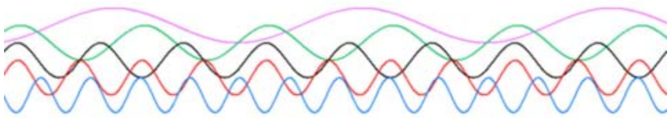
Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS



Análises de sistemas no domínio da frequência

Profª Ninoska Bojorge

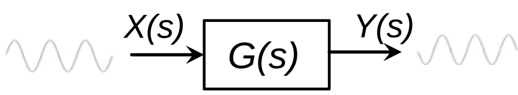
Resposta de Frequência

CONCEITO: Consiste de um método gráfico-analítico que permite a observação da resposta de um sistema, para um sinal de entrada senoidal, cuja frequência é variada dentro de uma faixa pré-estabelecida.

A resposta em regime permanente de um sistema linear e invariante no tempo sujeito a um entrada senoidal será senoidal na mesma frequência, com amplitude e fase diferentes.

Função de Transferência Senoidal: *G(jω)*

1) MÓDULO : $|G(jw)| = \left|\dfrac{Y(jw)}{X(jw)}\right|$



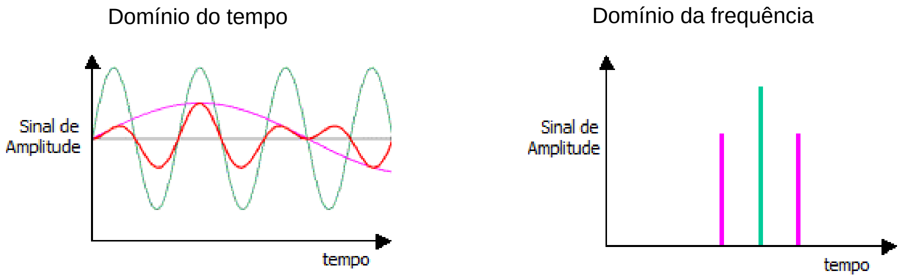
2) FASE : $\angle G(jw) = \angle \dfrac{Y(jw)}{X(jw)}$

Domínio frequência

A representação do domínio do tempo dá a amplitude do sinal no instante de tempo escolhido.

No domínio da frequência, separa-se conceitualmente as senóides que formam o sinal.

Domínio do tempo versus domínio da frequência



Domínio frequência

como já vimos, a transformada de Laplace: $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$

A Transformadas de Fourier: $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$

Na verdade as Transformadas de Laplace e as Transformadas de Fourier são representações que estão muito relacionadas uma com a outra. Em muitos casos, se substituirmos ‘s’ por ‘$j\omega$’, isto é, fazendo-se ‘s’ ser um número complexo com parte real *nula* e parte imaginária ‘ω’,

$$s = 0 + j\omega = j\omega$$

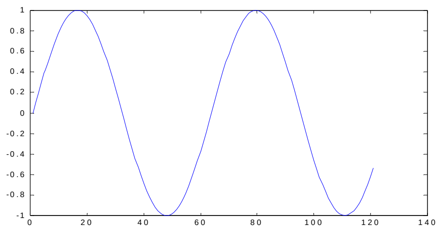
obtemos a Transformadas de Fourier a partir da Transformada de Laplace

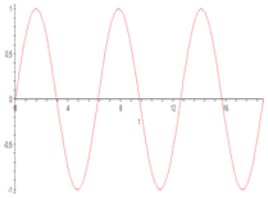
$$X(s) = X(0+j\omega) = X(j\omega),\ Y(s) = Y(0+j\omega) = Y(j\omega), \text{ etc.}$$

Sinais sinodais

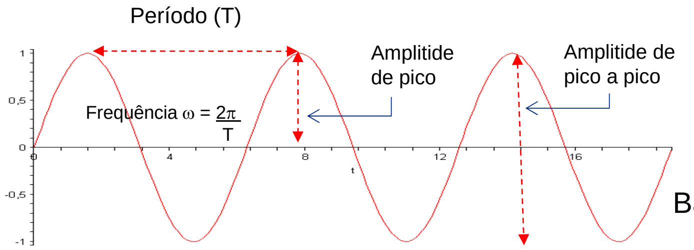
$\circ = A \operatorname{sen}(\omega t)$

$\omega = 2\pi / T$ rad/tempo





Alta frequência: mudança rápida

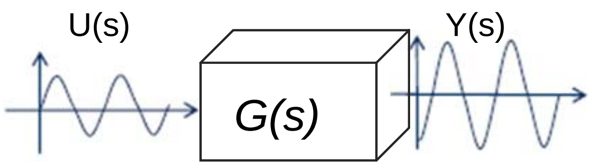


Baixa frequência: mudança lenta

ω: número de oscilações em um segundo, no SI $\rightarrow$ hertz;
1 rad/s = 0,159154943274 Hz.

