Universidade Federal Fluminense - UFF
Escola de Engenharia de Volta Redonda – EEIMVR
Departamento de Ciências Exatas

Capítulo X – Parte I
Momentos de Inércia

Profa. Salete Souza de Oliveira
Home: http://www.professores.uff.br/salete

Bibliografia Principal

R. C. HIBBELER – **Estática – Mecânica para Engenharia**

Momentos de Inércia de Áreas

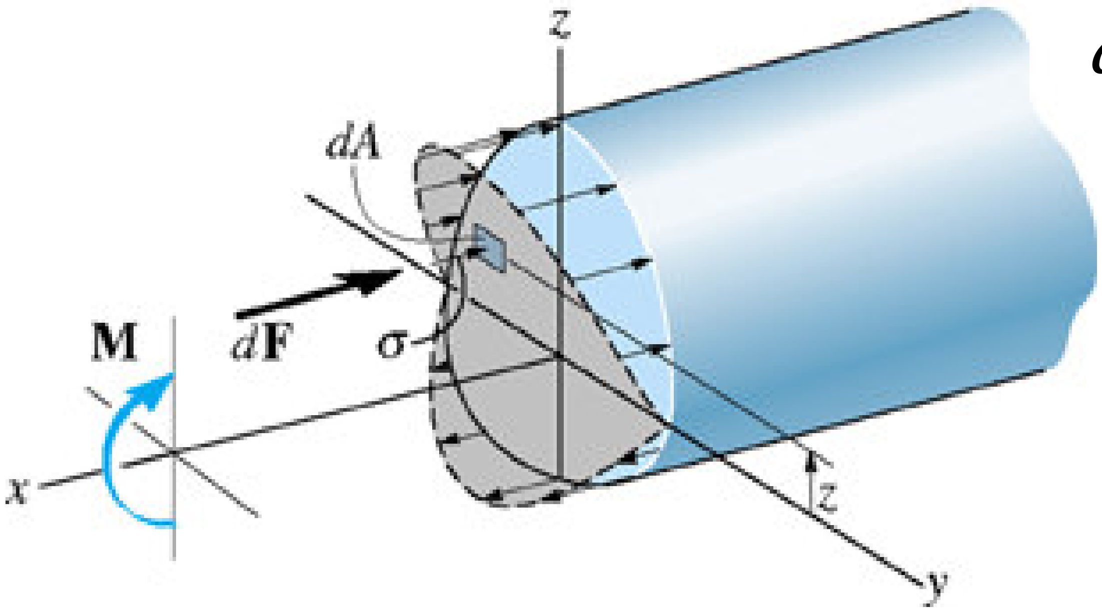
Introdução

Centróide – Considera-se o primeiro momento da área em relação a um eixo $\int xdA$

Momento de Inércia – Integral do Segundo Momento de Inércia $\int x^2 dA$

$$\sigma = \kappa z \Rightarrow dF = \sigma dA = kzdA$$

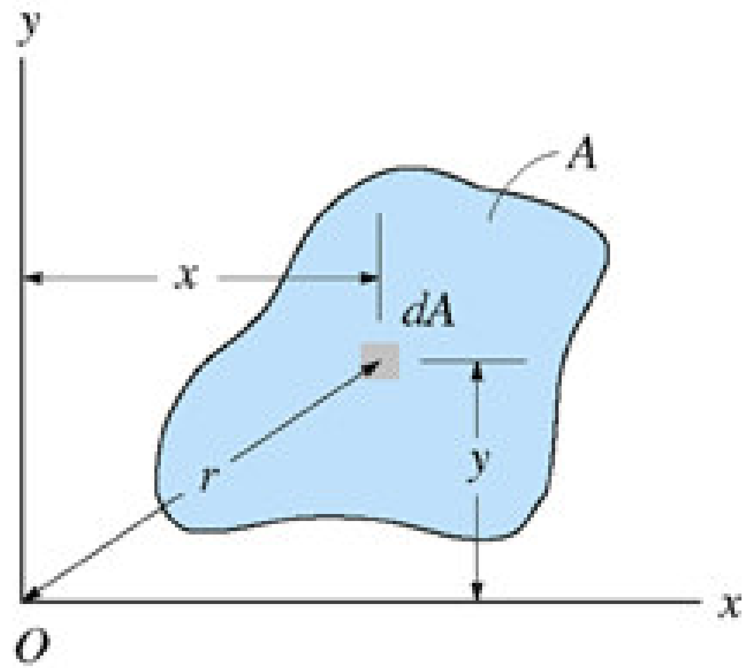
$$dM = dFz = kz^2 dA \Rightarrow M = \kappa \int z^2 dA$$



