Departamento de Engenharia Química e de Petróleo – UFF

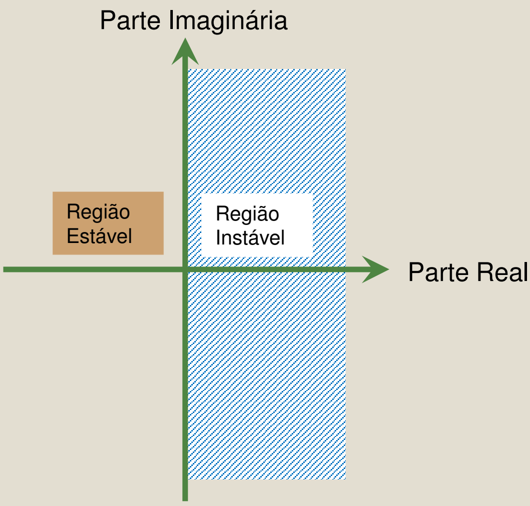
Disciplina: TEQ102- CONTROLE DE PROCESSOS

ESTABILIDADE
Método critério de Routh-Hurwitz
Casos Especiais

Profª Ninoska Bojorge

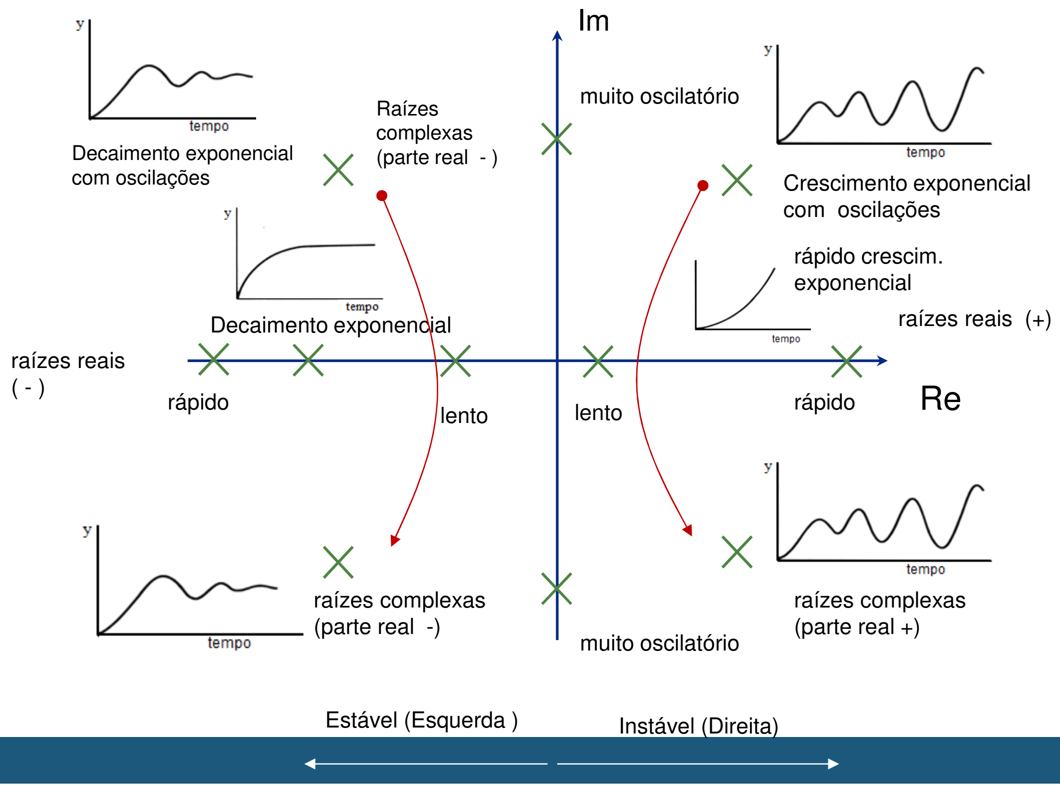
ESTABILIDADE MALHA FECHADA

Regiões de estabilidade no plano complexo das raízes da equação característica



Observação: A mesma equação característica ocorre tanto para as mudanças na carga e no *setpoint* desde o termo $1 + G_{OL}$. Assim, se o sistema de malha fechada é estável para perturbações de carga, ele também será estável para mudanças de set-point.