Entradas senoidais

Métodos de resposta em frequência: Varia-se a frequência do sinal de entrada dentro de um certo intervalo e estuda-se a resposta resultante.



Objetivo: Estudar a resposta de um sistema lineal estável ante mudanças tipo senoidal na entrada

Nos centraremos no estado estacionário

Seja: $Y(s) = G(s)\,U(s)$

e: $U(s) = \dfrac{\omega A}{s^2 + \omega^2}$ $\quad G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

Resposta em frequência

logo:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b(s)}{D(s)}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} = \frac{a(s-j\omega)D(s)+\bar{a}(s+j\omega)D(s)+b(s)(s+j\omega)(s-j\omega)}{(s+j\omega)(s-j\omega)D(s)}$$

$$N(s)\omega A = a(s-j\omega)D(s)+\bar{a}(s+j\omega)D(s)+b(s)(s+j\omega)(s-j\omega)$$

$$para\ \ s = j\omega \qquad N(j\omega)\omega A = \bar{a}2j\omega D(j\omega) \qquad \bar{a} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

$$para\ \ s = -j\omega \qquad N(-j\omega)\omega A = -a2j\omega D(-j\omega) \qquad a = \frac{-AG(-j\omega)}{2j}$$

Resposta em frequência

Assim, aplicando a transformada inversa, temos:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{a}{s+j\omega}\right] + L^{-1}\left[\frac{\bar{a}}{s-j\omega}\right] + L^{-1}\left[\frac{b(s)}{D(s)}\right]$$

$$y(t) = \frac{-AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{j\omega t} + \ldots\ldots$$

se D(s) é estável, no estado estacionário :

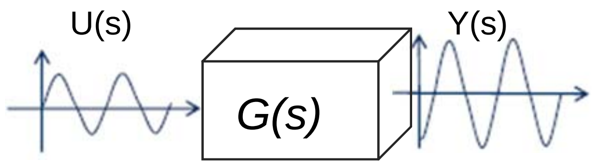
$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{-AG(-j\omega)}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{AG(j\omega)}{2j}e^{j\omega t}$$

$$y_\infty = \frac{-A|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}e^{-j\omega t} + \frac{A|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}e^{j\omega t}$$

$$y_\infty = A|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} = A|G(j\omega)|sen(\omega t+\phi) \qquad \phi = \arg(G(j\omega))$$

Resposta em frequência

Resposta em Frequência: Resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal



$$u(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$y_\infty = A\left|G(j\omega)\right| sen(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \arg(G(j\omega))$$

A resposta oscila com a mesma frequência ω, mas atenuada por um fator $|G(j\omega)|$ e desfasada um ângulo $\phi = \arg(G(j\omega))$, que dependem de ω.

Resposta em frequência

os valores da atenuação $|G(j\omega)|$ e o desfase $\phi = \arg(G(j\omega))$ que introduz um sistema lineal dependem só de G(s) e podem representar-se em função da frequência ω em diversos tipos de diagramas, ao substituir a variável s por $j\omega$ em G(s) e calcular o módulo e argumento do complexo $G(j\omega)$ resultante.

$$G(s) = \frac{(2s+1)}{s^2+3s+2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{(2j\omega+1)}{j^2\omega^2+3j\omega+2} = \frac{(2j\omega+1)}{2-\omega^2+3j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{\left(2-\omega^2\right)^2+9\omega^2}} \qquad \arg(G(j\omega)) = arctg\,2\omega - arctg\,\frac{3\omega}{2-\omega^2}$$

Resposta em frequência

<u>Forma Gráfica</u>:

- ➢ Diagramas de Bode ou gráficos logarítmicos
- ➢ Diagrama de Nyquist ou diagrama polar
- ➢ Diagrama do Logaritmo do módulo versus ângulo de fase (carta de Nichols)