Momentos de Inércia

$$dI_x = \int_A y^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A y^2 dA$$

$$dI_y = \int_A x^2 dA \Rightarrow I_y = \int_A x^2 dA$$



Momento Polar de Inércia

$$J_o = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

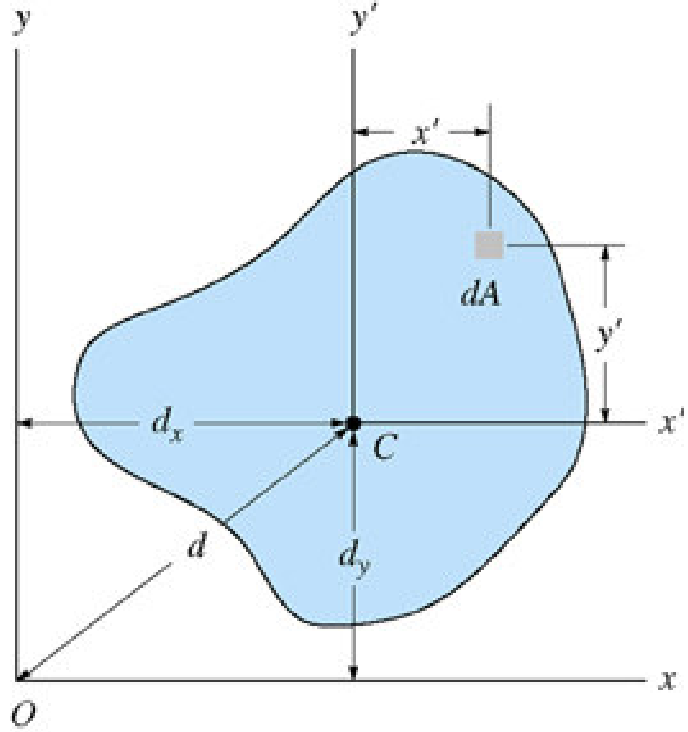
Teorema dos Eixos Paralelos para Uma Área

$$I_x = \int_A \left(y' + d_y\right)^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

$\bar{I}_{x'}$ **A primeira integral representa o momento de inércia da área em relação ao eixo que passa pelo centróide.**

A segunda integral é zero, uma vez que x' passa através do centróide *C* da área, isto é,

$$\int y' dA = y \int dA = 0, \ \bar{y} = 0$$



$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 \qquad I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2$$