Contribuições dos polos na resposta malha fechada



Criterio de Routh-Hurwitz

Ex1) Seja $G(s)=\dfrac{2s+1}{s^4+2s^3+3s^2+4s+5}$ estude sua estabilidade

1º passo: D(s)=$s^4+2s^3+3s^2+4s+5$

2º passo: todos coeficientes de D(s) são positivos portanto nada pode-se concluir

3ºpasso: construir arranjo triangular de Routh-Hurwitz (Lembrando...)

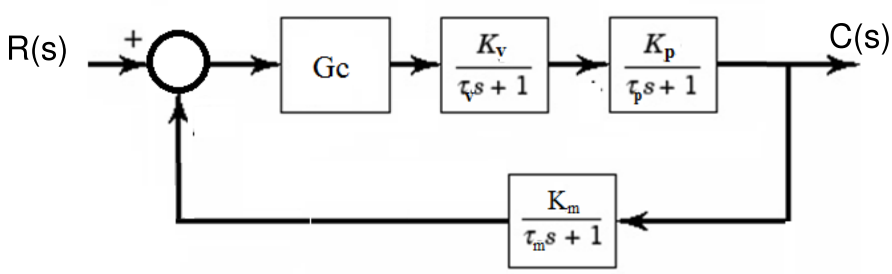
$$
\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} \qquad b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1} \qquad b_3=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1}$$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1} \qquad c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1} \qquad c_3=\frac{b_1a_7-a_1b_4}{b_1}$$

$$d_1=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{c_1} \qquad d_2=\frac{c_1b_3-b_1c_3}{c_1}$$

Critério de estabilidade - Exemplo



$$G_P(s)G_v(s)H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_C\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1+K_C\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

ou

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_C}{(s+1)(s+2)(s+3)+K_C}$$

Equação Característica:

$$(s+1)(s+2)(s+3)+K_C=0$$

Pelo método do lugar das raízes

Criterio de estabilidade - Exemplo

Equação Característica:

$$(s+1)(s+2)(s+3)+K_C=0$$

	K_c	p_1	p_2	p_3
	0	-3	-2	-1
	0.23	-3.1	-1.75	-1.15
*	0.39	-3.16	-1.42	-1.42
	1.58	-3.45	-1.28-0.75j	-1.28+0.75j
	6.6	-4.11	-0.95-1.75j	-0.95+1.75j
	26.5	-5.1	-0.45-2.5j	-0.45+2.5j
**	**60**	-6.0	**0-3.32j**	**0+3.32j**
	100	-6.72	0.35-4j	0.35+4j

CASOS ESPECIAIS CRITÉRIO DE ROUTH

- 1o. Caso) Nenhum elemento da 1ª coluna é zero → avalia-se a estabilidade pelo resultado do arranjo.

- 2o. Caso) Existe um zero na 1ª coluna → substitui-se o zero por um valor ε (épsilon) e faz-se a análise da estabilidade pelo arranjo.

- 3o. Caso) Todos os elementos de uma linha são zeros → substitui-se esta linha pelos coeficientes oriundos da derivação da linha anterior e faz-se a análise da estabilidade pelo arranjo.

CASOS ESPECIAIS CRITÉRIO DE ROUTH

Ex1) Seja $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$ estude sua estabilidade pelo critério de R-H.

Assim:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \dfrac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{2} = 1 & \dfrac{2\cdot 5 - 1\cdot 0}{2} = 5 & \\
s^1 & & & \\
s^0 & \dfrac{6\cdot 5 - 1}{-6} = 5 & &
\end{array}
$$

Neste caso, os elementos da 1º coluna são:

$$
\begin{array}{cc}
s^4 & 1 \\
s^3 & 2 \\
s^2 & 1 \\
s^1 & -6 \\
s^0 & 5
\end{array}
$$

Ocorrem duas mudanças de sinais, um de 1 para -6 e outra de -6 para 5, logo este sistema tem dois pólos de lado direito do plano-s , então o sistema é instável.

Exercícios

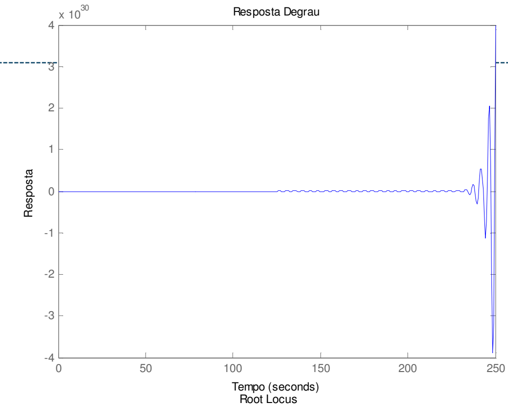
Ex1) Seja $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^4+2s^3+3s^2+4s+5}$

