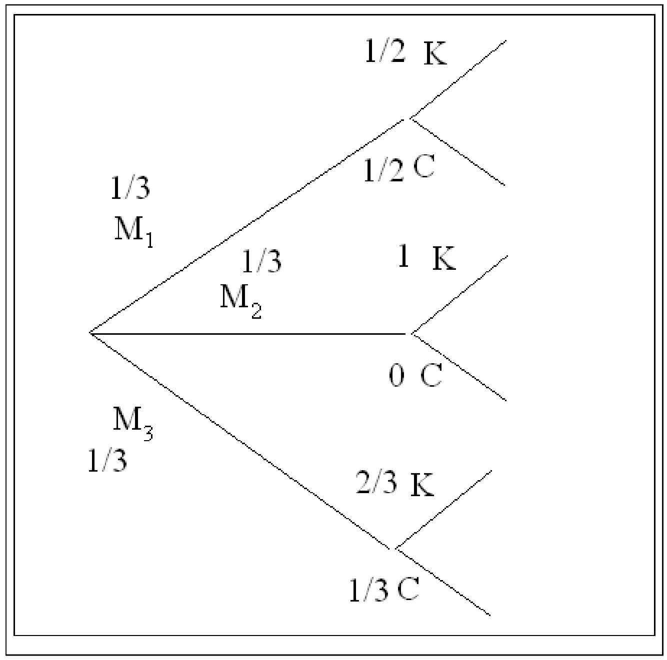

Figura 4.4: Espaço amostral para o Exemplo 4.4 das 3 moedas

(a) Aqui a solução é conseqüência direta da regra de multiplicação:

$$\begin{aligned}
\Pr(K \cap M_1) &= \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(b) Os eventos que formam a partição do espaço amostral são M_1, M_2 e M_3. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(K) &= \Pr(K \cap M_1) + \Pr(K \cap M_2) + \Pr(K \cap M_3) = \\
&= \Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1) + \Pr(M_2) \times \Pr(K|M_2) + \Pr(M_3) \times \Pr(K|M_3) = \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{18}
\end{aligned}$$

(c) O problema pede

$$\Pr(M_1|K) = \frac{\Pr(K \cap M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\Pr(M_1) \times \Pr(K|M_1)}{\Pr(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}$$

Exemplo 4.5

Um gerente de banco tem que decidir se concede ou não empréstimo aos clientes que o solicitam. Ele analisa diversos dados para estudar a possibilidade de o cliente vir a ficar inadimplente. Com base em dados passados, ele estima em 15% a taxa de inadimplência. Dentre os inadimplentes, ele tem 80% de chance de tomar a decisão certa, enquanto que essa chance aumenta para 95% entre os clientes adimplentes. Esse gerente acaba de recusar um empréstimo. Qual é a probabilidade de ele ter tomado a decisão correta?

Solução:

Os fatos envolvidos nesse processo decisório são: "cliente é inadimplente ou não" e "gerente concede ou não o empréstimo". Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} I &= \text{“cliente é inadimplente”} \\ C &= \text{“gerente concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Usaremos a notação de evento complementar para definir

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \text{“cliente é adimplente”} \\ \overline{C} &= \text{“gerente não concede empréstimo”} \end{aligned}$$

Note que temos duas possibilidades de acerto e duas possibilidades de erro. Os acertos são:

- cliente é inadimplente e gerente não concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente concede o empréstimo

Os erros são:

- cliente é inadimplente e gerente concede o empréstimo
- cliente é adimplente e gerente não concede o empréstimo

A árvore que representa o espaço amostral é dada na **Figura 4.5**.

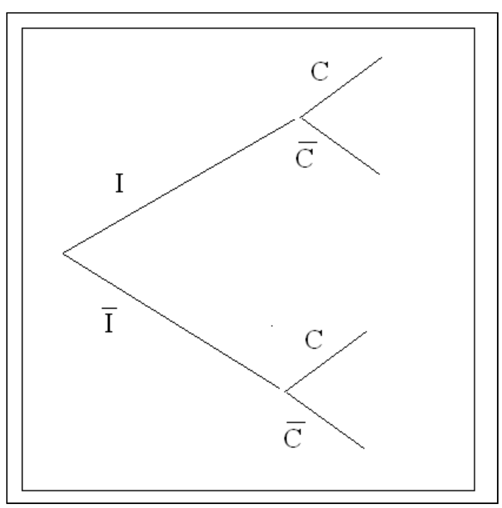

Figura 4.5: Espaço amostral para o Exemplo 4.5

As probabilidades dadas são

$$
\begin{aligned}
\Pr(I) &= 0,15 \\
\Pr(\overline{C}|I) &= 0,80 \text{ (decisão certa dado cliente inadimplente)} \\
\Pr(C|\overline{I}) &= 0,90 \text{ (decisão certa dado cliente adimplente)}
\end{aligned}
$$

Pela lei do complementar, resulta que

$$
\begin{aligned}
\Pr(\overline{I}) &= 0,85 \\
\Pr(C|I) &= 0,20 \\
\Pr(\overline{C}|\overline{I}) &= 0,10
\end{aligned}
$$

Com relação ao que o problema pede, temos que, dado que o gerente *recusou* o empréstimo, a decisão só será certa se o cliente for *inadimplente*. Logo, temos que calcular

$$
\Pr(I|\overline{C}) = \frac{\Pr(I \cap \overline{C})}{\Pr(\overline{C})}
$$

Mas, o gerente pode recusar o empréstimo sendo o cliente inadimplente ou não, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\Pr(\overline{C}) &= \Pr(\overline{C} \cap I) + \Pr(\overline{C} \cap \overline{I}) \\
&= \Pr(I)\Pr(\overline{C}|I) + \Pr(\overline{I})\Pr(\overline{C}|\overline{I}) \\
&= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times 0,10 \\
&= 0,205
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Pr(I|\overline{C}) &= \frac{\Pr(I \cap \overline{C})}{\Pr(\overline{C})} \\
&= \frac{\Pr(I)\Pr(\overline{C}|I)}{\Pr(I)\Pr(\overline{C}|I) + \Pr(\overline{I})\Pr(\overline{C}|\overline{I})} \\
&= \frac{0,15 \times 0,80}{0,205} \\
&= 0,5854
\end{aligned}
$$

4.1 Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Considere a **Figura 4.6**, onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer em Ω.

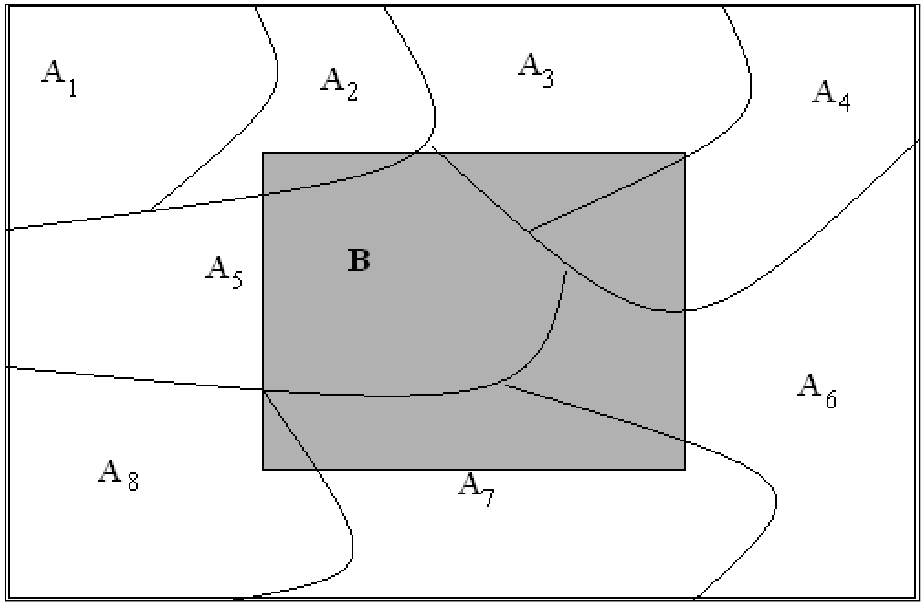

Figura 4.6: Partição do espaço amostral

Como a união de todos os A_i's é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

O fato de alguns desses termos ser o conjunto vazio (por exemplo, $B \cap A_4 = \varnothing$) não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \varnothing = A$. Por definição de partição, os A_i's são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos $A_i \cap B$ também o são. Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B)\right] = \\ &= \Pr(A_1 \cap B) + \Pr(A_2 \cap B) + \cdots + \Pr(A_n \cap B) \end{aligned}$$

e a regra da multiplicação nos dá que

$$\Pr(B) = \Pr(A_1)\Pr(B|A_1) + \Pr(A_2)\Pr(B|A_2) + \cdots + \Pr(A_n)\Pr(B|A_n)$$

Esse resultado é conhecido como teorema da probabilidade total.

Teorema 4.1 ***Teorema da probabilidate total***

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)\Pr(B|A_i)$$

Como visto, a probabilidade $\Pr(A_i)$ é denominada *probabilidade a priori do evento A_i*. Continuando no contexto da **Figura 4.6**, suponhamos agora que B tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a *probabilidade a posteriori* do evento A_i, ou seja, vamos calcular $\Pr(A_i|B)$. Por definição temos que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i)\Pr(A_i|B)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(A_j)\Pr(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes.

Teorema 4.2 ***Teorema de Bayes***

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i)\Pr(A_i|B)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(A_j)\Pr(B|A_j)}$$

É importante que, na resolução de exercícios e também na aplicação prática desses teoremas, você identifique os eventos de interesse, os eventos que definem a partição do espaço amostral e quais são as probabilidades a priori. Em geral, são essas probabilidades que identificam a partição de Ω. Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar esses pontos.

Exemplo 4.6

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto que essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que possui um carro. Qual é a probabilidade de que a pessoa sorteada seja do sexo feminino?