$$J_o = \bar{J}_c + A d^2$$

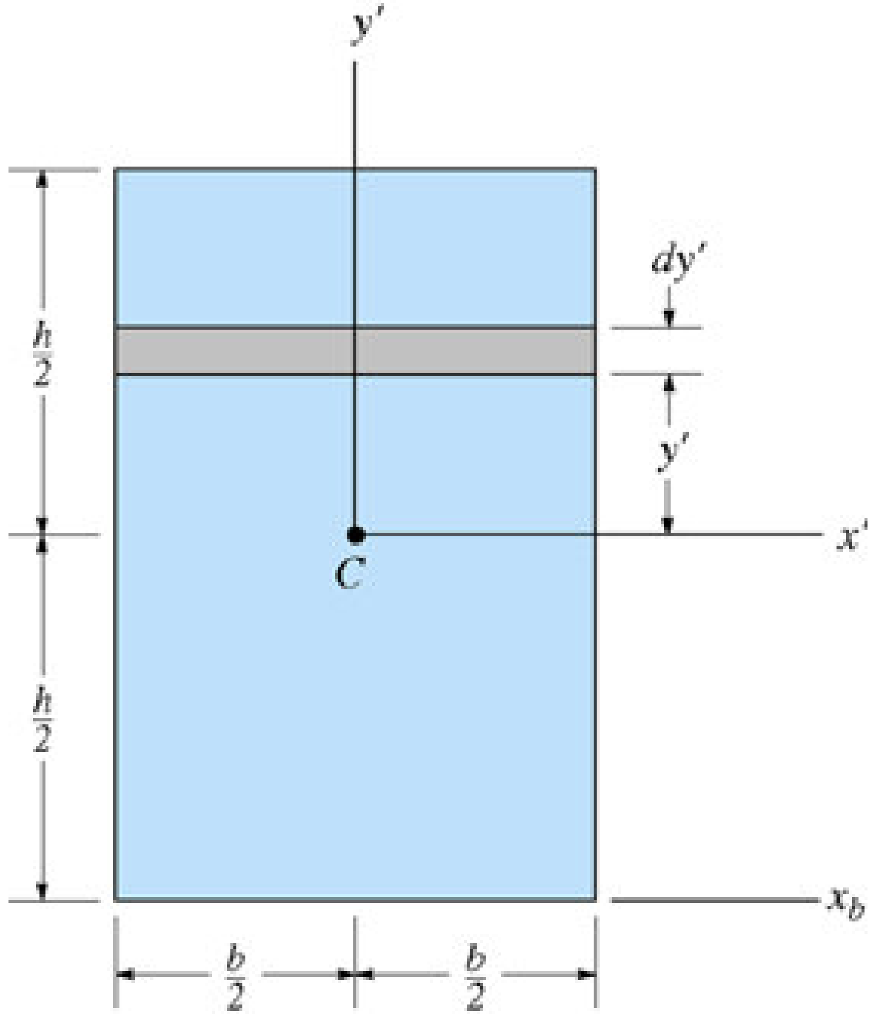
Raio de Giração de Uma Área

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