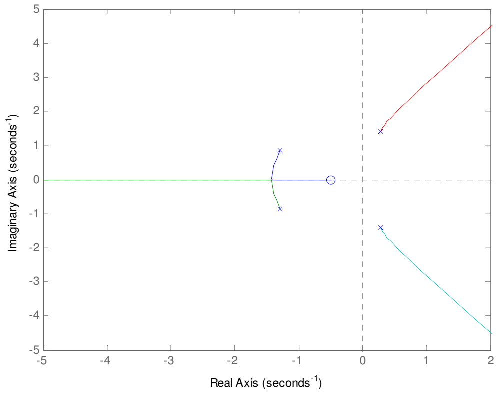
A fim de verificar, podemos plotar a resposta desta G(s) para um degrau

```
>> s = tf('s');
>> num = [ 2 1];
>> den = [ 1 2 3 4 5];
>> step (num, den)
```

Se analisamos pelo Lugar das raízes, no Matlab

```
>> G = tf([2 1],[1 2 3 4 5]);
>> rlocus(G)
```





Casos Especiais

Caso 2) Linha com primeiro elemento igual a zero

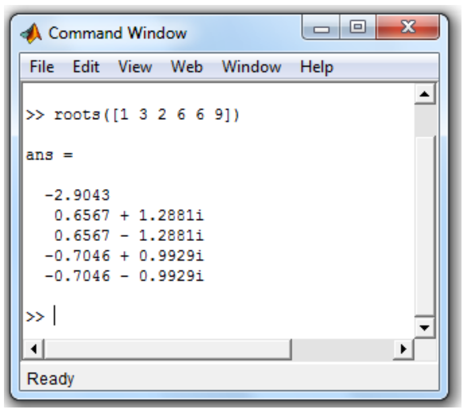
substitua este elemento por um ε > 0 e prossiga na construção do arranjo. Na análise de estabilidade, faça ε→0.

Ex 2: Indique quantos polos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

Obs:

- o polinômio atende à condição necessária;
- no entanto, se analisamos os polos, por exemplo usando o Matlab, obtém-se :



Casos Especiais

Caso 2) Linha com primeiro elemento igual a zero

Ex 2: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

o arranjo triangular de Routh assume a forma:

s^5	1	2	6
s^4	3	6	9
s^3	0	3	0
Nova s^3	ε	3	0
s^2	$\frac{6\varepsilon-9}{\varepsilon}$	9	0
s^1	$3-\frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon-3}$	0	0
s^0	9	0	0

- Assim, o critério de Routh indica a existência de 2 pólos fora do semiplano esquerdo.
- uma outra alternativa aqui é realizar a seguinte mudança de variáveis:

  z = 1/s

  e obter o polinômio em z, seguido da aplicação do critério de Routh

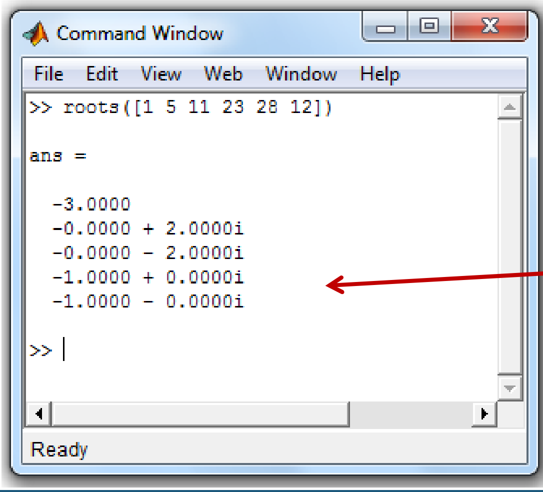
Casos Especiais

Caso 3) Linha com todos os elementos iguais a zero

Ex 3: Indique quantos polos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

- ✓ repare que o polinômio atende à condição necessária;
- ✓ no entanto, usando o Matlab, obtém-se os seguintes polos:



Obs: veja-se a perda de precisão numérica no cálculo ao lado . As raízes do polinômio são efetivamente –3, +*j*2, –*j*2, –1 e –1.

Esta perda de precisão é devida ao processo de quantização numérica empregado pelo computador. Dependendo do algoritmo, este efeito é maior ou menor.