Solução:

Os eventos em questão envolvem o sexo do aluno e a posse de um carro. Vamos definir os eventos de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \text{homem} \qquad M = \text{mulher} \\ C &= \text{possui carro} \qquad \overline{C} = \text{não possui carro} \end{aligned}$$

Note que H e M definem uma partição do espaço amostral, assim como C e $\overline{C}$. No entato, as probabilidades a priori dadas referem-se a H e M; logo, a partição de Ω será definida em termos desses eventos. Os dados do problema nos dão que

$$\begin{aligned} \Pr(H) &= 0,65 \Rightarrow \Pr(M) = 0,35 \\ \Pr(C|H) &= 0,30 \Rightarrow \Pr(\overline{C}|H) = 0,70 \\ \Pr(C|M) &= 0,18 \Rightarrow \Pr(\overline{C}|M) = 0,82 \end{aligned}$$

O problema pede $\Pr(M|C)$ e para calcular essa probabilidade, temos que calcular $\Pr(C)$. Pelo teorema da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned}
\Pr(C) &= \Pr(C \cap M) + \Pr(C \cap H) \\
&= \Pr(M)\Pr(C|M) + \Pr(H)\Pr(C|H) \\
&= 0,35 \times 0,18 + 0,65 \times 0,70 \\
&= 0,518
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(M|C) &= \frac{\Pr(C \cap M)}{\Pr(C)} \\
&= \frac{\Pr(M)\Pr(C|M)}{\Pr(C)} \\
&= \frac{0,35 \times 0,18}{0,518} \\
&= 0,12162
\end{aligned}$$

4.2 Exercícios Complementares

4.1 *Uma propaganda de um curso preparatório para a prova da ANPAD diz que 80% dos seus alunos conseguem ingressar em algum programa de Mestrado em Administração. Dos cadastros da ANPAD, sabe-se que 15% dos candidatos aos programas de Mestrado escolhem esse curso e que o índice geral de aprovação é de 63%. (Dados fictícios)*

1. *Se um candidato não escolhe esse curso, qual é a probabilidade de ele passar no exame da ANPAD?*

2. *Sabe-se que um aluno foi aprovado, conseguindo ingressar no programa de Mestrado de uma grande universidade. Qual é a probabilidade de ele ter freqüentado este curso preparatório?*

4.2 *Em uma localidade, 8% dos adultos sofrem de determinada doença. Um médico local diagnostica corretamente 95% das pessoas que têm a doença e diagnostica erradamente 2% das pessoas que não a têm. Um adulto acaba de ser diagnosticado pelo médico como portador da doença. Qual é a probabilidade de esse adulto ter, de fato, a doença?*

4.3 *Uma urna contém 4 bolas numeradas de 1 a 4. Duas bolas são retiradas sem reposição. Seja A o evento "soma é 5" e seja B_i o evento "primeira bola sorteada tem o número i", $i = 1, 2, 3, 4$. Calcule $\Pr(A \mid B_i)$ e $\Pr(B_i \mid A)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.*

4.4 *Resolva o exercício anterior, supondo que as extrações sejam feitas com reposição.*

4.5 *Numa prova há 7 perguntas do tipo Verdadeiro-Falso. Calcule a probabilidade de um aluno acertar todas as 7 questões*

1. *se ele "chuta" as respostas;*

2. se ele "chuta" as respostas, mas sabendo que há mais Verdadeiros do que Falsos.

4.6 *Continuação do Exercício 3.15 do Capítulo 3. O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível. No ano seguinte, um economista estrangeiro constata que foram criados 200.000 empregos novos. Qual é a probabilidade de a inflação ter ficado abaixo de 3%?*

4.7 *Continuação do Exercício 3.17 do Capítulo 3. Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é $\frac{8}{10}$. A probabilidade de que o correio não a perca é $\frac{9}{10}$. A probabilidade de que o carteiro a entregue é também $\frac{9}{10}$. Dado que Camila não recebeu a carta, qual é a probabilidade de que Joana não a tenha escrito?*

4.8 *Continuação do Exercício 3.25 do Capítulo 3. Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com 4 alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola". Se o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de ele ter "chutado" a resposta?*

4.9 *Consideremos dois dados: um deles é equilibrado e o outro viciado, com* $\Pr(1) = 0,5$ *e* $\Pr(2) = \cdots = \Pr(6) = 0,1$. *Escolhe-se um dos dados ao acaso e efetuam-se dois lançamentos, que resultam ambos na face 1. Qual a probabilidade de ter sido escolhido o dado viciado?*

4.10 *Uma urna tem 3 bolas brancas, 3 pretas e 4 azuis. Duas bolas são retiradas ao acaso e substituídas por 5 vermelhas. Depois disso, retira-se uma bola. Qual é a probabilidade de ser azul?*

4.11 *São dadas as urnas A, B e C. Da urna A é retirada uma bola, que é colocada na urna B. Da urna B retira-se, então, uma bola que é colocada na urna C. Retira-se em seguida uma bola da urna C. A probabilidade de ocorrer bola de cor vermelha na última extração é 0,537. Determinar o valor de x sabendo que as urnas têm as seguintes composições:*

$$A : \begin{cases} 7V \\ 3P \end{cases} \qquad B : \begin{cases} 3V \\ 6P \end{cases} \qquad C : \begin{cases} 9 - x & V \\ \phantom{9 - {}} x & P \end{cases}$$

onde V representa bola vermelha e P, bola preta.

4.12 *O chefe do Setor de Compras de uma empresa trabalha com 3 grandes distribuidores de material de escritório. O distribuidor 1 é responsável por 70% dos pedidos, enquanto cada um dos outros 2 distribuidores responde por 15% dos pedidos. Dos registros gerais de compra, sabe-se que 6% dos pedidos chegam com atraso. A proporção de pedidos com atraso do distribuidor 1 é a metade da proporção do distribuidor 2 que, por sua vez, é o dobro da proporção do distribuidor 3. Calcule a porcentagem de pedidos com atraso de cada um dos distribuidores.*

4.13 *O gerente de Recursos Humanos de uma empresa escolhe estagiários oriundos de dois cursos de Administração. No curso 1, a proporção de alunos com boa formação em informática é de 60%, enquanto no outro curso, essa proporção cai para 40%. Um estagiário acaba de ser contratado. A probabilidade de que tenha boa formação em informática é 0,44. Qual é a preferência (probabilidade) do gerente pelo curso 1?*

4.14 *Em um escritório de contabilidade, o contador-chefe tem três auxiliares, um que trabalha em tempo integral e os outros dois que trabalham em tempo parcial. O funcionário de tempo integral é responsável por 50% dos balancetes, enquanto cada um dos funcionários de tempo parcial responde pela metade dos balancetes restantes. Nos últimos 2 meses, a proporção de balancetes com erros oriundos do funcionário de tempo integral foi de 5%, enquanto para os funcionários de tempo parcial essas proporções foram de 6% e 8%. O chefe resolve, então, fazer um novo treinamento, discutindo os principais erros encontrados. No mês seguinte ao treinamento, a proporção de balancetes com erro cai pela metade, com cada funcionário de tempo parcial produzindo a mesma proporção de balancetes com erro, igual à metade da proporção de erros do funcionário de tempo integral. Quais são as novas proporções de balancetes com erro de cada funcionário?*

4.15 *Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de 1/2. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte hidráulica é de 3/4; caso contrário, essa probabilidade é de 1/3. Qual é a probabilidade de ele:*

1. *ganhar os dois contratos?*
2. *ganhar apenas um?*
3. *não ganhar qualquer contrato?*

Capítulo 5

Solução dos Exercícios

5.1 Capítulo 1

1. $K =$ cara $\qquad C =$ coroa
   $\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$
   $A = \{KKK, CCC\}$
   $B = \{KKK, KKC, KCK, KCC\}$
   $C = \{KCC, CCC\}$

2. Veja a **Figura 5.1**.

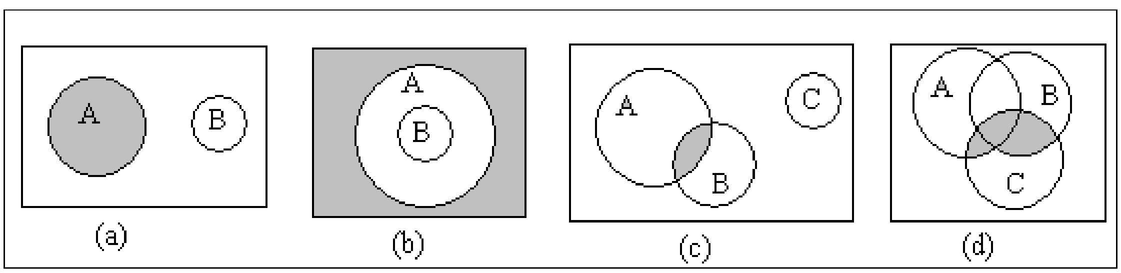

Figura 5.1: Solução do Exercício 1.2

3. Área 1: são os elementos que pertencem apenas ao evento $A : A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
   Área 2: são os elementos que pertencem apenas ao evento $B : \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$
   Área 3: são os elementos que pertencem apenas ao evento $C : \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$
   Área 4: são os elementos que pertencem a A e a B, mas não a $C : A \cap B \cap \overline{C}$
   Área 5: são os elementos que pertencem a A e a C, mas não a $B : A \cap \overline{B} \cap C$
   Área 6: são os elementos que pertencem a B e a C, mas não a $A : \overline{A} \cap B \cap C$
   Área 7: são os elementos que pertencem a A, a B e a $C : A \cap B \cap C$
   Área 8: são os elementos que não pertencem nem a A, nem a B, nem a $C : \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

4. .

   (a) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

   (b) Representando por M e F os sexos masculino e feminino, respectivamente, podemos representar o espaço amostral como

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} M, F, MM, MF, FM, FF, \\ MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF, \\ FFFF, FFFM, FFMF, FMFF, MFFF, MMFF, \\ MFMF, MFFM, FFMM, FMFM, FMMF, \\ MMMF, MMFM, MFMM, FMMM, MMMM \end{array} \right\}$$

   Note que representamos aí os casais com um filho, dois filhos, três filhos e quatro filhos.

   (c) A lâmpada pode queimar logo ao ser ligada e, teoricamente, pode durar para sempre; logo, $\Omega = (0, \infty)$.

   (d) Como temos que sortear as 3 mulheres, serão necessários no mínimo 3 sorteios e, no pior dos casos, a última mulher será a última a ser sorteada. Como estamos interessados apenas no número de sorteios, o espaço amostral é $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   (e) Podemos obter cara logo no primeiro lançamento ou então no segundo ou no terceiro.... teoricamente, pode ser necessário lançar a moeda infinitas vezes. Logo, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$

   (f) $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, BC, BD, BE, CA, CB, CC, \\ CD, CE, DA, DB, DC, DD, DE, EA, EB, EC, ED, EE \end{array} \right\}$

   (g) $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, \\ DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED \end{array} \right\}$

5. .

   (a) $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$ - o primeiro termo corresponde ao evento "apenas A ocorre", o segundo ao evento "apenas B ocorre" e o terceiro ao evento "apenas C ocorre".

   (b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

   (c) "Pelo menos dois" significa, neste caso, 2 ou 3 ocorrem, ou seja:

$$\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup (A \cap B \cap C)$$

   o primeiro termo corresponde à ocorrência de A e B, mas não de C; o segundo termo, ocorrência de B e C, mas não de A; o terceiro, ocorrência de A e C, mas não de B e o quarto termo corresponde à ocorrência dos 3 simultanemente.

   (d) No máximo 2 significa ou nenhum ocorre, ou ocorre apenas um, ou ocorrem apenas 2. No caso de 3 eventos, a única possibilidade excluída é a ocorrência dos três simultanemente, ou seja, $\overline{A \cap B \cap C}$.