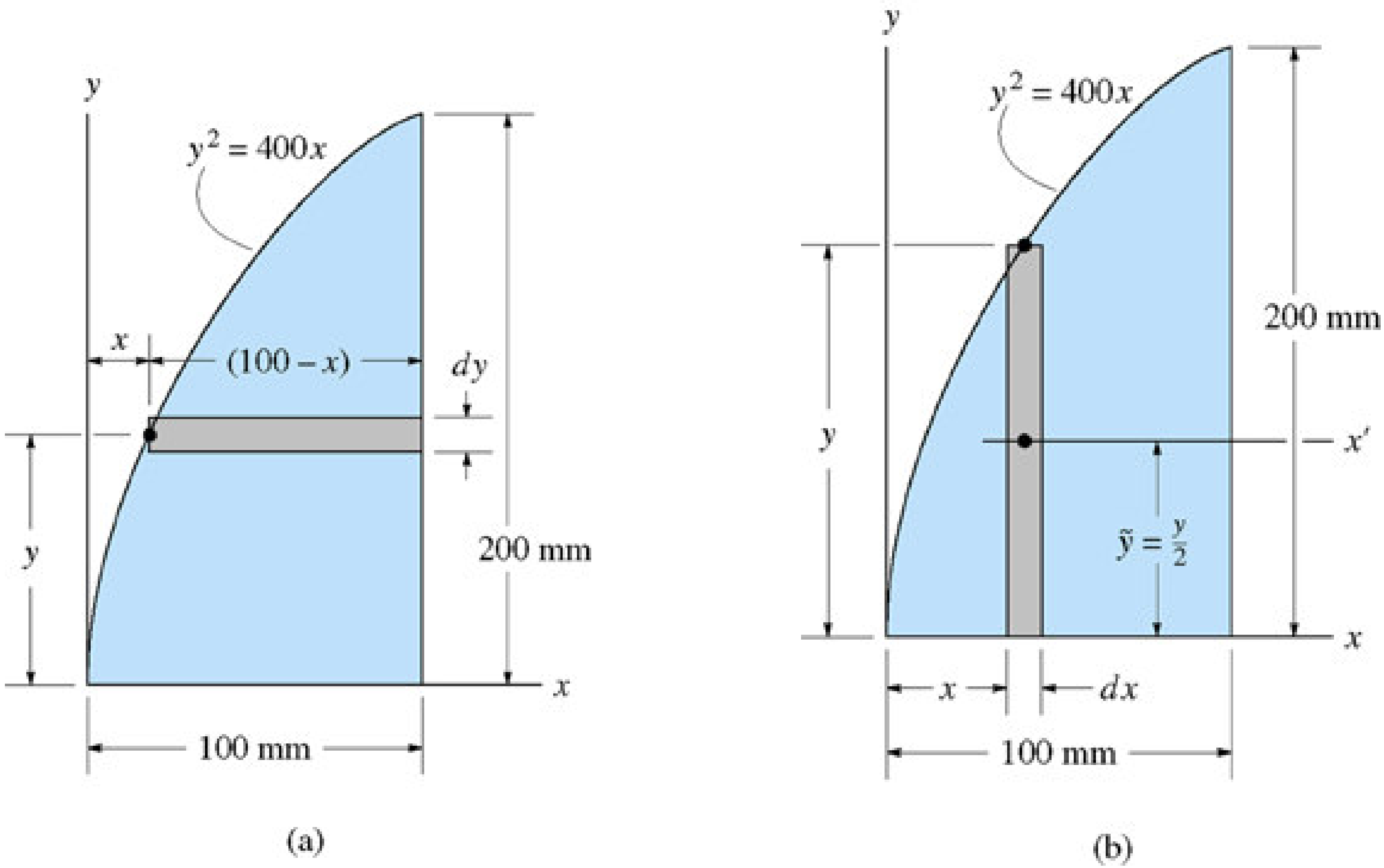
Momentos de Inércia de uma Área por Integração
Caso de contornos de áreas planas expressos por funções matemáticas

