UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – CURO

2ª chamada da
1ª Prova de GA
13/07/2022 – 2022-1
Turma K1

Gabarito

1. [2 pts] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $x + 2y + 5 = 0$ no plano? Qual é a relação entre este objeto e os vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 1)$?
   (b) Escreva a equação do círculo de centro em $C = (2, -5)$ e raio 2.
   (c) Qual é o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, -3)$ e $\vec{v} = (6, 2)$? Justifique.
   (d) O ponto $P = (1, 3)$ pertence à reta $r : X = (1, 2) + t(1, 1),\ t \in \mathbb{R}$?
   (e) Determine os pontos da reta $r : 2x - 3y = 6$ que interceptam os eixo.

Solução:
(a) O objeto representado pela equação é uma reta. O vetor $\vec{u}$ é ortogonal à reta e $\vec{v}$ é um vetor diretor da reta.
(b) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$.
(c) Note que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, portanto o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$ rad.
(d) Note que $(1, 3) = (1, 2) + t(1, 1) = (1 + t, 1 + 2t) \Rightarrow t = 0$ e $t = 1$, um absurdo! Logo P não pertence a r.
(e) Dividindo-se a equação por 6, temos que $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$, logo $A = (3, 0)$ e $B = (0, -2)$ são as interseções com os eixos.

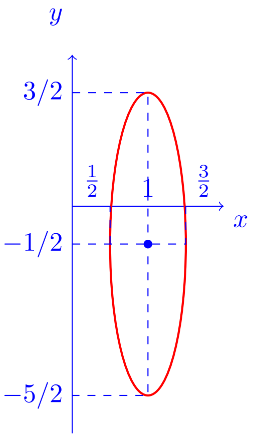
2. [2 pts] Identifique a cônica abaixo e faça um esboço.

$$16x^2 - 32x + y^2 + y + \frac{49}{4} = 0$$

Solução: Completando os quadrados:

$$\begin{aligned}
&16x^2 - 32x + y^2 + y + \frac{49}{4} = 0\\
\Rightarrow &16(x^2 - 2x) + \left(y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{49}{4} = 0\\
\Rightarrow &16(x^2 - 2x + 1 - 1) + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = 0\\
\Rightarrow &16(x - 1)^2 - 16 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 12 = 0\\
\Rightarrow &16(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4\\
\Rightarrow &4\,(x - 1)^2 + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1\\
\Rightarrow &\frac{(x - 1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Vemos que a cônica é uma elipse transladada. Abaixo segue o esboço.



3. [3 pts] Um triângulo equilátero ABC tem lado BC sobre a reta $r : -3x + y - 6 = 0$. Sendo $A = (1,\ 1)$ um dos seus vértices, determine os outros dois.

Solução:
Vamos calcular a altura do triângulo, que é dada pela distância do ponto A até a reta r, isto é,

$$h = d(A, r) = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

Por outro lado, como o triângulo é equilátero, sabemos que $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, daí,

$$\frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{3}l}{2} \Rightarrow l = \frac{8\sqrt{30}}{15}.$$

Para encontrarmos os pontos B e C basta determinarmos os pontos da reta r que estão à distância l da de A, isto é, $d(X, A) = l$, onde X é um ponto arbitrário de r.

Sabemos que $\vec{r} = (1,\ 3)$ é um vetor diretor da reta r e, fazendo $y = 0$, temos que $P = (-2,\ 0)$, daí, um ponto arbitrário da reta tem que ser da forma

$$X = P + t\vec{r} = (t - 2,\ 3t)\,.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d(X, A) = l &\Rightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (3t-1)^2} = \frac{8\sqrt{30}}{15} \Rightarrow (t-3)^2 + (3t-1)^2 = \frac{128}{15} \\ &\Rightarrow 10t^2 - 12t + \frac{22}{15} = 0 \\ &\Rightarrow t = \frac{3}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{15} \text{ ou } t = \frac{4\sqrt{3}}{15} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de t em X obtemos:

$$B = \left(-\frac{7}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{15},\ \frac{9}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{5}\right) \text{ e } C = \left(-\frac{7}{5} + \frac{4\sqrt{3}}{15},\ \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{9}{5}\right).$$

4. [3 pts] Determine as equações paramétricas das retas passando por $A = (1,\ -1)$ que fazem ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos com a reta $r : X = (-2,\ 0) + t\left(1,\ \sqrt{3}\right),\ t \in \mathbb{R}$.

Solução: Note que $\vec{r} = \left(1,\ \sqrt{3}\right)$ é um vetor diretor da reta r. Para obtermos as retas pedidas, basta girar este vetor por um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos no sentido horário e anti-horário.

Rotação no sentido anti-horário:

$$R_{\frac{\pi}{6}}\vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Com isso a segunda reta é dada por

$$r_1 : X = (1,\ -1) + t\,(0,\ 2)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Rotação no sentido horário:

$$R_{-\frac{\pi}{6}}\vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso a primeira reta é dada por

$$r_2 : X = (1,\ -1) + t\left(\sqrt{3},\ 1\right),\ t \in \mathbb{R}.$$