5.2 Capítulo 2

1. Vamos denotar por C o evento "balancete de custo" e por O o evento "balancete de orçamento". Temos:
$$\#O = 4 \qquad \#C = 3 \qquad \#\Omega = 7$$
Logo,
$$\Pr(O) = \frac{4}{7} \qquad \Pr(C) = \frac{2}{7}$$

2. O espaço amostral para o experimento do sorteio seqüencial de 2 balancetes sem reposição é
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_1, O_2O_3, O_2O_4, \\ O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4, O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3, \\ O_1C_1, O_1C_2, O_1C_3, O_2C_1, O_2C_2, O_2C_3, \\ O_3C_1, O_3C_2, O_3C_3, O_4C_1, O_4C_2, O_4C_3, \\ C_1O_1, C_1O_2, C_1O_3, C_1O_4, C_2O_1, C_2O_2, \\ C_2O_3, C_2O_4, C_3O_1, C_3O_2, C_3O_3, C_3O_4, \\ C_1C_2, C_1C_3, C_2C_1, C_2C_3, C_3C_1, C_3C_2 \end{array} \right\}$$
Logo, $\#\Omega = 42$.

(i) Seja $A =$ "dois balancetes de custos". Então,
$$A = \{C_1C_2, C_1C_3, C_2C_1, C_2C_3, C_3C_1, C_3C_2\}$$
e $\Pr(A) = \dfrac{6}{42} = \dfrac{1}{7}$.

(ii) Seja $B =$ "dois balancetes de orçamento". Então,
$$B = \left\{ \begin{array}{c} O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_1, O_2O_3, O_2O_4, \\ O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4, O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3 \end{array} \right\}$$
e $\Pr(B) = \dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$.

(iii) Seja $C =$ "dois balancetes de tipos diferentes". Então
$$C = \left\{ \begin{array}{c} O_1C_1, O_1C_2, O_1C_3, O_2C_1, O_2C_2, O_2C_3, \\ O_3C_1, O_3C_2, O_3C_3, O_4C_1, O_4C_2, O_4C_3, \\ C_1O_1, C_1O_2, C_1O_3, C_1O_4, C_2O_1, C_2O_2, \\ C_2O_3, C_2O_4, C_3O_1, C_3O_2, C_3O_3, C_3O_4, \end{array} \right\}$$
e $\Pr(C) = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$.

3. Para a primeira posição, temos os 3 livros; escolhido o primeiro livro, sobram 2 para a segunda posição. Finalmente, escolhidos os livros para as duas primeiras posições, sobra 1 livro para a última posição. Pelo princípio da multiplicação, o número total de escolhas é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

4. Para a primeira posição, temos os 5 algarismos; para a segunda, temos 4, já que os algarismos têm que ser diferentes. Continuando, para a terceira, temos 3; para a quarta, temos 2 e para a última resta apenas 1. Logo, exitesm $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ números com 5 algarismos distintos escolhidos dentre 1, 3, 5, 7, 9.

   Se os algarismos 1 e 3 têm que estar juntos, podemos pensar neles como um bloco, que deve ser colocado junto com os algarismos 5, 7, 9. Logo, para organizar esses 4 blocos, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. Por sua vez, o bloco dos algarismos 1 e 3 pode ser organizado de 2 maneiras diferentes. Logo, o número total de possibilidades é $2 \times 24 = 48$.

5. Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

   (a) Como há 6 letras diferentes, o número de anagramas é $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

   (b) Fixada a letra T na primeira posição, as outras 5 podem ser organizadas de $5! = 120$ maneiras diferentes.

   (c) Fixadas a primeira e a última letras, as outras 4 podem ser organizadas de $4! = 24$ maneiras.

   (d) Temos 4 vogais. Esse bloco pode ser organizado de $4! = 24$ maneiras. Para juntar esse bloco com as 2 consoantes, há $3! = 6$ maneiras diferentes. Logo, o número total é $24 \times 6 = 144$.

6. Há um total de 10 pessoas; logo, o número total de filas é $10! = 3.628.800$

   Se João e Maria estão juntos, podemos pensar neles como uma só pessoa. Logo, há 9! maneiras de organizar a fila. Mas existem 2 maneiras de organizar João e Maria. Logo, o número total de filas em que João e Maria estão juntos é $9! \times 2 = 725.760$. Pela lei do complementar, o número de filas em que João e Maria estão separados é $3.628.800 - 725.760 = 2.903.040$.

7. Para abrir o cofre, ela tem que achar a permurração correta dos 3 algarismos do segredo. O número total de possibilidades é $P_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

8. Os números pares com esses algarismos têm que terminar com 6 ou 8. Fixada a última posição (6 ou 8), sobram 2 posições para serem preenchidas com os 5 algarismos restantes. Logo, o número total é $2 \times P_5^2 = 2 \times \dfrac{5!}{3!} = 40$.

9. O número total de comissões é $\dbinom{8}{3} \times \dbinom{5}{3} = 560$, conforme visto no Exemplo 2.18. O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

   Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é $560 - 126 = 434$

10. O número total de possibilidades para se extraírem 3 cartas sem reposição é $\#\Omega = \dbinom{52}{3}$.

(a) Existem 13 cartas de espadas. Logo, há $\binom{13}{3}$ maneiras diferentes de se extraírem 3 cartas de espadas. Assim, se E_3 é o evento "3 cartas de espadas", temos que

$$
\begin{aligned}
\Pr(E_3) &= \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{13!}{3!10!} \times \frac{3!49!}{52!} \\
&= \frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50} \\
&= \frac{1716}{132600} = 0,01294
\end{aligned}
$$

(b) O mesmo cálculo feito em (a) vale para os 4 naipes. Sejam E_3, C_3, P_3, O_3 os eventos "3 cartas de espadas", "3 cartas de copas", "3 cartas de paus" e "3 cartas de ouro", respectivamente. Então, $\Pr(E_3) = \Pr(C_3) = \Pr(C_3) = \Pr(O_3)$. Logo, a probabilidade do evento $I_3 =$ "4 cartas do mesmo naipe" é

$$
\begin{aligned}
\Pr(I_3) &= \Pr(E_3 \cup C_3 \cup P_3 \cup O_3) = \\
&= \Pr(E_3) + \Pr(C_3) + \Pr(C_3) + \Pr(O_3) \\
&= 4 \times \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = 4 \times 0,01294
\end{aligned}
$$

(c) Note que o evento $D =$ "três cartas de naipes diferentes" não é o complementar de I_3, pois, por exemplo, a seqüência CCE pertence ao complementar de I_3, mas não pertence ao evento D. Para calcular a probabilidade do evento D, note que para a primeira carta, temos 52 possibilidades − qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos 2 naipes anteriores; logo, sobram 26. Pelo princípio da multiplicação, o número total de possibilidades é $52 \times 39 \times 26$ e a probabilidade pedida é

$$
\Pr(D) = \frac{52 \times 39 \times 26}{\binom{52}{3}}
$$

11. $\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6300$

12. Cada jogador tem $n-1$ oponentes. Logo, existem $n(n-1)$ maneiras de selecionar 2 participantes. Como a ordem dos 2 selecionados não importa, o número total de partidas é $\frac{n(n-1)}{2}$. Logo

$$
\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} &= 780 \Rightarrow n^2 - n - 1560 = 0 \Rightarrow \\
n &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6240}}{2} \Rightarrow n = \begin{cases} 40 \\ -39 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como o número de participantes tem que ser positivo, a solução é $n = 40$ participantes.

13. .

    (a) Se o menor número é 7, isso significa que uma das bolas é a de número 7 e as outras 2 têm número de 8 a 15 e a ordem não importa. A probabilidade de sortear a bola 7 é $\frac{1}{15}$. Se a bola 7 é sorteada, sobram 14, das quais 8 têm número maior que 7. A probabilidade de sortear duas com número maior que 7, nesse caso, é $\frac{8}{14} \times \frac{7}{13}$. Como a ordem não importa, existem $\binom{3}{1}$ maneiras de sortear essas 3 bolas. Logo, a solução é

    $$7, > 7, > 7 \text{ em qualquer ordem} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{4}{65}$$

    (b) $7, < 7, < 7$ em qualquer ordem $\rightarrow \frac{1}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{3}{91}$

14. Aqui vamos usar a Propriedade 7 que dá a probabilidade da união de 2 eventos e também a propriedade distributiva da interseção e união, vista no capítulo anterior.

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr\left[(A \cup B) \cup C\right] = \\
&= \Pr(A \cup B) + \Pr(C) - \Pr\left[(A \cup B) \cap C\right] = \\
&= \left[\Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)\right] + \Pr(C) \\
&\quad - \Pr\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right] \\
&= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) + \Pr(C) - \\
&\quad - \left\{\Pr(A \cap C) + \Pr(B \cap C) - \Pr\left[(A \cap C) \cap (B \cap C)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Mas $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) \\
&\quad - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\
&\quad + \Pr(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Note que como todos os termos estão divididos por $\#\Omega$, esse resultado vale também para a cardinalidade da união de três eventos $-$ basta substituir Pr por $\#$.

15. Existem 10 letras nessa palavra, das quais 5 são vogais e 5 são consoantes.

    (a) Para a consoante da primeira posição, há 5 possibilidades e para a vogal da última posição há 5 possibilidades. Excluídas as 2 escolhidas, sobram 8 letras, que podem ser permutadas de 8! maneiras. Logo, o número total de anagramas começando com consoante e terminando com vogal é $5 \times 5 \times 8! = 1.008.000$

    (b) Podemos pensar no bloco SIM como uma letra, que deve ser permutada com as 7 letras restantes. Então, há $8! = 40.320$ anagramas com as letras SIM juntas nessa ordem.

(c) Existem 3! maneiras de organizar as letras SIM; logo, o número total de anagramas com as letras SIM juntas em qualquer ordem é $8! \times 3! = 241.920$

(d) Vamos denotar por S_1 o evento "letra S na primeira posição" e por I_2 o evento "letra I na segunda posição". O evento $S_1 \cap I_2$ corresponde aos anagramas que começam com as letras SI nessa ordem: há $8! = 40.320$ desses anagramas.

