Gabarito

Questão 1. .... ______/ 2 pts

Enuncie o Teorema de Weierstrass para funções em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um conjunto fechado e limitado U. Então, f assume valores máximo e mínimo absolutos.

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Determine os pontos críticos da seguinte função e classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

$$f(x,y) = xy\left(-x-y+1\right).$$

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \left(y\left(-2x-y+1\right), x\left(-x-2y+1\right)\right) = (0,0),$$

temos que os pontos críticos são:

$$P_1 = (0,0)\,,\;\; P_2 = (0,1)\,, P_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ e } P_4 = (1,0)\,.$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x-2y+1 \\ -2x-2y+1 & -2x \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(0,0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f(0,1) = \det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \det \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \text{ e } f_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}, \text{ máximo local}$$

$$\det D^2 f(1,0) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -1, \text{ ponto de sela}$$

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

Solução: Defina $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ e note que

$$\nabla f(x, y, z) = (2,\ 2,\ 1) \ \text{ e } \nabla g(x, y, z) = (2x,\ 2y,\ 2z)\,.$$

Assim queremos encontrar (x, y, z) e λ tais que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{bmatrix} \ \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Resolvendo o sistema em função de λ, temos que

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{2\lambda}\right).$$

Substituindo-se na segunda equação obtemos

$$-9 + \frac{9}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Com isso, obtemos os pontos

$$P_0 = (-2,\ -2,\ -1) \ \text{ e } P_1 = (2,\ 2,\ 1)\,.$$

Aplicando na função, vemos que

$$f\,(-2,\ -2,\ -1) = -9,\ \text{ é o valor mínimo absoluto}$$

e

$$f\,(2,\ 2,\ 1) = 9 \text{ é o valor máximo absoluto.}$$