UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS
Professor Reginaldo Demarque

2ª chamada da
2ª Prova de Cálculo III
14/07/2023 – 2023-1
Turma M1

Gabarito

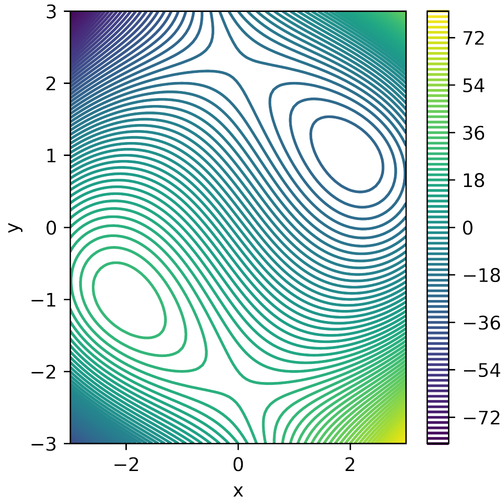
Questão 1. .... ________/ 2 pts

Enuncie o Teorema de Weierstrass para funções em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um conjunto fechado e limitado U. Então, f assume valores máximo e mínimo absolutos.

Questão 2. .... ________/ 4 pts

Determine os pontos críticos da seguinte função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$ e classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.



Solução: Fazendo

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy + 3y^2 - 15\right) = (0, 0),$$

temos que os pontos críticos são:

$$P_1 = (-2, -1)\,,\ \ P_2 = \left(0, -\sqrt{5}\right), P_3 = \left(0, \sqrt{5}\right) \text{ e } P_4 = (2, 1)\,.$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(-2, -1) = \det \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -18 \end{bmatrix} = 180, \text{ e } f_{xx}\left(0, \sqrt{5}\right) = -12, \text{ máximo local}$$

$$\det D^2 f(0,-\sqrt{5}) = \det \begin{bmatrix} 0 & -6\sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \end{bmatrix} = -180, \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f\left(0,\sqrt{5}\right) = \det \begin{bmatrix} 0 & 6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{bmatrix} = -180 \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f(2,1) = \det \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} = 180, \text{ e } f_{xx}\left(0,\sqrt{5}\right) = 12, \text{ mínimo local}$$

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, determine os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = 2x + 2y + 4z$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Solução: Defina $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e note que

$$\nabla f(x,y,z) = (2,\ 2,\ 4) \text{ e } \nabla g(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ 2z)\,.$$

Assim queremos encontrar (x,y,z) e λ tais que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{bmatrix} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Resolvendo o sistema em função de λ, temos que

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right).$$

Substituindo-se na segunda equação obtemos

$$-1 + \frac{6}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\sqrt{6} \text{ ou } \lambda = \sqrt{6}.$$

Com isso, obtemos os pontos

$$P_0 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ e } P_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Aplicando na função, vemos que

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -2\sqrt{6}, \text{ é o valor mínimo absoluto}$$

e

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2\sqrt{6} \text{ é o valor máximo absoluto.}$$