(e) O problema pede $\#(S_1 \cup I_2)$ que, pela Propriedade 7, é

$$\#(S_1 \cup I_2) = \#(S_1) + \#(I_2) - \#(S_1 \cap I_2)$$

O evento S_1 corresponde aos anagramas que começam com S e o evento I_2 aos anagramas com I na segunda posição. Então, $\#S_1 = \#I_2 = 9!$. Logo,

$$\begin{aligned} \#(S_1 \cup I_2) &= \#S_1 + \#I_2 - \#S_1 \cap I_2 \\ &= 9! + 9! - 8! = 685.440 \end{aligned}$$

(f) Continuando com a nossa notação, seja M_3 o evento "letra M na terceira posição". O problema pede $\#(S_1 \cup I_2 \cup M_3)$. Pelo exercício anterior,

$$\begin{aligned} \#(S_1 \cup I_2 \cup M_3) &= \#S_1 + \#I_2 + \#M_3 \\ &\quad -\#\left(S_1 \cap I_2\right) - \#\left(S_1 \cap M_3\right) - \#\left(I_2 \cap M_3\right) \\ &\quad +\#\left(S_1 \cap I_2 \cap M_3\right) \\ &= 9! + 9! + 9! - 8! - 8! - 8! + 7! \\ &= 3 \times 9! - 3 \times 8! + 7! \\ &= 1.088.640 - 120.960 + 5040 \\ &= 972.720 \end{aligned}$$

16. A Propriedade 6 nos diz que $\Pr(A \cap \overline{B}) = \Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$

(a) Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer A e B, mas não C. Usando a propriedade associativa, temos que

$$\Pr(A \cap B \cap \overline{C}) = \Pr\left[(A \cap B) \cap \overline{C}\right] = \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)$$

Veja a **Figura 5.2**. Toda a parte sombreada corresponde à ocorrência de A e B, ou seja, $A \cap B$. A parte sombreada mais escura é o evento de interesse: $A \cap B \cap \overline{C}$ e a parte sombreada mais clara é $A \cap B \cap C$.

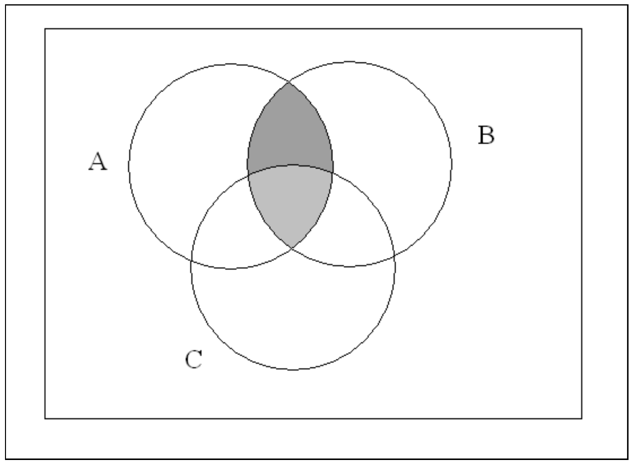

Figura 5.2: Ocorrência oso eventos A e B mas não de C - Exercício 2.16-a

(b) Esse resultado trata da probabilidade de ocorrer apenas A, dentre os três eventos. Usando as propriedades comutativa e associativa, mais o resultado da letra (a), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= \Pr(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) = \Pr\left[\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \overline{B}\right] \\
&= \Pr(A \cap \overline{C}) - \Pr(A \cap \overline{C} \cap B) \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B \cap \overline{C}) \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - [\Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap B \cap C)] \\
&= \Pr(A) - \Pr(A \cap C) - \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Veja a **Figura 5.3**. Toda a parte sombreada corresponde ao evento A. A parte sombreada mais escura corresponde ao evento de interesse: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Note que se subtrairmos $A \cap B$ e $A \cap C$, estaremos subtraindo duas vezes $A \cap B \cap C$; aí, temos que somar $A \cap B \cap C$ uma vez para compensar.

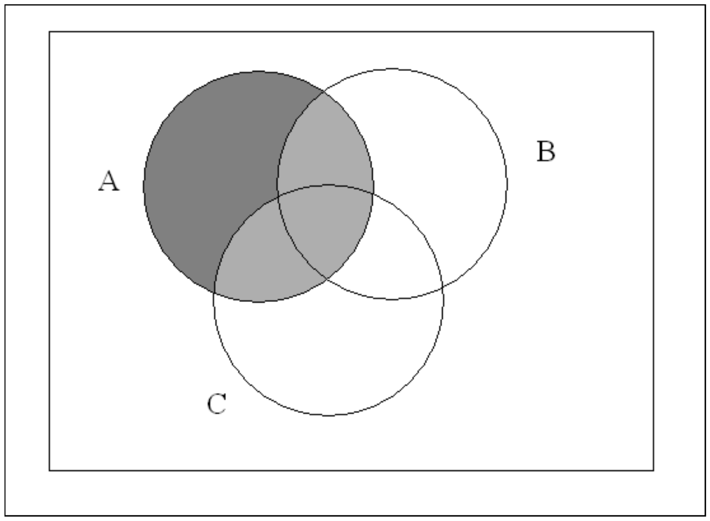

Figura 5.3: Ocorrência de A, mas não de B e C - Exercício 2.16-b

17. $\#A = 470 \qquad \#B = 420 \qquad \#C = 315$

    $\#(A \cap B) = 110 \qquad \#(A \cap C) = 220 \qquad \#(B \cap C) = 140$

    $\#(A \cap B \cap C) = 75 \qquad \#\Omega = 1000$

    Veja a **Figura 5.4**

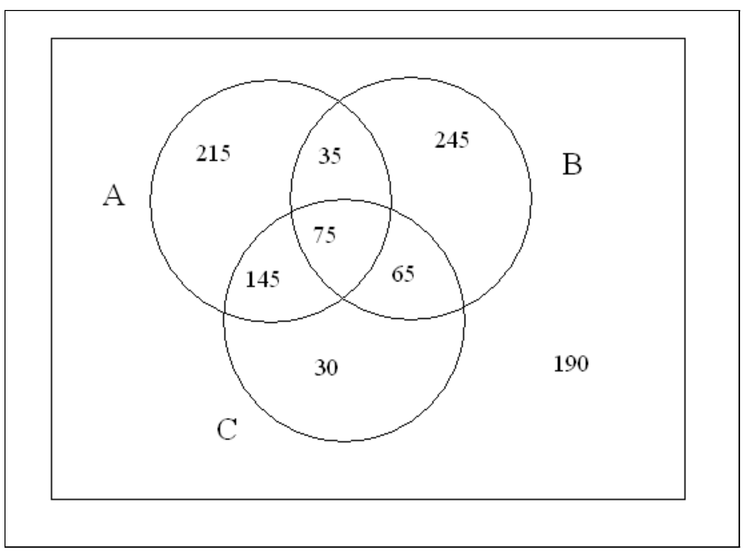

Figura 5.4: Solução do exercício sobre os 3 jornais

(a) Note que o evento $A \cup B \cup C$ corresponde ao evento "família sorteada assina pelo menos um jornal". O problema pede "não assina qualquer jornal", ou seja, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Pelas leis de De Morgan e do evento complementar, temos que

$$\Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C)$$

Mas,

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B \cup C) &= \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) \\ &\quad + \Pr(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

e, para o problema,

$$\begin{aligned}\Pr\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) &= 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = \\ &= 1 - 0,47 - 0,42 - 0,315 + 0,11 + 0,22 + 0,140 - 0,075 = 0,19\end{aligned}$$

(b) O problema pede

$$\Pr\left[\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right]$$

Como os três eventos são mutuamente exclusivos, temos que

$$\begin{aligned}&\Pr\left[\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\right] \\ =\ &\Pr\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) + \Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)\end{aligned}$$

O primeiro termo se refere àqueles que assinam apenas o jornal A, o segundo termo, apenas o jornal B e o terceito termo, apenas o jornal C. Usando a letra (b) do exercício anterior, temos que

$$\Pr\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \tag{5.1}$$
$$= 0,47 - 0,11 - 0,22 + 0,075 = 0,215 \tag{5.2}$$

Analogamente, prova-se que

$$\Pr\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \tag{5.3}$$
$$= 0,42 - 0,11 - 0,14 + 0,075 = 0,245 \tag{5.4}$$

$$\Pr\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) = \Pr(C) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C) \tag{5.5}$$
$$= 0,315 - 0,22 - 0,14 + 0,075 = 0,03 \tag{5.6}$$

e a probabilidade pedida é $0,215 + 0,245 + 0,03 = 0,49$

(c) Como são 3 jornais, uma família pode assinar 3, 2, 1, ou 0. Nesse caso, o evento $F =$ "assinar pelo menos 2" é o complementar do evento "assinar no máximo 1" e esse, por sua vez, é a união dos eventos "assinar nenhum" e "assinar exatamente 1", cujas probabilidades foram calculadas nas letras (a) e (b). Logo,

$$\begin{aligned}&\Pr(F) = \Pr\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) + \Pr(A \cap \overline{B} \cap C) + \Pr\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \Pr(A \cap B \cap C) \\ =\ &1 - 0,19 - 0,49 = 0,32\end{aligned}$$

18. Sejam os eventos $S =$ "ter curso superior", $C =$ "ser casado", $D =$ "estar desempregado". O problema dá que

$$\begin{aligned}\Pr(S) &= 0,22 \qquad \Pr(C) = 0,16 \qquad \Pr(D) = 0,10 \\ \Pr\left(S \cap C \cap \overline{D}\right) &= 0,05 \qquad \Pr(S \cap D) = 0,06 \qquad \Pr(S \cap C \cap D) = 0,02\end{aligned}$$

(a) O problema pede $\Pr(S \cap C)$. Temos que

$$\Pr(S \cap C) = \Pr(S \cap C \cap D) + \Pr\left(S \cap C \cap \overline{D}\right) = 0,02 + 0,05 = 0,07$$

(b) O problema pede $\Pr\left[(S \cap C) \cup \overline{D}\right]$. Temos que

$$\Pr\left[(S \cap C) \cup \overline{D}\right] = \Pr(S \cap C) + \Pr\left(\overline{D}\right) - \Pr\left(S \cap C \cap \overline{D}\right) = 0,07 + 0,90 - 0,05 = 0,92$$

(c) O problema pede $\Pr(S \cup D)$. Temos que

$$\Pr(S \cup D) = \Pr(S) + \Pr(D) - \Pr(S \cap D) = 0,22 + 0,10 - 0,06 = 0,26$$

19. Sejam os eventos $B =$ "artigo bom", $M =$ "artigo com defeitos menores" e $G =$ "artigo com defeitos graves". Pelos dados do problema, temos que

$$\Pr(B) = \frac{10}{16} \qquad \Pr(M) = \frac{4}{16} \qquad \Pr(G) = \frac{2}{16}$$

(a) $\Pr(\text{não ter defeito}) = \Pr(B) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

(b) $\Pr(\text{não ter defeito grave}) = \Pr\left(\overline{G}\right) = 1 - \Pr(G) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

(c) $\Pr(\text{ser perfeito ou ter defeito grave}) = \Pr(B \cup G) = \Pr(B) + \Pr(G) = \frac{10}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{4}$. Note que esses são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $\Pr(B \cap G) = 0$.