Diagrama de Bode

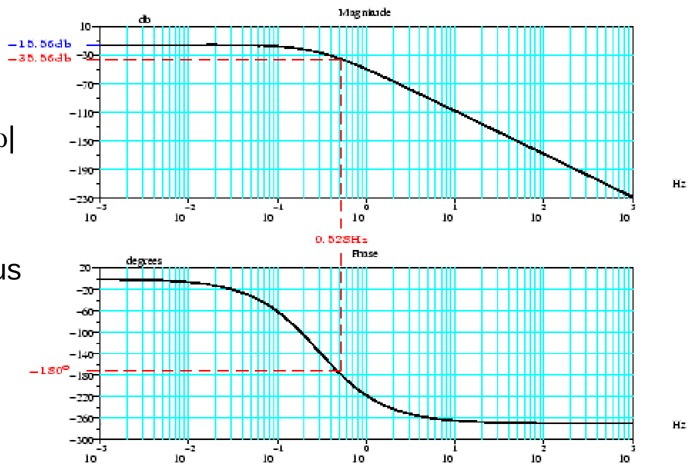
Os **diagramas de Bode** (de *módulo* e de *fase*) são uma das formas de caracterizar sinais no domínio da frequência.

Hendrik Wade Bode (1905-1982),

$|G(j\omega)|$ em dB

$dB = 20\log|G(j\omega)|$

$\arg(G(j\omega))$ em graus



A função de transferência senoidal de um sistema representada graficamente:

- Módulo versus Frequência e
- Ângulo de Fase versus Frequência.

Construção dos Diagramas de Bode

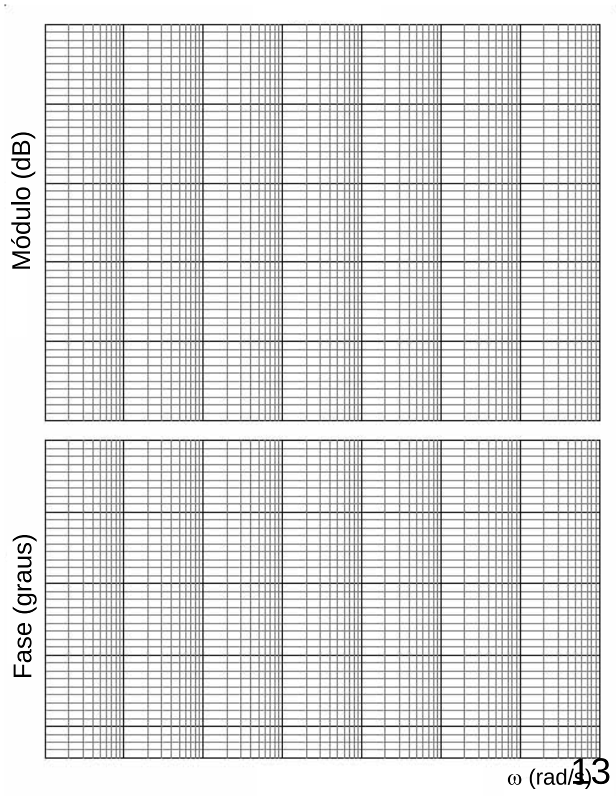
Uso de Escalas Logarítmicas: simplificam a sua construção, manipulação e interpretação.

Traçado das Curvas:

- corresponde a plotar a curva G(s) para s = jw.
- Como é uma curva de variável complexa, deve-se apresentar conjuntamente as duas curvas: parte real e imaginária ou Módulo e Fase (forma usada).

Abscissas → eixo ω (frequência em rad/s)
→ escala logarítmica

Ordenadas → eixo M (módulo em dB) →
M = 20 log |G(jω)|
→ ∠ G = Fase (em grau)