Casos Especiais

Caso 3) Linha com todos os elementos iguais a zero

Ex 3: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

o arranjo triangular de Routh assume a forma:

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	6,4	25,6	
s^2	3	12	0
s^1	0	0	0
s^0			

Casos Especiais

Caso 3) Linha com todos os elementos iguais a zero

Ex 3: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

o arranjo triangular de Routh assume a forma:

s^5	1	11	28	
s^4	5	23	12	
s^3	6,4	25,6	0	
s^2	3	12	0	← $p(s) = 3s^2 + 12$
s^1	0	0	0	← Linha nula
Nova s^1	6	0	0	$\frac{dp}{ds} = 6s$
s^0	12	0	0	

Casos Especiais

Caso 3) Linha com todos os elementos iguais a zero

Ex 3: Indique quantos pólos fora do semiplano esquerdo tem o seguinte polinômio:

$$s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

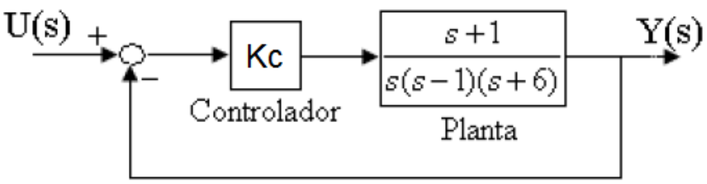
o arranjo triangular de Routh assume a forma:

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	6,4	25,6	0
s^2	3	12	0
s1	0	0	0
Nova s^1	6	0	0
s^0	12	0	0

- ✓ Assim, o critério de Routh indica a inexistência de polos fora do semiplano esquerdo, embora falta ainda analisar o polinômio $p(s) = 3s^2 + 12$.
- ✓ Este polinômio vai apresentar 2 raízes no eixo imaginário, $+j2$ e $-j2$, portanto, na margem do semiplano esquerdo.

Outras aplicações

Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



solução: A F.T.M.F. é dada por:

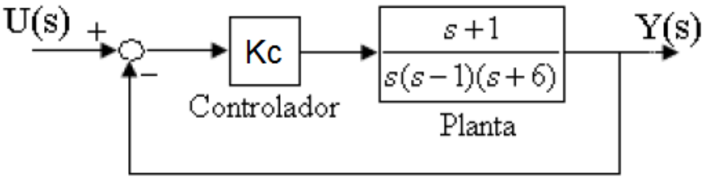
$$H(s) = \frac{Kc\dfrac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}}{1 + Kc\dfrac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}}$$

$$= \frac{Kc(s+1)}{s(s-1)(s+6) + Kc(s+1)}$$

Note que não é possível obter os pólos de H(s) usando a calculadora.

Outras aplicações

Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



Usando o método de Routh-Hurwitz:

1ºpasso: $D(s)=s^3 + 5s^2 + (Kc - 6)s + Kc$

2ºpasso: Para que todos os coeficientes sejam positivos:

$Kc - 6 > 0 \rightarrow Kc > 6$

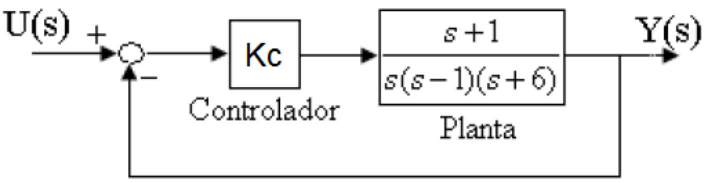
e

$Kc > 0$

$\Rightarrow Kc > 6$ satisfaz (I)

Outras aplicações

Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



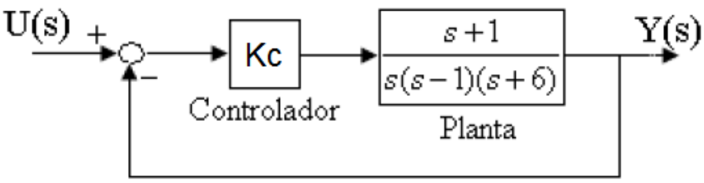
Usando o método de Routh-Hurwitz: $D(s)=s^3 + 5s^2 + (Kc - 6)s + Kc$

3ºpasso:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & K_c - 6 \\ s^2 & 5 & K_c \\ s^1 & \dfrac{5(Kc-6)-1Kc}{5} & 0 \\ s & Kc & \end{array}$$