20. O número total de formas de distribuir as 4 bolsas é

$$\#\Omega = \binom{30}{4}$$

(a) Uma bolsa para um aluno do 1º ciclo significa que 3 bolsas vão para alunos do 2º ciclo. Existem $\binom{12}{1}$ maneiras de escolher o aluno do 1º ciclo e $\binom{18}{3}$ maneiras de escolher os 3 do 2º ciclo. Logo, pelo princípio fundamental da multiplicação,

$$\begin{aligned}
\Pr(1 \text{ do } 1^{\text{o}}) &= \frac{\binom{12}{1}\binom{18}{3}}{\binom{30}{4}} = \frac{12 \times \dfrac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2}}{\dfrac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2}} \\
&= \frac{1088}{3045} = 0,357307
\end{aligned}$$

(b) $\Pr(\text{nenhum } 2^{\text{o}}) + \Pr(1 \text{ do } 2^{\text{o}}) = \dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} + \dfrac{\binom{12}{3}\binom{18}{1}}{\binom{30}{4}} = \dfrac{4455}{27405} = 0,162562$

(c) $\Pr(\text{pelo menos 1 de cada ciclo}) = 1 - \Pr(\text{nenhum do } 1^{\text{o}}) - \Pr(\text{nenhum do } 2^{\text{o}}) =$

$$= 1 - \frac{\binom{18}{4}}{\binom{30}{4}} - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{30}{4}} = 0,870279$$

5.3 Capítulo 3

1. $\Pr(B) = 1 - \Pr(\overline{B}) = \frac{3}{4}$. Se A e B fossem mutuamente exclusivos, teríamos que ter $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$. Logo, A e B têm que ter interseção.

2. Do enunciado, concluímos que $A \cap B = \varnothing$. Logo,

   (a) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) = 0,5 + 0,4 = 0,9$

   (b) $\Pr(B \cap \overline{A}) = \Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0,4 - 0 = 0,4$

3. .

   (a) Seja $A =$ "faces iguais". Então $A = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$ e $\Pr(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   (b) Seja $B =$ "soma das faces menor ou igual a 4". Então

   $$B = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1)\}$$

   e $\Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. O problema pede

   $$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

   (c) Seja $C =$ "5 em pelo menos um dos dados". Então

   $$C = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$$

   e $\Pr C) = \frac{11}{36}$.

   (d) Seja $D =$ "faces diferentes". Então $\Pr(D) = \Pr(\overline{A}) = \frac{5}{6}$. O problema pede

   $$\Pr(C|D) = \frac{\Pr(C \cap D)}{\Pr(D)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$$

4. Vamos definir os eventos $P =$ "campanha pronta antes do prazo" e $A =$ "diretoria aprova campanha". O problema dá que

   $$\Pr(P) = 0,6 \qquad \Pr(A) = 0,5 \qquad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

   (a) $\Pr(A \cup P) = \Pr(A) + \Pr(P) - \Pr(A \cap P) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$

   (b) $\Pr(\overline{A} \cap \overline{P}) = \Pr(\overline{A \cup P}) = 1 - \Pr(A \cup P) = 0,2$

   (c) $\Pr(A|P) = \dfrac{\Pr(A \cap P)}{\Pr(P)} = \dfrac{0,3}{0,6} = 0,5.$

5. .

   (a) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$

(b) $\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) = \frac{5}{12}$

(c) $\Pr(A|\overline{B}) = \dfrac{\Pr(A \cap \overline{B})}{\Pr(\overline{B})} = \dfrac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{8}$

6. Vamos definir os seguintes eventos: T = "aluno utiliza transporte público" e B = "aluno come no bandejão". O problema dá que

$$\Pr(\overline{T}) = 0,10 \qquad \Pr(B|T) = 0,65$$

O problema pede

$$\Pr(T \cap B) = \Pr(T)\Pr(B|T) = 0,9 \times 0,65 = 0,585$$

7. Vamos definir os seguintes eventos: C ="comédia"; R = "romance"; P = "policial"; M = "masculino"; F = "feminino".

(a) $\Pr(P \cap F) = \frac{62}{835}$

(b) $\Pr(C) = \frac{136+102}{835} = \frac{238}{835}$

(c) $\Pr(M \cup R) = \Pr(M) + \Pr(R) - \Pr(R \cap M) = \frac{(136+92+248)+(92+195)-92}{835} = \frac{671}{835}$

(d) $\Pr(P|M) = \frac{\Pr(P \cap M)}{\Pr(M)} = \frac{248}{136+92+248} = \frac{248}{476}$

8. Vamos definir os eventos P_i = "bola preta na extração i"; A_i = "bola amarela na extração i", $i = 1, 2, 3$.

Seja M = "3 bolas de mesma cor". Então

$$\begin{aligned}
\Pr(M) &= \Pr(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \\
&= \frac{4}{33} + \frac{2}{33} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}
\end{aligned}$$

9. Para que A e B sejam independentes temos que ter $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = \frac{p}{5}$. Mas

$$\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{5} + p - \frac{p}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4p}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow p = \frac{3}{8}$$

10. Os eventos são P = "campanha pronta antes do prazo" e A = "diretoria aprova campanha" e o problema dá que

$$\Pr(P) = 0,6 \qquad \Pr(A) = 0,5 \qquad \Pr(A \cap P) = 0,3$$

Como $\Pr(A \cap P) = \Pr(P)\Pr(A)$, segue que P e A são independentes.

11. .

(a) A e B independentes $\Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) > 0 \therefore A$ e B não são mutuamente exclusivos.

(b) A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow \Pr(A|B) = 0 \neq \Pr(A) > 0 \therefore A$ e B não são independentes

Esse exercício é importante, no sentido em que ele diferencia os conceitos de eventos disjuntos e eventos independentes, que muitas vezes são confundidos pelos alunos.

12. .

(a) $\Pr(A \cap B) = 0,21 \neq 0 \therefore A$ e B não são mutuamente exclusivos

(b) $\Pr(A \cap B) = 0,21 = \Pr(A)\Pr(B) \therefore A$ e B são independentes

(c) A e B independentes $\Rightarrow A$ e $\overline{B}$ são independentes (ver Exemplo 3.10)

(d) A e $\overline{B}$ independentes $\Rightarrow A$ e $\overline{B}$ não são mutuamente exclusivos (ver Exercício 3.11)

(e) A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos $\Rightarrow A$ e $\overline{A}$ não são independentes (ver Exercício 3.11)

13. Vamos definir os eventos $A =$ "face 6 em pelo menos um dado" e $B =$ "faces iguais". Então

$$\begin{aligned} A &= \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\} \\ B &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

(a) $\Pr(A) = \frac{11}{36}$

(b) $\Pr(A|\overline{B}) = \dfrac{\Pr(A \cap \overline{B})}{\Pr(\overline{B})} = \dfrac{\Pr(A) - \Pr(A \cap B)}{1 - \Pr(B)} = \dfrac{\frac{11}{36} - \frac{1}{36}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{3} \neq \Pr(A)$

(c) $\Pr(A|\overline{B}) \neq \Pr(A) \Rightarrow A$ e $\overline{B}$ não são independentes

14. Seja $A_i =$ "lâmpada i acende", $i = 1, 2, 3$

(a) Seja $P =$ "pelo menos uma lâmpada acende". Então

$$\overline{P} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$

Logo,

$$\Pr(\overline{P}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Pr(P) = \frac{5}{6}$$

(b) O problema pede

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

15. Vamos definir os seguintes eventos: $B =$ "inflação abaixo de 3%"; $M =$ "inflação entre 3% e 4%", $A =$ "inflação acima de 4%" e $E =$ "200.000 empregos". O problema dá o seguinte:

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= 0,20 \qquad \Pr(M) = 0,45 \qquad \Pr(A) = 0,35 \\ \Pr(E|B) &= 0,6 \qquad \Pr(E|M) = 0,3 \qquad \Pr(E|A) = 0 \end{aligned}$$

Figura 5.5: Partição do espaço amostral para o problema da inflação espanhola

16. Veja a **Figura 5.6**, onde temos os seguintes eventos: V = "bola vermelha"; B = "bola branca"; A = "bola azul"; I = "urna I"; II = "urna II"

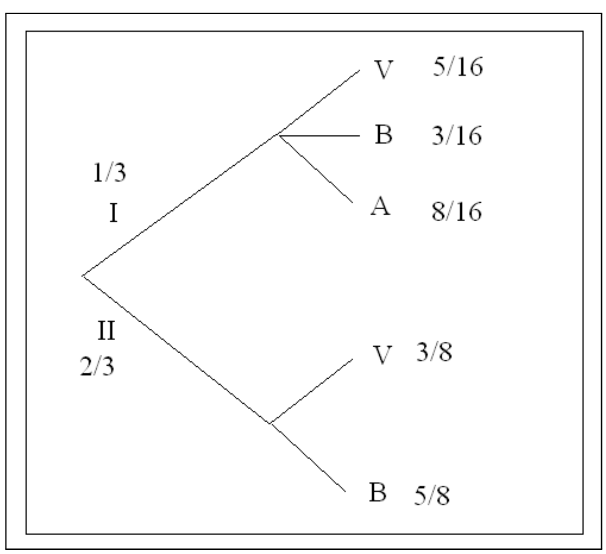

Figura 5.6: Diagrama de árvore para o Exercício 3.16

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(V) &= \Pr(V \cap I) + \Pr(V \cap II) \\
&= \Pr(I)\Pr(V|I) + \Pr(II)\Pr(V|II) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \\
&= \frac{5}{48} + \frac{12}{48} = \frac{17}{48}
\end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr(B \cap I) + \Pr(B \cap II) \\
&= \Pr(I)\Pr(B|I) + \Pr(II)\Pr(B|II) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{48} + \frac{20}{48} = \frac{23}{48}
\end{aligned}$$

(c) Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cap I) + \Pr(A \cap II) \\
&= \Pr(I)\Pr(A|I) + \Pr(II)\Pr(A|II) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{8}{16} + \frac{2}{3} \times 0 \\
&= \frac{8}{48}
\end{aligned}$$

Note que $\Pr(V) + \Pr(B) + \Pr(A) = 1$.

17. Veja a **Figura 5.7**, onde temos os seguintes eventos: E = "Joana escreve a carta"; C = "correio não perde a carta"; T = "carteiro entrega a carta".