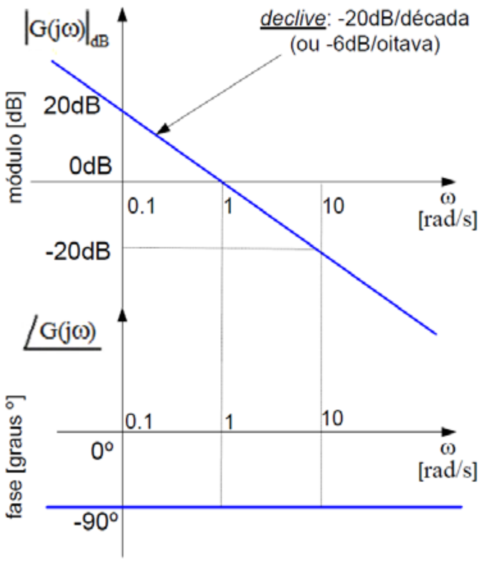
Construção dos Diagramas de Bode

$$G(j\omega)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right|$$

$$= -20 \cdot \log_{10} \omega \quad [dB]$$

- 1 década = variação correspondente a $\omega_2 = 10 \times \omega_1$, assim:

ω	$\lvert G(j \cdot \omega)\rvert_{dB}$
1/10	20
1	0
10	-20
100	-40



- 1 oitava = variação correspondente a $\omega_2 = 2 \times \omega_1$ (uma oitava corresponde à: o dobro /ou a metade, dependendo do sentido (para direita ou para esquerda / aumentando-se / ou diminuindo-se).

Construção dos Diagramas de Bode

Módulo (M) = 20 log |G(jω)| [deciBel = dB]

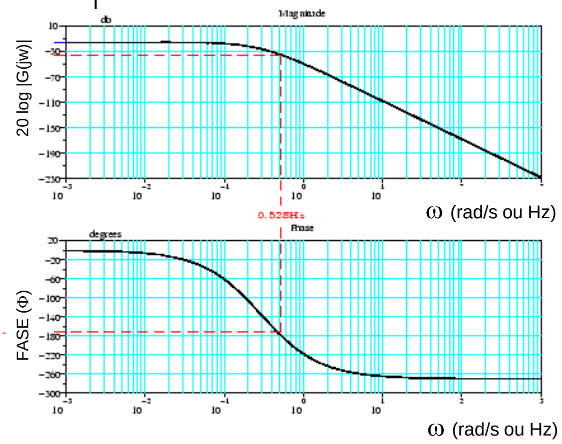
Fase (Φ) = ∠ G(jω)   [graus = °]

Freqüência (rad/s)	abs(G(jw))	20*log (abs(G(jw))) [dB]	∠ G(jw), [radianos]	∠ G(jw), [graus]
0.1				
0.2				
0.4				
0.8				
1				
2				
4				
8				
10				

Lembrando que:

180° ----- π rad

a ----- 1 rad



Construção dos Diagramas de Bode

Resumindo:

Os diagramas de Bode são construídos para funções de transferên-cia G(jw) e são dois:

diagramas de Bode de ***módulo***

e

diagramas de Bode de ***fase***.

Os diagramas de Bode de ***módulo*** são gráficos de

|G(jω)| em dB   (|G(jω)|$_{dB}$)

x

ω (com escala logarítmica)

Indica o ganho relativo espectral.

Os diagramas de Bode de ***fase*** são gráficos de

G(jω) em graus

x

ω (com escala logarítmica)

Indica desfasamento harmônico do sinal de saída em relação ao de entrada.

Construção dos Diagramas de Bode

Matematicamente:

- Definição: Função de transferência

$$G(s) = \frac{K[(s+x_1+jw_1)(s+x_3+jw_3)\ldots]}{[(s+x_2+jw_2)(s+x_4+jw_4)\ldots]}$$

- Curva de Módulo ou Amplitude: $|G(jw)|_{dB}$

$$M = 20\log K + 20\log\left[\sqrt{(x_1^2+(w_1+w)^2}\right] + \ldots - 20\log\left[\sqrt{(x_2^2+(w_2+w)^2}\right] - \ldots$$

Obs.: Zeros tem contribuição positiva e pólos tem contribuição negativa na curva de módulo.

- Curva de Fase: Φ (jw)

$$\phi = arctg\left[(w_1+w)/\ x_1\right] + \ldots - arc\,tg[(w_2+w)/\ x_2\,] - \ldots$$

Obs.: Zeros tem contribuição positiva e os pólos tem contribuição negativa na curva de fase.

