Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

1ª Prova de GA
07/07/2022 – 2022-1
Turma R1

Quest.	Pts	Bonus:	N
1	1	0	
2	2,5	0	
3	3	0	
4	3,5	0	
Total:	10	0	

Instruções

- A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação.
- Responda cada questão de maneira clara e organizada.
- Resultados sem justificativas não serão considerados.
- Uma questão com mais de uma solução terá nota zero.
- Os celulares devem ser mantidos desligados.
- Resposta final correta com solução incorreta terá nota zero.
- Não é permitido o compartilhamento de material.
- Não é permitido sair da sala (tomar água, ir ao banheiro e etc) sem entregar definitivamente a avaliação.
- Aos alunos envolvidos em algum tipo de fraude, mesmo que identificada posteriormente, será atribuído nota zero na prova.

Nome: GABARITO

1. [1 pt] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$ no espaço? Quais informações você têm sobre este objeto?
   (b) Escreva a equação do plano ortogonal a $\vec{n}=(-1,2,1)$ passando pela origem.
   (c) Obtenha um vetor ortogonal a $\vec{u}=(1,1,-2)$ e $\vec{v}=(-2,0,1)$ simultaneamente.
   (d) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Se $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, o que podemos concluir?
   (e) Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores não nulos. O que representa geometricamente $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$?

2. [2,5 pts] Determine os pontos sobre a reta $r: X=(1,0,1)+t(-1,1,2)$ que formam com $A=(1,0,5)$, $B=(-2,1,1)$ e $C=(-3,1,0)$ um tetraedro de volume 2.

3. [3 pts] Determine os planos tangentes à esfera $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$ e paralelos ao plano $x+y-z=0$.

4. [3,5 pts] Um triângulo equilátero ABC tem lado BC sobre a reta $r: x+z-1=y-z-2=-z$. Sendo $A=(1,0,1)$ um dos seus vértices, determine os outros três.

Questão 1:

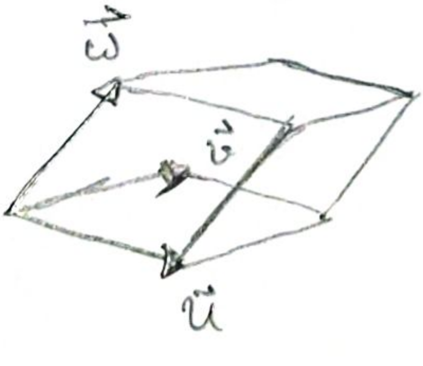
a) O objeto geométrico representado por $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$ é uma esfera de centro $(0,+2,-1)$ e raio $\sqrt{5}$.

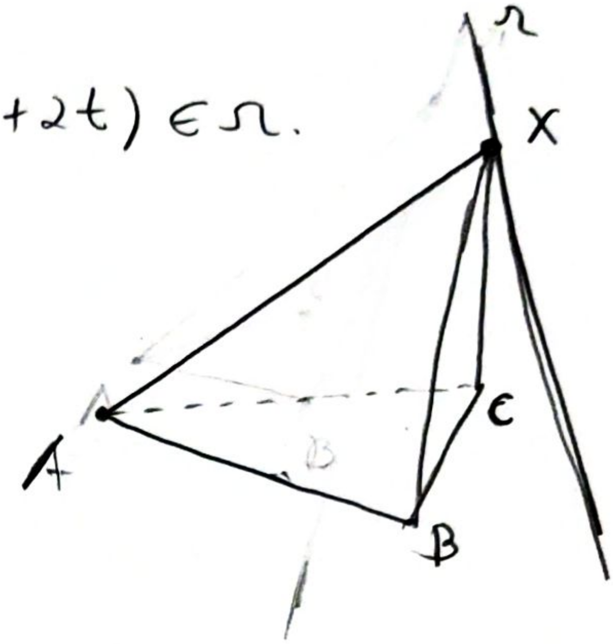
b) $-x+2y+z=0$

c) $\vec{u}=(1,1,-2)$
$\vec{v}=(-2,0,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}=(1,-1+4,2)=(1,3,2)$
é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

d) Que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplo.

e) $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ é o volume do paralelepípedo cujas arestas adjacentes são formadas por representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com mesma origem.





Questão 2: $X = (1-t,\ t,\ 1+2t) \in r$.