Exercícios

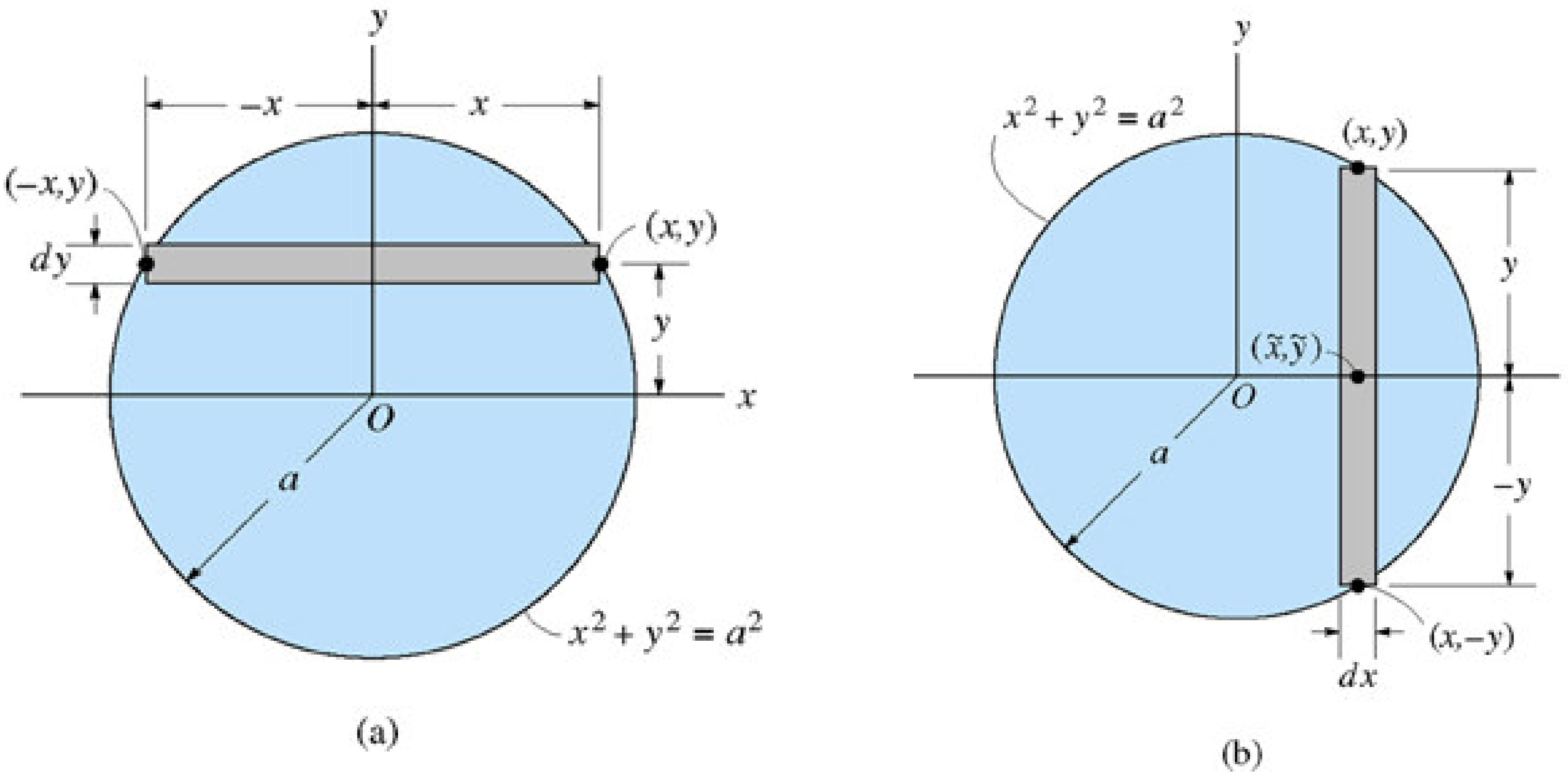
1- Determine o momento de inércia para a área retangular mostrada na Figura em relação (a) ao eixo x' que passa pelo centróide, (b) ao eixo x_b que passa pela base do retângulo e (c) ao pólo ou eixo z' perpendicular ao plano x'-y' e que passa pelo centróide C.