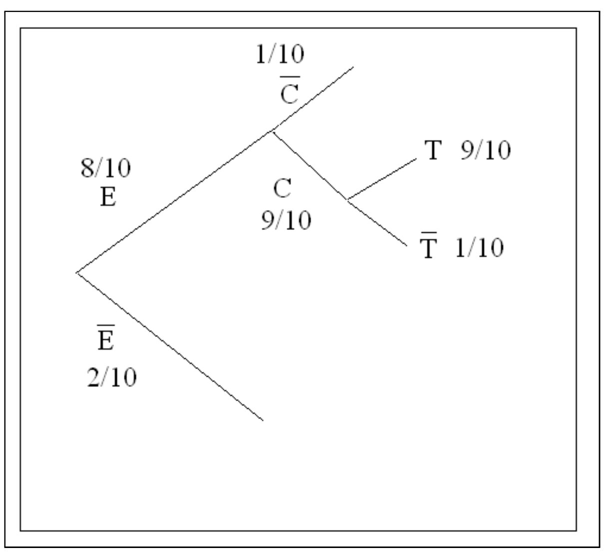

Figura 5.7: Diagrama de árvore para o Exercício 3.17

(a) Vamos definir o evento $R =$ "Camila recebe a carta". O problema pede $\Pr(\overline{R})$. Mas

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{R}) &= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E \cap \overline{C}) + \Pr(E \cap C \cap \overline{T}) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \\
&= 0,2 + 0,8 \times 0,1 + 0,8 \times 0,9 \times 0,1 \\
&= 0,2 + 0,08 + 0,072 = 0,352
\end{aligned}$$

18. Temos que $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - \Pr(A \cap B)$

(a) $\Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$

(b) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - 0,4p \Rightarrow 0,6p = 0,3 \Rightarrow p = 0,5$

19. Pelos dados do problema temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{A}|B) &= 1 \Rightarrow \frac{\Pr(\overline{A} \cap B)}{\Pr(B)} = 1 \Rightarrow \\
\frac{\Pr(B) - \Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= 1 \Rightarrow \\
1 - \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= 1 \Rightarrow \\
\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} &= 0 \Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0
\end{aligned}$$

Logo, A e B são mutuamente exclusivos e, portanto, não podem ser independentes.

20. O problema dá os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}
B &\subset A \\
\Pr(A \cap C) &= \Pr(A)\Pr(C) \\
\Pr(B \cap C) &= 0 \\
\Pr(\overline{A \cup C}) &= 0,48 \\
\Pr(B \cup C) &= 0,3 \\
\Pr(C) &= 2\Pr(B)
\end{aligned}$$

e pede $\Pr(A \cup B)$. Como $B \subset A$, então $A \cup B = A \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(B \cup C) &= 0,3 \Rightarrow \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) = 0,3 \Rightarrow \\
\Pr(B) + 2\Pr(B) - 0 &= 0,3 \Rightarrow \Pr(B) = 0,1
\end{aligned}$$

Logo, $\Pr(C) = 0,2$.

$$\Pr(\overline{A \cup C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A} \cap \overline{C}) = 0,48$$

Como A e C são independentes, segue que $\overline{A}$ e $\overline{C}$ também o são. Logo,

$$\Pr(\overline{A})\Pr(\overline{C}) = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A}) \times 0,8 = 0,48 \Rightarrow \Pr(\overline{A}) = 0,6$$

e, portanto

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) = 0,4$$

21. .

(a) Veja a **Figura 5.8**.

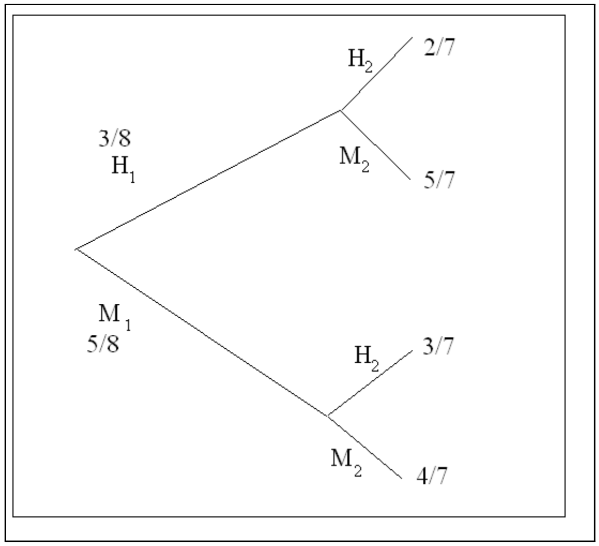

Figura 5.8: Diagrama de árvore para o Exercício 3.21

(b) Temos que

$$
\begin{aligned}
\Pr(M_1) &= \frac{5}{8} \\
\Pr(M_2) &= \Pr(M_1 \cap M_2) + \Pr(H_1 \cap M_2) \\
&= \Pr(M_1)\Pr(M_2|M_1) + \Pr(H_1)\Pr(M_2|H_1) \\
&= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

(c) Temos que

$$\Pr(M_2|M_1) = \frac{4}{7} \neq \Pr(M_2)$$

Logo, M_1 e M_2 não são independentes.

22. Sejam os eventos $A =$ "Alberto ganha"; $B =$ "Bosco ganha"; $C =$ "Carlos ganha". Como eles são os únicos competidores, temos que

$$
\begin{aligned}
\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) &= 1 \Rightarrow \\
2\Pr(C) + 2\Pr(C) + \Pr(C) &= 1 \Rightarrow \\
\Pr(C) &= \frac{1}{5} \Rightarrow \\
\Pr(A) &= \Pr(B) = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

(a) O problema pede

$$\Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C)$$

Note que pode haver empate entre Bosco e Carlos. No entanto, é razoável supor que os eventos B e C sejam independentes, uma vez que numa competição honesta, nenhum competidor interfere no desempenho dos outros. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(B \cup C) &= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B \cap C) \\
&= \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(B)\Pr(C) \\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{13}{25}
\end{aligned}$$

(b) Foi necessário fazer a hipótese de independência, que é razoável, conforme explicado no item anterior.

23. Sejam os eventos $M =$ "Maria resolve o problema" e $P =$ "Pedro resolve o problema". Sejam $\overline{M}$ e $\overline{P}$ os respectivos complementares. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(M) &= 0,8 \qquad \Pr(P) = 0,7 \\
\Pr\left(\overline{M}\right) &= 0,2 \qquad \Pr\left(\overline{P}\right) = 0,3
\end{aligned}$$

(a) O problema pede $\Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right)$. Pela hipótese de independência (sabemos que, se A e B são eventos independentes, então os seus complementares também o são) temos que

$$\Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

(b) Seja $R =$ "problema resolvido". O problema pede $\Pr(R) = \Pr(P \cup M)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(R) &= \Pr(P \cup M) = 1 - \Pr\left(\overline{P \cup M}\right) = 1 - \Pr\left(\overline{P} \cap \overline{M}\right) = \\
&= 1 - 0,06 = 0,94
\end{aligned}$$

(c) Seja $P_1 =$ "apenas Pedro resolve". A questão pede $\Pr(P_1|R)$. Temos que

$$\Pr(P_1|R) = \frac{\Pr\left(P \cap \overline{M}\right)}{\Pr(R)} = \frac{0,7 \times 0,2}{0,94} = 0,1489$$

24. Vamos esquematizar o espaço amostral e os eventos A e B da seguinte forma:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	B		B		B	
	2	A	AB	A	AB	A	AB
	3	B		B		B	
	4	A	AB	A	AB	A	AB
	5	B		B		B	
	6	A	AB	A	AB	A	AB

Em cada cela colocamos a letra do evento que acontece na respectiva combinação dos dados. Então, $\Pr(A) = \Pr(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ e $\Pr(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \Pr(A) \times \Pr(B)$. Logo, A e B são independentes.

25. Veja a **Figura 5.9**, onde temos os eventos $S =$ "sabe a resposta" e $A =$ "acerta a resposta".

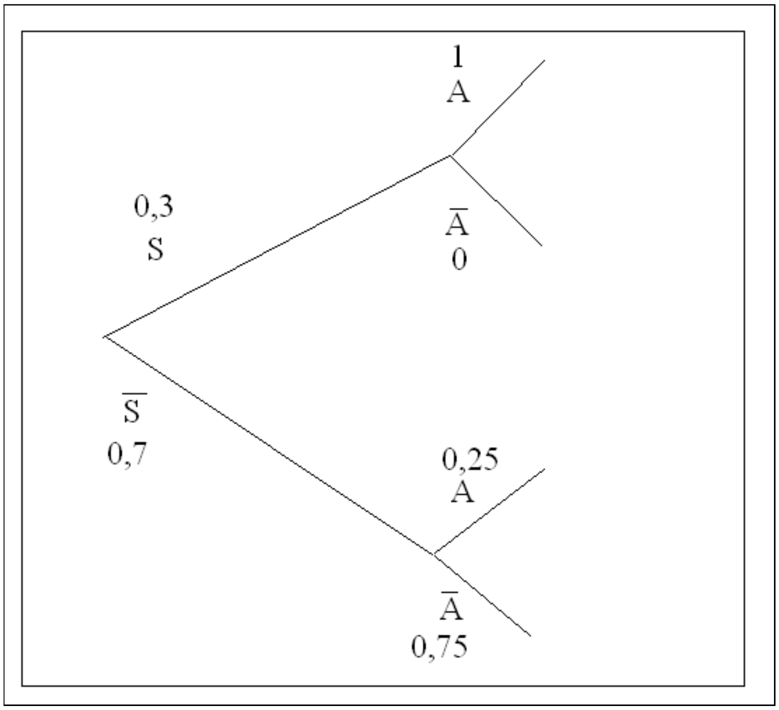

Figura 5.9: Diagrama de árvore para o Exercício 3.25

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\overline{S}) = 0,7$$

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode "chutar" entre as 4 alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \qquad\qquad \Pr(A|\overline{S}) = 0,25$$

O problema pede $\Pr(A)$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \overline{S}) \\
&= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\overline{S}) \times \Pr(A|\overline{S}) \\
&= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475
\end{aligned}$$

5.4 Capítulo 4

1. Os eventos de interesse no problema são:

$$\begin{aligned}
C &= \text{"escolher o curso em questão"} \\
P &= \text{"passar no concurso da ANPAD"}
\end{aligned}$$

Os dados do problema informam que

$$\begin{aligned}\Pr(P|C) &= 0,80\\ \Pr(C) &= 0,15\\ \Pr(P) &= 0,63\end{aligned}$$

Veja a **Figura 5.10**.