Características de Resposta de Frequência de Processos de 1ª Ordem

Para $x(t) = A\sin\omega t,\ y_\ell(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$ qdo t $\rightarrow \infty$ onde

$$\hat{A} = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad \varphi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

1. O sinal de saída é uma senoidal que tem a mesma freqüência, ω, com o sinal de entrada, $x(t) = A\sin\omega t$.
2. A amplitude do sinal de saída, $\hat{A}$, é uma função da freqüência ω e de uma amplitude, A:

$$\hat{A} = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (1)$$

3. A saída tem uma mudança de fase, φ, em relação à entrada. A quantidade de deslocamento de fase depende ω.

Dividindo ambos lados da eq (1) pela amplitude do sinal de entrada *A* resulta o razão de amplitude, AR (*amplitude ratio*)

$$\mathrm{AR} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (2)$$

que podem, por sua vez, ser dividido pelo ganho de processo para produzir a *razão de amplitude normalizada* ($\mathrm{AR_N}$)

$$\mathrm{AR_N} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (3)$$

Para $x(t) = A\sin\omega t,\ y_\ell(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \varphi)$ qdo t $\to \infty$ onde

$$\hat{A} = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad \varphi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

1. O sinal de saída é uma senoidal que tem a mesma freqüência, ω, com o sinal de entrada, *x(t)* =*A*sin*ωt*.
2. A amplitude do sinal de saída, $\hat{A}$, é uma função da freqüência ω e de uma amplitude, *A*:

$$\hat{A} = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (1)$$

3. A saída tem uma mudança de fase, φ, em relação à entrada. A quantidade de deslocamento de fase depende ω.

Dividindo ambos lados da eq (1) pela amplitude do sinal de entrada *A* resulta o razão de amplitude, AR (*amplitude ratio*)

$$\mathrm{AR} = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (2)$$

que podem, por sua vez, ser dividido pelo ganho de processo para produzir a *razão de amplitude normalizada* (AR_N)

$$\mathrm{AR_N} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \qquad (3)$$

Método *Shortcut* para encontrar a Resposta de Frequência

Este método consiste em:

Etapa 1. Substituir $s = j\omega$ em $G(s)$ para o obter $G(j\omega)$. .

Etapa 2. Racionalizar $G(j\omega)$; Deseja-se expressar na forma.

$$G(j\omega)=R + jI$$

onde *R* e *I* são funções de ω. Simplificando $G(j\omega)$ multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

Etapa 3. A razão de amplitude e a fase de *G(s)* são dadas por :

Lembrar ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{AR} &= \sqrt{R^2+I^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}(I/R) \end{aligned}}$$

Exemplo 1

Encontrar a resposta de frequência de um sistema de primeira ordem, com

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad (1)$$

Solução

Primeiro , substitui -se $s = j\omega$ na função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1} = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \qquad (2)$$

Em seguida, multiplique o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador, $-j\omega\tau + 1$, ou seja,

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega\tau + 1}{(j\omega\tau + 1)(-j\omega\tau + 1)} = \frac{-j\omega\tau + 1}{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1} + j\frac{(-\omega\tau)}{\omega^2\tau^2 + 1} = R + jI \qquad (3)$$

onde:

$$R = \frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1} \qquad (4a)$$

$$I = \frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1} \qquad (4b)$$

Da etapa 3 do Método Shortcut:

$$\mathrm{AR} = \sqrt{R^2 + I^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2}$$

ou

$$\mathrm{AR} = \sqrt{\frac{(1 + \omega^2\tau^2)}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \qquad (5a)$$

também,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I}{R}\right) = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \qquad (5b)$$

Exercício: $G(s) = \dfrac{5}{10s+1}$

$s = j\omega$ $\quad G(jw) = \dfrac{5}{10jw+1}$

$$G(jw) = \frac{5(-10jw+1)}{(10jw+1)(-10jw+1)}$$

$$G(jw) = \frac{5(-10jw+1)}{(10^2 w^2+1)} = \frac{5}{(10^2 w^2+1)} + j\frac{(-50w)}{(10^2 w^2+1)}$$

Continuem...

Exercício: $G(s) = \dfrac{5}{10s+1}$

E completar a seguinte tabela

Freqüência (rad/min)	Módulo abs(G(jw))	Módulo 20*log (abs(G(jw)) [dB]	$\angle$ G(jw), [rad]	RA	$\angle$ G(jw), [graus]
0.001					
0,01					
0,1					
0.2					
0.4					
0.8					
1					
2					
4					
8					
10					