1ª Prova de Cálculo II
14/10/2022 – 2022-2
Turma C1

Gabarito

1. [2 pts] Resolva as integrais:

(a) $\displaystyle\int x^{13}\sqrt{x^{14}+5}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 8x^2+\operatorname{sen}(x)\,dx$

Solução:

(a) $\displaystyle\int x^{13}\sqrt{x^{14}+5}\,dx = \frac{(x^{14}+5)^{\frac{3}{2}}}{21}+C$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 8x^2+\operatorname{sen}(x)\,dx = 1+\frac{7\pi^3}{3}$

2. [4 pts] Determine a área da região limitada pela curva $y = x\sin(x)$ e o eixo x quando $0 \le x \le 2\pi$.

Solução: Primeiramente, note que $x\sin(x) = 0$ quando $x = 0, x = \pi$ e $x = 2\pi$. Pelo gráfico dado, vemos que:

$$A = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin(x)\,dx.$$

Usando integração por partes, temos que:

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)+\sin(x)+C.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

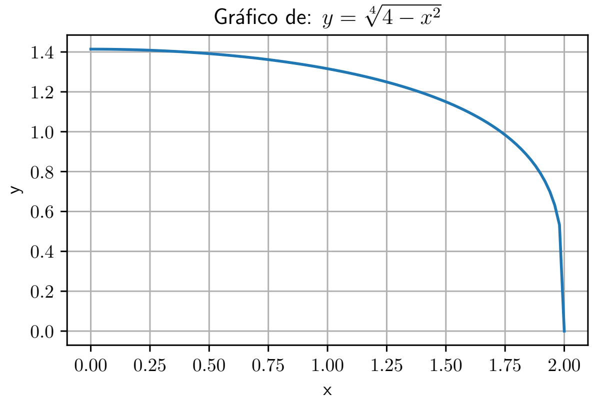
$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = \pi,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin(x)\,dx = -3\pi$$

Com isso,

$$A = 4\pi.$$

3. [4 pts] Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região delimitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \sqrt[4]{4-x^2}$



Solução: Sabemos que o volume é dado por:

$$V = \int_0^2 \pi\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Note que

$$\int_0^2 \pi\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx.$$

Fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen}\theta$, $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ temos que

$$V = 2\pi\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\,d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2\theta)\,d\theta = \pi^2.$$