Outras aplicações

Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



Usando o método de Routh-Hurwitz: $D(s)=s^3 + 5s^2 + (Kc - 6)s + Kc$

4ºpasso: Para que elementos da 1ª. coluna sejam todos positivos, é necessário que:

$$\frac{5(Kc-6)-Kc}{5} > 0 \qquad \text{e} \qquad Kc > 0 \qquad \text{(III)}$$

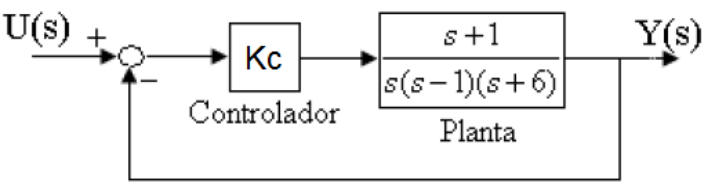
$$\Rightarrow 5Kc - 30 - Kc > 0$$

$$\Rightarrow 4Kc - 30 > 0$$

$$\Rightarrow Kc > \frac{30}{4} = 7{,}5 \qquad \text{(II)}$$

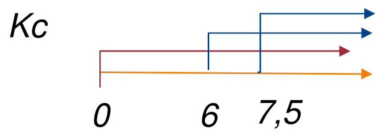
Outras aplicações

Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



Usando o método de Routh-Hurwitz: $D(s)=s^3 + 5s^2 + (Kc - 6)s + Kc$

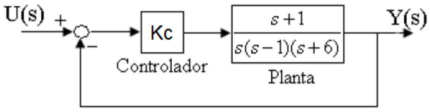
4ºpasso:



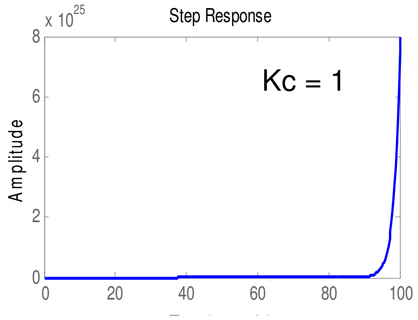
Logo, para Kc > 7,5 o sistema terá estabilidade absoluta.

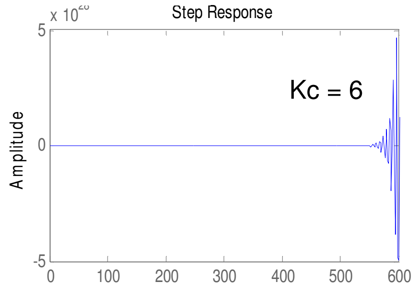
Como já foi dito, se tiver um zero (0) na primeira coluna de tabela ou se uma linha for nula, então deve-se usar o caso especial anterior.

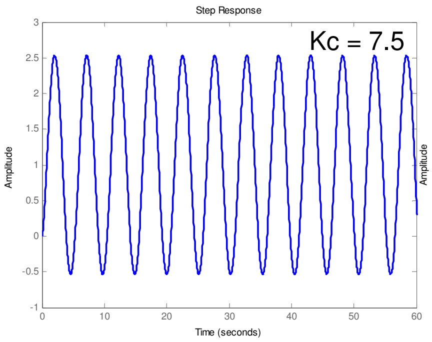
Ex 4: Determine o intervalo de Kc, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.