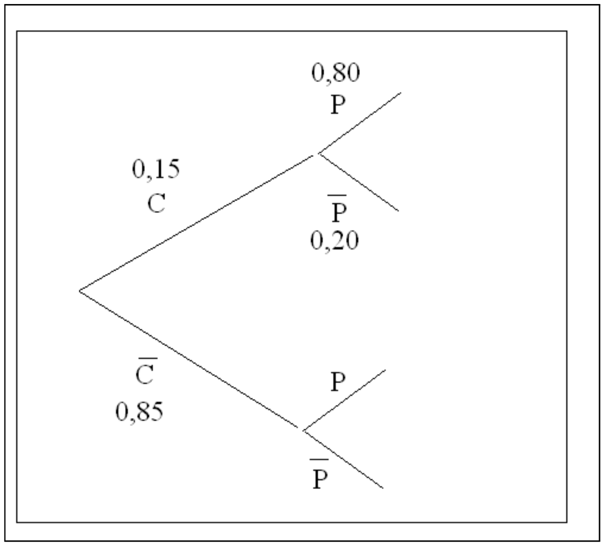

Figura 5.10: Espaço amostral para o experimento do Exercício 4.1

(a) Temos que

$$\begin{aligned}\Pr(P) &= \Pr(P\cap C)+\Pr(P\cap \overline{C}) \Rightarrow\\ 0,63 &= \Pr(C)\Pr(P|C)+\Pr(\overline{C})\Pr(P|\overline{C}) \Rightarrow\\ 0,63 &= 0,15\times 0,80+0,85\times \Pr(P|\overline{C}) \Rightarrow\\ \Pr(P|\overline{C}) &= \frac{0,63-0,15\times 0,80}{0,85} \Rightarrow\\ \Pr(P|\overline{C}) &= 0,60\end{aligned}$$

(b) O problema pede $\Pr(C|P)$.

$$\begin{aligned}\Pr(C|P) &= \frac{\Pr(C\cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\Pr(C)\Pr(P|C)}{\Pr(P)}\\ &= \frac{0,15\times 0,80}{0,63} = 0,1905\end{aligned}$$

2. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}D &= \text{pessoa tem a doença} \Rightarrow \overline{D} = \text{pessoa não tem a doença}\\ V &= \text{diagnóstico indica doença} \Rightarrow \overline{V} = \text{diagnóstico não indica doença}\end{aligned}$$

Se a pessoa tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico identificou a doença. Se a pessoa não tem a doença, diagnóstico correto significa que o médico não identificou a doença. Dessa forma, os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
\Pr(D) &= 0,08 \Rightarrow \Pr(\overline{D}) = 0,92 \\
\Pr(V \mid D) &= 0,95 \Rightarrow \Pr(\overline{V} \mid D) = 0,05 \\
\Pr(V \mid \overline{D}) &= 0,02 \Rightarrow \Pr(\overline{V} \mid \overline{D}) = 0,98
\end{aligned}$$

A probabilidade a priori dada é $\Pr(D)$ e, por conseqüência, $\Pr(\overline{D})$. Então, para aplicar o teorema de Bayes, a partição do espaço amostral tem que ser definida por esses eventos, embora V e $\overline{V}$ também definam uma partição. Queremos calcular $\Pr(D \mid V)$. Por definição temos que:

$$\Pr(D \mid V) = \frac{\Pr(D \cap V)}{\Pr(V)}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\Pr(V) &= \Pr(V \cap D) + \Pr\left(V \cap \overline{D}\right) \\
&= \Pr(V \mid D) \times \Pr(D) + \Pr\left(V \mid \overline{D}\right) \times \Pr(\overline{D}) = \\
&= 0,95 \times 0,08 + 0,02 \times 0,92 \\
&= 0,076 + 0,0184 = 0,0944
\end{aligned}$$

e

$$\Pr(V \cap D) = \Pr(V \mid D) \times \Pr(D) = 0,95 \times 0,08 = 0,076$$

Logo,

$$\Pr(D \mid V) = \frac{0,076}{0,0944} = 0,8051$$

3. Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que $\#\Omega = 4 \times 3 = 12$.

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(1,2), (1,3), (1,4)\} \\
B_2 &= \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \\
B_3 &= \{(3,1), (3,2), (3,4)\} \\
B_4 &= \{(4,1), (4,2), (4,3)\} \\
\Pr(B_i) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

Note que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ e como esses eventos são mutuamente exclusivos dois a dois, eles formam uma partição de Ω. Temos que

$$A \cap B_1 = \{(1,4)\} \qquad A \cap B_2 = \{(2,3)\} \qquad A \cap B_3 = \{(3,2)\} \qquad A \cap B_4 = \{(4,1)\}$$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{12} \qquad i = 1,2,3,4$$

Logo,

$$\Pr(A \mid B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} = \Pr(A) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Note que os eventos A e $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ são independentes!

4. Pelo princípio fundamental da multiplicação, temos que $\#\Omega = 4 \times 4 = 16$.

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \Pr(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\} \\ B_2 &= \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)\} \\ B_3 &= \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\} \\ B_4 &= \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \\ \Pr(B_i) &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Então,

$$A \cap B_1 = \{(1,4)\} \qquad A \cap B_2 = \{(2,3)\} \qquad A \cap B_3 = \{(3,2)\} \qquad A \cap B_4 = \{(4,1)\}$$

$$\Pr(A \cap B_i) = \frac{1}{16} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Logo,

$$\Pr(A \mid B_i) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(A) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \Pr(B_i) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Como antes, os eventos A e $B_i, i = 1, 2, 3, 4$ são independentes!

5. .

   (a) Pelo princípio fundamental da multiplicação, há $2^7 = 128$ possibilidades de respostas para as 7 questões. Logo, a probabilidade de acertar todas é $\frac{1}{128}$.

   (b) Haver mais Verdadeiros do que Falsos significa que pode ter 4 Verdadeiros (e, portanto, 3 Falsos), 5 Verdadeiros (e, portanto, 2 Falsos), 6 Verdadeiros (e, portanto, 1 Falso) e 7 Verdadeiros (e, portanto, nenhum Falso).

   4 verdadeiros: existem $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$ maneiras;

   5 verdadeiros: existem $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$ maneiras;

6 verdadeiros: existem $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7 \times 6!}{6! \times 1} = 7$ maneiras;

7 verdadeiros: existem $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ maneira.

Assim, se denotamos por V o evento "ter mais verdadeiros que falsos", resulta que

$$\begin{aligned} \Pr(V) &= \frac{\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}}{128} \\ &= \frac{35 + 21 + 7 + 1}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se A é o evento "acertar todas as questões", então $A \subset V$ e o problema pede

$$\Pr(A|V) = \frac{\Pr(A \cap V)}{\Pr(V)} = \frac{\Pr(A)}{\Pr(V)} = \frac{\frac{1}{128}}{\frac{64}{128}} = \frac{1}{64}$$

6. No Exercício 3.15 do capítulo anterior, definimos os seguintes eventos: $B =$ "inflação abaixo de 3%"; $M =$ "inflação entre 3% e 4%", $A =$ "inflação acima de 4%" e $E =$ "200.000 empregos". O problema dá o seguinte:

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= 0,20 \qquad \Pr(M) = 0,45 \qquad \Pr(A) = 0,35 \\ \Pr(E|B) &= 0,6 \qquad \Pr(E|M) = 0,3 \qquad \Pr(E|A) = 0 \end{aligned}$$

Lá calculamos também que

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= \Pr(B)\Pr(E|B) + \Pr(M)\Pr(E|M) + \Pr(A)\Pr(E|A) \\ &= 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 \\ &= 0,255 \end{aligned}$$

O problema agora pede $\Pr(B|E)$:

$$\begin{aligned} \Pr(B|E) &= \frac{\Pr(B \cap E)}{\Pr(E)} = \frac{\Pr(B)\Pr(E|B)}{\Pr(E)} \\ &= \frac{0,20 \times 0,6}{0,255} = 0,4706 \end{aligned}$$

7. Veja a **Figura 5.11**, onde temos os seguintes eventos: $E =$ "Joana escreve a carta"; $C =$ "correio não perde a carta"; $T =$ "carteiro entrega a carta".

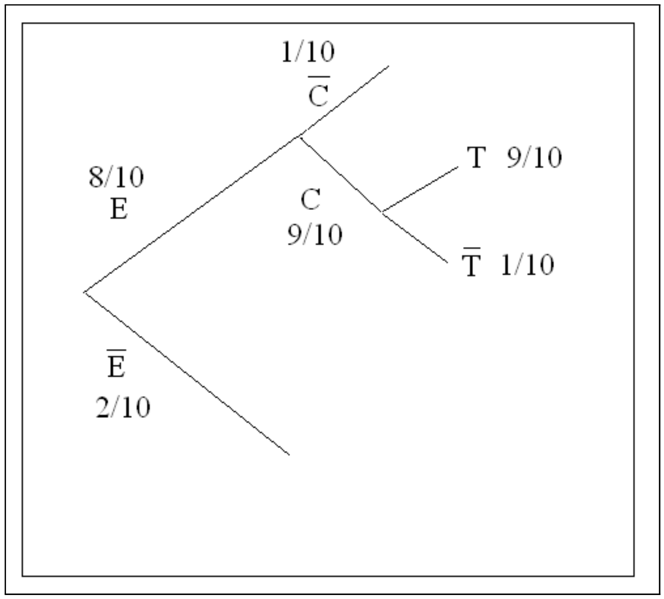

Figura 5.11: Diagrama de árvore para o Exercício 4.7

No Exercício 3.17 do capítulo anterior, definimos o evento $R =$ "Camila recebe a carta" e calculamos

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{R}) &= \Pr(\overline{E}) + \Pr(E \cap \overline{C}) + \Pr(E \cap C \cap \overline{T}) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 0,352
\end{aligned}$$

O problema agora pede $\Pr(\overline{E}|\overline{R})$:

$$\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\Pr(\overline{R} \cap \overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \frac{\Pr(\overline{E})\Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})}$$

O evento $\overline{R}|\overline{E}$ significa "Camila não receber a carta, dado que Joana não a escreveu". Ora, se Joana não escreveu, é claro que Camila não recebe a carta! Logo, esse evento é o evento certo e, portanto, $\Pr(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\Pr(\overline{E})\Pr(\overline{R}|\overline{E})}{\Pr(\overline{R})} = \frac{0,2 \times 1}{0,352} = 0,5682$

8. Veja a **Figura 5.12**, onde temos os eventos $S =$ "sabe a resposta" e $A =$ "acerta a resposta".

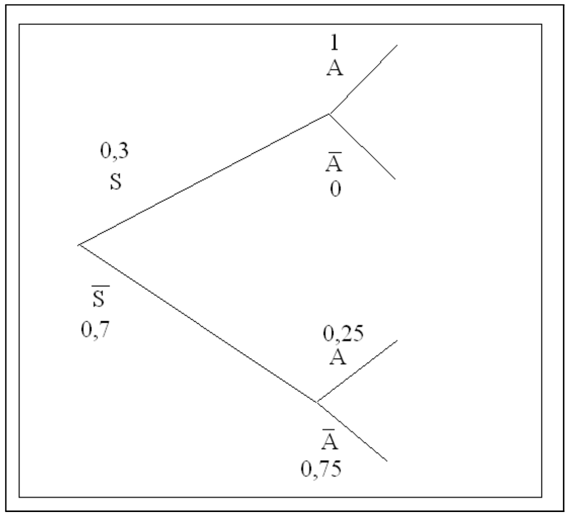

Figura 5.12: Diagrama de árvore para o Exercício 4.8

É dado que

$$\Pr(S) = 0,3 \Rightarrow \Pr(\overline{S}) = 0,7$$

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode "chutar" entre as 4 alternativas. Logo,

$$\Pr(A|S) = 1 \qquad \Pr(A|\overline{S}) = 0,25$$

No Exercício **??** do capítulo anterior, calculamos

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr(A \cap S) + \Pr(A \cap \overline{S}) \\
&= \Pr(S) \times \Pr(A|S) + \Pr(\overline{S}) \times \Pr(A|\overline{S}) \\
&= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475
\end{aligned}$$