$\vec{AB} = (-3, 1, -4)$

$\vec{AC} = (-4, 1, -5)$

$\vec{AX} = (-t, t, -4+2t)$

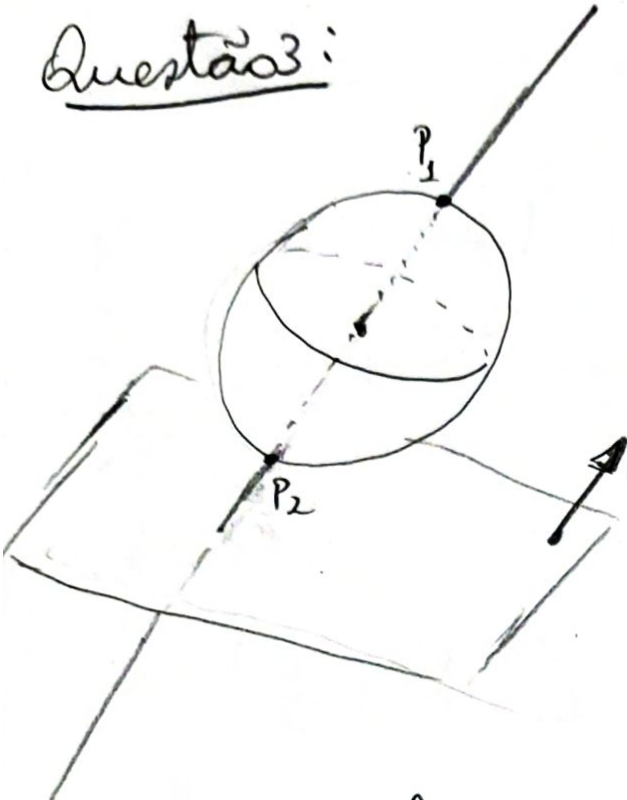
$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AX}] = \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -5 \\ -t & t & -4+2t \end{bmatrix} = 4t-4.$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AX}] \right| = 2 \Rightarrow |4t-4| = 12$$

$$\Rightarrow |t-1| = 3 \Rightarrow t-1 = \pm 3 \Rightarrow t = 4 \text{ ou } t = -2.$$

$$\Rightarrow D_1 = (-3, 4, 9) \text{ ou } D_2 = (3, -2, -3).$$

Questão 3:



Como os planos são paralelos a $x+y-z=0$, então eles são da forma $x+y-z+d=0$.

Para determinar d, basta encontrarmos P_1, P_2 os pontos de tangencia. Estes pontos são dados pela intersecção da reta r que passa pelo centro $C=(0,-2,1)$ da esfera na direção do vetor normal $\vec{n}=(1,1,-1)$. Assim;

$$r: X=(0,-2,1)+t(1,1,-1)=(t,-2+t,1-t).$$

Subst. na equação da esfera temos

$$t^2 + (\cancel{-2} + t \cancel{+2})^2 + (\cancel{1} - t \cancel{-1})^2 = 4$$

$$\Rightarrow t^2 + t^2 + t^2 = 4 \Rightarrow 3t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Com isso,

$P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. Subst. na equação do plano

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + d = 0 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{3}} - 3 + d = 0$$

$$d = 3 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 3 - \frac{6\sqrt{3}}{3} = 3 - 2\sqrt{3},$$ daí,

$$\pi_1 : x + y - z + 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

Analogamente,

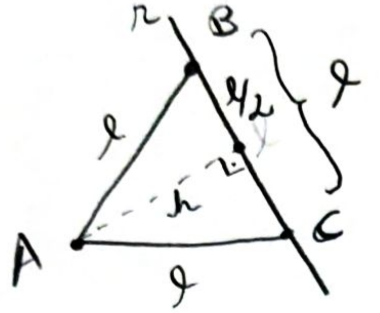
$P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ e subs. na eq. do plano

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} - 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + d = 0$$

$\Rightarrow -\frac{6}{\sqrt{3}} - 3 + d = 0 \Rightarrow d = \frac{6\sqrt{3}}{3} + 3 = 2\sqrt{3} + 3$, dci;

$\pi_2 : x + y - z + 3 + 2\sqrt{3} = 0$

Questão 4: Obtendo a equação paramétrica de r



$x + z - 1 = -z \Rightarrow x = 1 - 2z$

Fazendo $z = t$, temos $x = 1 - 2t$.

Também $y - z - 2 = -z \Rightarrow y = 2$, daí,

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow P = (1,2,0) \in r, \ \vec{r} = (-2,0,1) \parallel r.$$

$$h = d(A,r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} \overset{(*)}{=} \frac{\|(2,2,+4)\|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

(*)

$\vec{AP} = (0,2,-1)$

$\vec{r} = (-2,0,1)$

Pelo Teor. de Pitágoras, $\frac{l^2}{4} + h^2 = l^2$

$$\Rightarrow \frac{3l^2}{4} = h^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4h^2}{3} \Rightarrow l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}.}$$

Dado $X = (1-2t, 2, t) \in r$, queremos encontrar X tal que $d(X, A) = \ell$

$$\Rightarrow \sqrt{4t^2 + 4 + (t-1)^2} = 4\sqrt{\tfrac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 4t^2 + 4 + t^2 - 2t + 1 = 16 \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 2t + 5 - \frac{32}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 2t - \frac{7}{5} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{10} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{10} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{5}.$$

Com isso,

$$B = \left(1 - \frac{2+4\sqrt{2}}{5}, 2, \frac{1+2\sqrt{2}}{5}\right) = \left(\frac{3-4\sqrt{2}}{5}, 2, \frac{1+2\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$C = \left(1 - \frac{2-4\sqrt{2}}{5}, 2, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(\frac{3+4\sqrt{2}}{5}, 2, \frac{1-2\sqrt{5}}{5}\right).$$