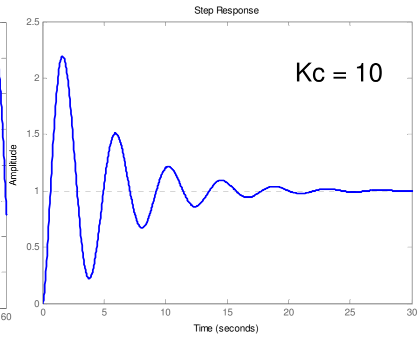


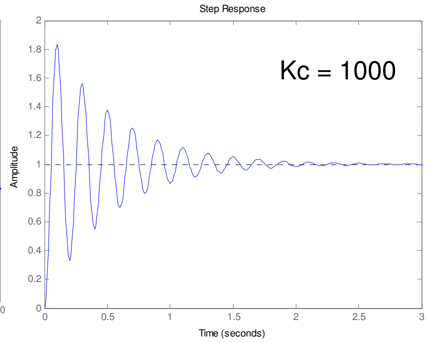
Verificação











Outras aplicações

Dada a Equação característica da FTMF, determinar estabilidade

$$1 + Kc\frac{s+1}{S^3 + 0.5S^2 - 0.5s - 0.75} = 0$$

$$1 + K_c\frac{s+1}{s^3 + 0.5s^2 - 0.5s - 0.75} = 0$$

$$s^3 + 0.5s^2 - 0.5s - 0.75 + K_c s + K_c = 0$$

$$s^3 + 0.5s^2 + (K_c - 0.5)s + (K_c - 0.75) = 0$$

Substituir *s = jω, Kc= Kcu*

$$(j\omega)^3 + 0.5(j\omega)^2 + (K_{cu} - 0.5)j\omega + (K_{cu} - 0.75) = 0$$

$$-j\omega^3 - 0.5\omega^2 + (K_{cu} - 0.5)j\omega + (K_{cu} - 0.75) = 0$$

Outras aplicações

- Parte real

$$-0.5\omega^2 + K_{c_u} - 0.75 = 0$$

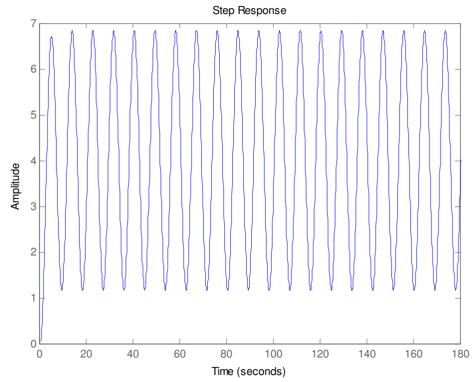
Parte Complexa

$$(K_{c_u} - 0.5)\omega - \omega^3 = 0$$

$$\therefore K_{c_u} = 0.5\omega^2 + 0.75 \Rightarrow (0.5\omega^2 + 0.75 - 0.5)\omega - \omega^3 = 0$$

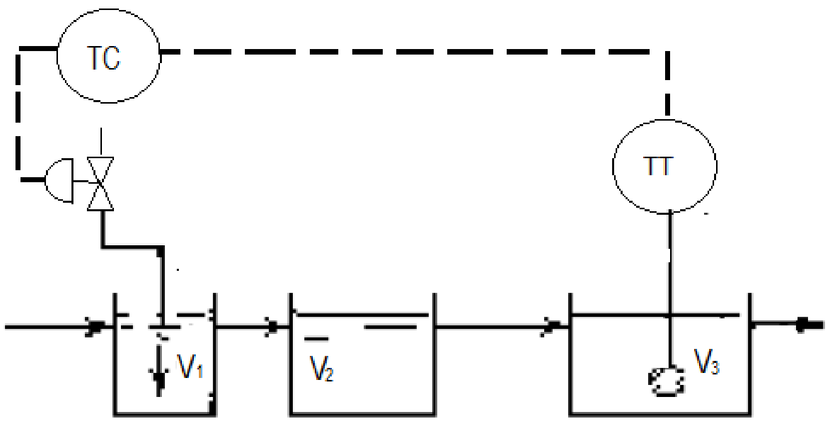
$$\Rightarrow -0.5\omega^2 + 0.25 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_u = \pm\sqrt{2}/2, \quad K_{c_u} = 1$$



Exercício de aplicação

Exercício 5 No seguinte sistema, determinar o valor do ganho, que faz com que o sistema se torne instável Use os seguintes dados: (a) τ_D = 0,25 min e (b) τ_D = 0,5 min.



$\dot{m} = 250$ lb/min
$\rho = 62.5$ lb/ft^3
$V_1 = 4$ ft^3
$V_2 = 5$ ft^3
$V_3 = 6$ ft^3
$\hat{C}_p = 1$ Btu/lb°F

Exercício de aplicação

Ex 5) ....

O balanço de energia em torno de cada tanque:

$$\frac{d\left(\rho V_i \hat{H}_i\right)}{dt} = \dot{m}\hat{H}_{i-1} - \dot{m}\hat{H}_i + Q_i \quad \Rightarrow \quad \rho V_i \hat{C}_p \frac{dT_i}{dt} = \dot{m}\hat{C}_p\left(T_{i-1} - T_i\right) + Q_i$$

Assim, em termos de variáveis de desvio e tomando a T. L obtemos sistemas da forma de 1ª ordem:

$$\overline{T}_i' = \frac{1}{\tau_i s + 1}\overline{T}_{i-1}' + \frac{K_q}{\tau_i s + 1}\overline{Q}_i'$$

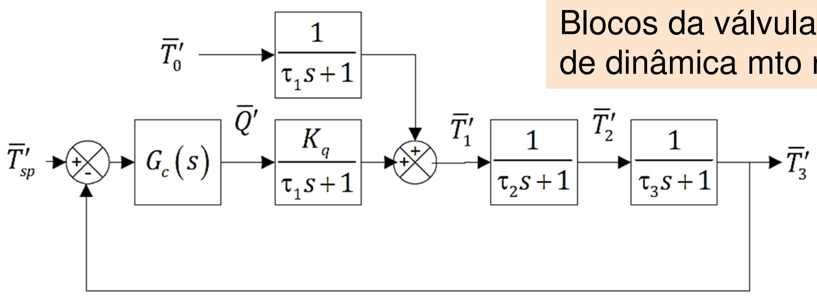
onde: $\tau_i = \dfrac{\rho V_i}{\dot{m}}$ & $K_q = \dfrac{1}{\dot{m}\hat{C}_p}$

$\overline{Q}_2' = \overline{Q}_3' = 0$ pois não há aquecedores nesses tanques.