O problema agora pede $\Pr(\overline{S}|A)$:

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{S}|A) &= \frac{\Pr(\overline{S} \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(\overline{S}) \Pr(A|\overline{S})}{\Pr(A)} \\
&= \frac{0,7 \times 0,25}{0,475} = 0,3684
\end{aligned}$$

9. Seja A_i = "face i no primeiro lançamento", $i = 1, \ldots, 6$ e seja B_i = "face i no segundo lançamento", $i = 1, \ldots 6$. Como os lançamentos são independentes, os eventos A_i e B_i são independentes. Logo, a probabilidade de cada um dos 36 pares (A_i, B_i) do espaço amostral é dada pelo produto das probabilidades individuais, ou seja,

$$\Pr(A_i, B_i) = \Pr(A_i) \Pr(B_i)$$

Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}
E &= \text{"dado equilibrado"} \Rightarrow \overline{E} = \text{"dado viciado"} \\
D &= \text{"dois 1s"} \Rightarrow \overline{D} = \text{"no máximo um 1"}
\end{aligned}$$

A escolha dos dados é aleatória. Logo,

$$\Pr(E) = \Pr(\overline{E}) = \frac{1}{2}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\Pr(D|E) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \Pr(\overline{D}|E) = \frac{35}{36} \\
\Pr(D|\overline{E}) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Pr(\overline{D}|\overline{E}) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

O problema pede $\Pr(\overline{E}|D)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{E}|D) &= \frac{\Pr(\overline{E} \cap D)}{\Pr(D)} \\
&= \frac{\Pr(\overline{E} \cap D)}{\Pr(D \cap \overline{E}) + \Pr(D \cap E)} \\
&= \frac{\Pr(\overline{E}) \Pr(D|\overline{E})}{\Pr(\overline{E}) \Pr(D|\overline{E}) + \Pr(E) \Pr(D|E)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{9+1}{72}} = \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

10. São feitas 3 extrações. Como só estamos interessados em bola azul na terceira extração, podemos pensar que, em cada extração, ocorreu bola azul ou não. Veja a **Figura 5.13**. Dessa forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_3) &= \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) + \Pr(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \\
&= \Pr(A_1) \Pr(A_2|A_1) \Pr(A_3|A_2 \cap A_1) + \\
&\quad \Pr(A_1) \Pr(\overline{A}_2|A_1) \Pr(A_3|\overline{A}_2 \cap A_1) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1) \Pr(A_2|\overline{A}_1) \Pr(A_3|A_2 \cap \overline{A}_1) + \\
&\quad \Pr(\overline{A}_1) \Pr(\overline{A}_2|A_1) \Pr(A_3|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1) \\
&= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{15} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{15} + \\
&\quad \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{15} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{15} \\
&= \frac{440}{1980} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

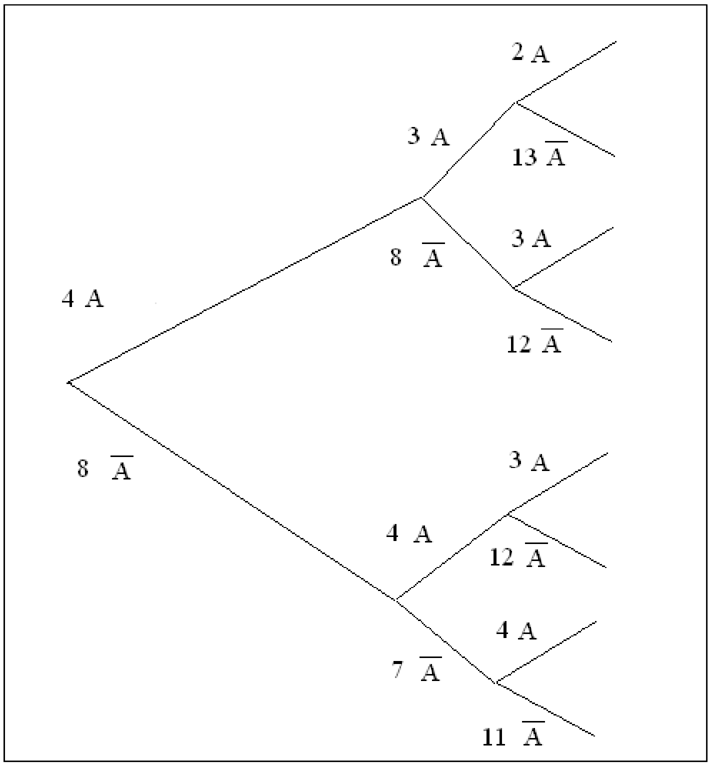

Figura 5.13: Solução do Exercício 4.10

11. São feitas 3 extrações. Como antes, vamos denotar por V_i o evento "bola de cor vermelha na extração i" e por B_i o evento "bola de cor branca na extração i". Queremos $\Pr(V_3)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(V_3) &= \Pr(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(V_1 \cap P_2 \cap V_3) + \\
&\quad \Pr(P_1 \cap V_2 \cap V_3) + \Pr(P_1 \cap P_2 \cap V_3) \\
&= \Pr(V_1) \times \Pr(V_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap V_2) + \\
&\quad \Pr(V_1) \times \Pr(P_2|V_1) \times \Pr(V_3|V_1 \cap P_2) + \\
&\quad \Pr(P_1) \times \Pr(V_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap V_2) + \\
&\quad \Pr(P_1) \times \Pr(P_2|P_1) \times \Pr(V_3|P_1 \cap P_2)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0,537 &= \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{9-x}{10} + \\
&\quad \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{10-x}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9-x}{10} \\
0,537 &= 0,037 \times (10-x) + 0,063 \times (9-x) \\
0,537 &= 0,937 - 0,1x \\
0,1x &= 0,4 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

12. Vamos definir os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} D_i &= \text{“distribuidor } i\text{”}, i = 1, 2, 3 \\ A &= \text{“atraso”} \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Pr(D_1) &= 0,70 \qquad \Pr(D_2) = \Pr(D_3) = 0,15 \\ \Pr(A) &= 0,06 \\ \Pr(A|D_1) &= \frac{1}{2}\Pr(A|D_2) \\ \Pr(A|D_2) &= 2\Pr(A|D_3) \end{aligned}$$

Fazendo $p = \Pr(A|D_1)$ temos que

$$\begin{aligned} \Pr(A|D_2) &= 2p \\ \Pr(A|D_3) &= \frac{1}{2}\Pr(A|D_2) = p \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap D_1) + \Pr(A \cap D_2) + \Pr(A \cap D_3) \\ &= \Pr(D_1)\Pr(A|D_1) + \Pr(D_2)\Pr(A|D_2) + \Pr(D_3)\Pr(A|D_3) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 0,06 &= 0,7p + 0,15 \times 2p + 0,15p \Rightarrow \\ 0,06 &= 1,15p \Rightarrow p = 0,052174 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Pr(A|D_1) = 0,052174 \qquad \Pr(A|D_2) = 0,104348 \qquad \Pr(A|D_3) = 0,052174$$

13. Considere os eventos I = “aluno tem boa formação em informática” e C_i = “aluno do curso i”, $i = 1, 2$. O problema dá as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} \Pr(I|C_1) &= 0,60 \\ \Pr(I|C_2) &= 0,40 \\ \Pr(I) &= 0,44 \end{aligned}$$

e pede $\Pr(C_1)$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \Pr(I) &= \Pr(C_1 \cap I) + \Pr(C_2 \cap I) \\ &= \Pr(C_1) \times \Pr(I|C_1) + \Pr(C_2) \times \Pr(I|C_2) = \\ &= \Pr(C_1) \times 0,6 + \Pr(C_2) \times 0,4 \\ &= 0,6 \times \Pr(C_1) + 0,4 \times [1 - \Pr(C_1)] \end{aligned}$$

Logo,

$$0,44 = 0,4 + 0,2 \times \Pr(C_1) \Rightarrow 0,2 \times \Pr(C_1) = 0,04 \Rightarrow \Pr(C_1) = 0,2$$

14. Vamos indicar por F_i o evento "funcionário i" e por E o evento "balancete com erro". Antes do treinamento temos:

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\
&= \Pr(F_1)\Pr(E|F_1) + \Pr(F_2)\Pr(E|F_2) + \Pr(F_3)\Pr(E|F_3) \\
&= 0,5 \times 0,05 + 0,25 \times 0,06 + 0,25 \times 0,08 \\
&= 0,06
\end{aligned}$$

Depois do treinamento, passamos a ter

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= 0,03 \\
\Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) \\
\Pr(E|F_1) &= 2\Pr(E|F_3)
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $p = \Pr(E|F_3)$

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr(F_1 \cap E) + \Pr(F_2 \cap E) + \Pr(F_3 \cap E) \\
&= \Pr(F_1)\Pr(E|F_1) + \Pr(F_2)\Pr(E|F_2) + \Pr(F_3)\Pr(E|F_3) \Rightarrow \\
0,03 &= 0,5 \times 2p + 0,25 \times p + 0,25 \times p \Rightarrow \\
0,03 &= 1,5p \Rightarrow p = 0,02
\end{aligned}$$

ou seja, depois do treinamento as probabilidades de erro de cada funcionário passam a ser

$$\begin{aligned}
\Pr(E|F_1) &= 0,04 \text{ (tempo integral)} \\
\Pr(E|F_2) &= \Pr(E|F_3) = 0,02 \text{ (tempo parcial)}
\end{aligned}$$

15. Sejam os eventos $E =$ "ganhar parte elétrica" e $H =$ "ganhar parte hidráulica". Temos que

$$\Pr(E) = \frac{1}{2} \qquad \Pr(H|E) = \frac{3}{4} \qquad \Pr\left(H|\overline{E}\right) = \frac{1}{3}$$

Resulta que

$$\Pr\left(\overline{E}\right) = \frac{1}{2} \qquad \Pr\left(\overline{H}|E\right) = \frac{1}{4} \qquad \Pr\left(\overline{H}|\overline{E}\right) = \frac{2}{3}$$

(a)

$$\Pr(E \cap H) = \Pr(H|E)\Pr(E) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\overline{E} \cap H\right) + \Pr\left(E \cap \overline{H}\right) &= \Pr\left(H|\overline{E}\right) \times \Pr\left(\overline{E}\right) + \Pr\left(\overline{H}|E\right) \times \Pr(E) = \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

(c)

$$\Pr\left(\overline{E} \cap \overline{H}\right) = \Pr\left(\overline{H}|\overline{E}\right) \times \Pr\left(\overline{E}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$