Exercício de aplicação

Ex 5) ...

O seguinte diagrama de blocos mostra o sistema de controle de feedback.



Blocos da válvulas e sensor são de dinâmica mto rápida (G= 1)

$\therefore K_q = K_1$

onde os parâmetros do sistema será:

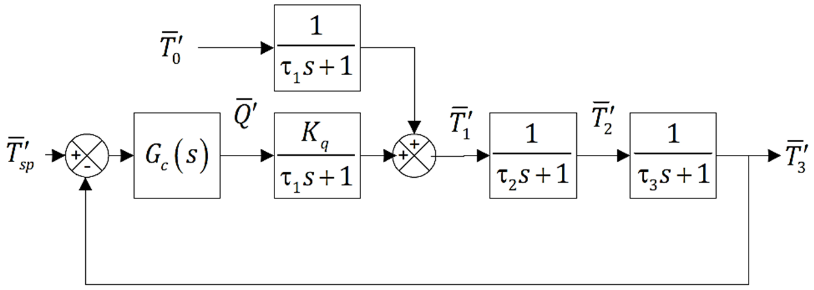
$$K_1 = \frac{1}{\dot{m}\hat{C}_p} = \frac{1}{250\cdot 1} = 0.004\ \text{°F/(Btu/min)}$$

$$\tau_1 = \frac{\rho V_1}{\dot{m}} = \frac{62.5\cdot 4}{250} = 1.00\ \text{min}$$

$$\tau_2 = \frac{\rho V_2}{\dot{m}} = \frac{62.5\cdot 5}{250} = 1.25\ \text{min}$$

$$\tau_3 = \frac{\rho V_3}{\dot{m}} = \frac{62.5\cdot 6}{250} = 1.50\ \text{min}$$

Ex 5) O seguinte diagrama de blocos mostra o sistema de controle de feedback.



Logo, a equação característica será:

$$1+G_cG_fG_1G_2G_3 = 1+K_c\left(1+\tau_D s\right)\frac{K_1}{\tau_1 s+1}\frac{1}{\tau_2 s+1}\frac{1}{\tau_3 s+1}$$

$$=1+K_c\left(1+\tau_D s\right)\frac{0.004}{s+1}\frac{1}{1.25s+1}\frac{1}{1.50s+1}$$

$$(s+1)(1.25s+1)(1.50s+1)+0.004K_c\left(1+\tau_D s\right)=0$$

$$1.875s^3+4.625s^2+3.75s+1+0.004\tau_D K_c s+0.004K_c=0$$

Continuando...

Outras aplicações

Ex 5) ... Assim a equação característica ...

$$1.875s^3+4.625s^2+3.75s+1+0.004\tau_D K_c s+0.004K_c=0$$

Logo, pelo arranjo de Routh:

1	1.875	$3.75+0.004K_c\tau_D$
2	4.625	$1+0.004K_c$
3	$\dfrac{4.625(3.75+0.004K_c\tau_D)-1.875(1+0.004K_c)}{4.625}$	
4	$1+0.004K_c$	

Outras aplicações

Ex 5) ...

$$\frac{4.625(3.75+0.004K_c\tau_D)-1.875(1+0.004K_c)}{4.625}$$

$$=3.345+0.004K_c\tau_D-0.00162K_c$$

$$3.345+0.004K_c\tau_D-0.00162K_c>0$$
$$(0.00162-0.004\tau_D)K_c<3.345$$

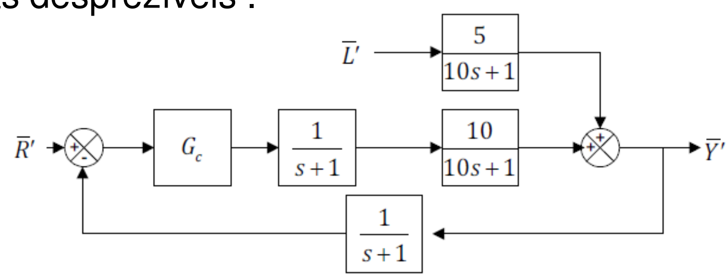
Assim, para :

$$\tau_D=0.25\,,\ 0.00062K_c<3.345\ \Rightarrow\ K_c<5380$$

$$\tau_D=0.50\,,\ -0.00038K_c<3.345\ \Rightarrow\ K_c>-8800$$

Outras aplicações

Ex 6) Considere o exemplo onde o atuador e dispositivos de medição não têm dinâmicas desprezíveis .



Equação característica:

$$1+G_c\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{10}{10s+1}=0$$

$$(s+1)^2(10s+1)+10G_c=0$$

$$10s^3+21s^2+12s+1+10G_c=0$$

Outras aplicações

- Análise critério de Routh – Control P

$$10\cdot s^3+21\cdot s^2+12\cdot s+(1+10K_c)=0$$

s^3	10	12
s^2	21	(1 +10Kc)
s^1	$12-\frac{10(1+10K_c)}{21}$	0
s^0	$1+10K_c$	

$$1+10K_c>0 \rightarrow K_c>-\frac{1}{10}.$$

$$12-\frac{10(1+10K_c)}{21}>0 \rightarrow K_c<\frac{12\times 21-10}{100}=2.42$$

0,1 < Kc < **2.42**

Outras aplicações

Agora, o Análise por Substituição Direta com controle P;
s= jw e Kc=Kcu

$$-10\cdot\omega^3 j-21\cdot\omega^2+12\cdot\omega j+(1+10K_c)=0$$

$$-10\cdot\omega_u^3+12\cdot\omega_u=0$$

$$\omega_u(12-10\cdot\omega_u^2)=0$$

$$\omega_u^2=\frac{12}{10}$$

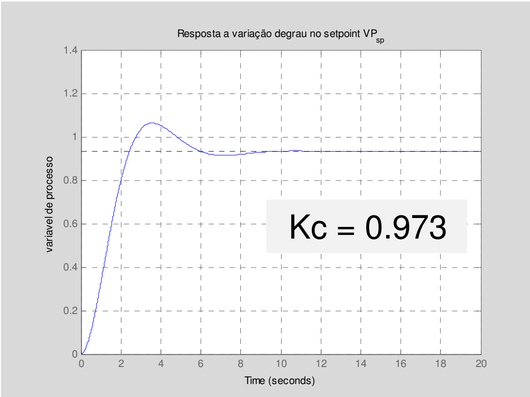
$$\omega_u=2\sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$-21\cdot\omega_u^2+(1+10K_{cu})=0$$

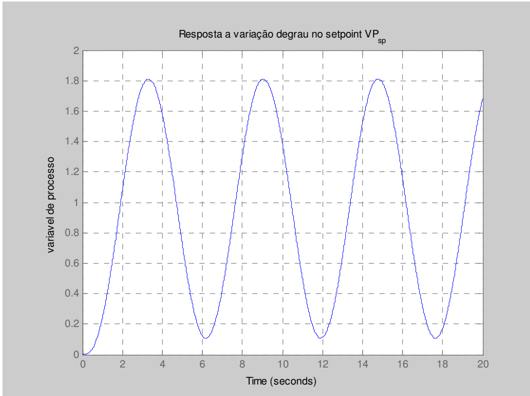
$$K_c=\frac{21\cdot\omega_u^2-1}{10}=\frac{21\cdot\frac{12}{10}-1}{10}=2.42$$

K_{cu}= 2.42

Simulando o exemplo anterior no Matlab (pidtune)



mas, quando Kc= Kcu, a resposta é criticamente estável



Análise critério de Routh – Control P I

$$10\cdot s^3+21\cdot s^2+12\cdot s+1+10K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)=0$$

$$10\cdot s^4+21\cdot s^3+12\cdot s^2+\left(1+10K_c\right)s+\frac{10K_c}{\tau_I}=0$$

s^4	10	12	$10Kc/\tau_I$
s^3	21	(1 +10Kc)	0
s^2	$12-\dfrac{10(1+10K_c)}{21}$	$\dfrac{10K_c}{\tau_I}$	
s^1	$1+10K_c-\dfrac{21\dfrac{10K_c}{\tau_I}}{12-\dfrac{10(1+10K_c)}{21}}$		
s^0	$\dfrac{10K_c}{\tau_I}$		

A estabilidade estará definida em função dos valores de Kc e τ_I