2- Determine o momento de inércia da área sombreada mostrada na Figura em torno do eixo *x*.



3- Determine o momento de inércia em relação ao eixo *x* da área circular mostrada na Figura.

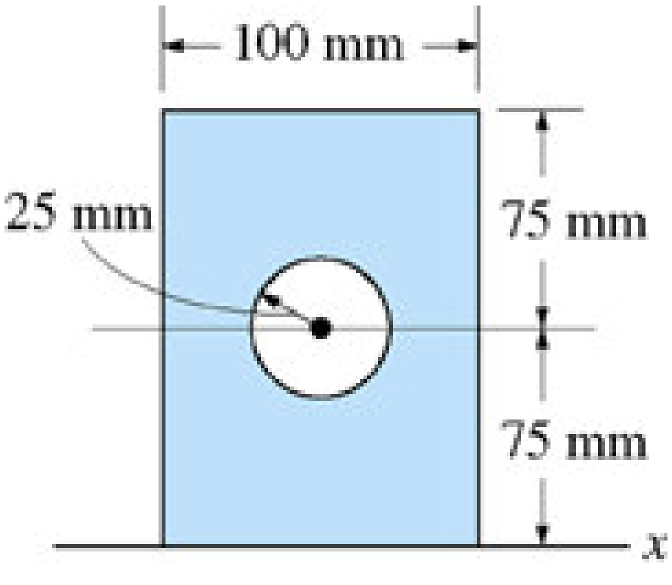


Resolver os exercícios do Hibbeller 10.2,10.9,10.24

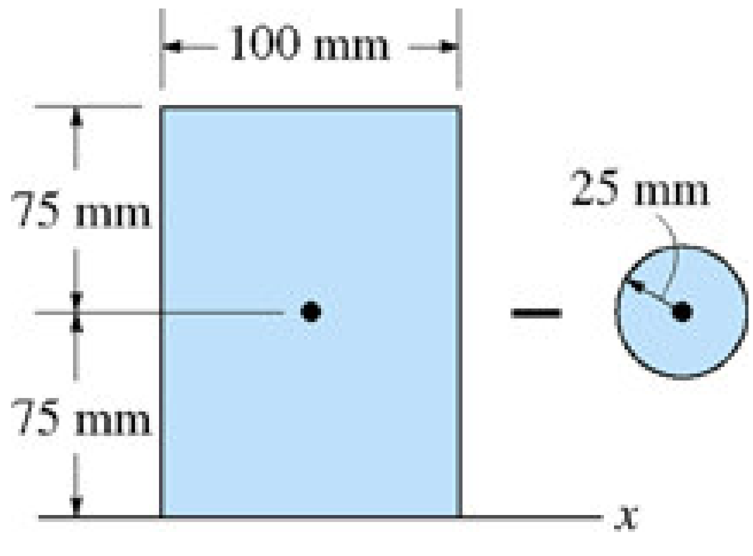
Momentos de Inércia de Áreas Compostas

Uma área composta é constituída por uma série de outras áreas ou formas geométricas mais simples, como semicírculos, retângulos e triângulos. Desde que o momento de inércia de cada uma dessas partes seja conhecido, ou possa ser determinado em relação a um eixo comum.

Exercício – Calcule o momento de inércia da área composta mostrada na Figura em relação ao eixo *x*

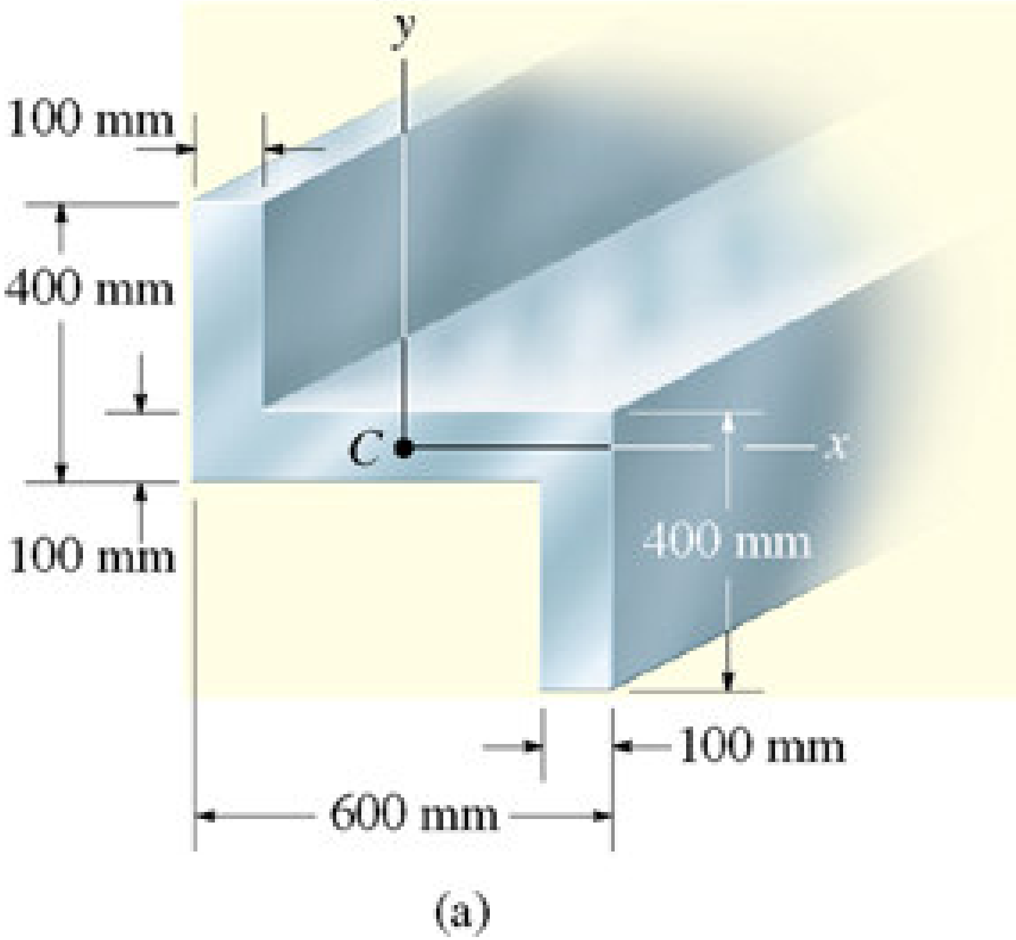


(a)

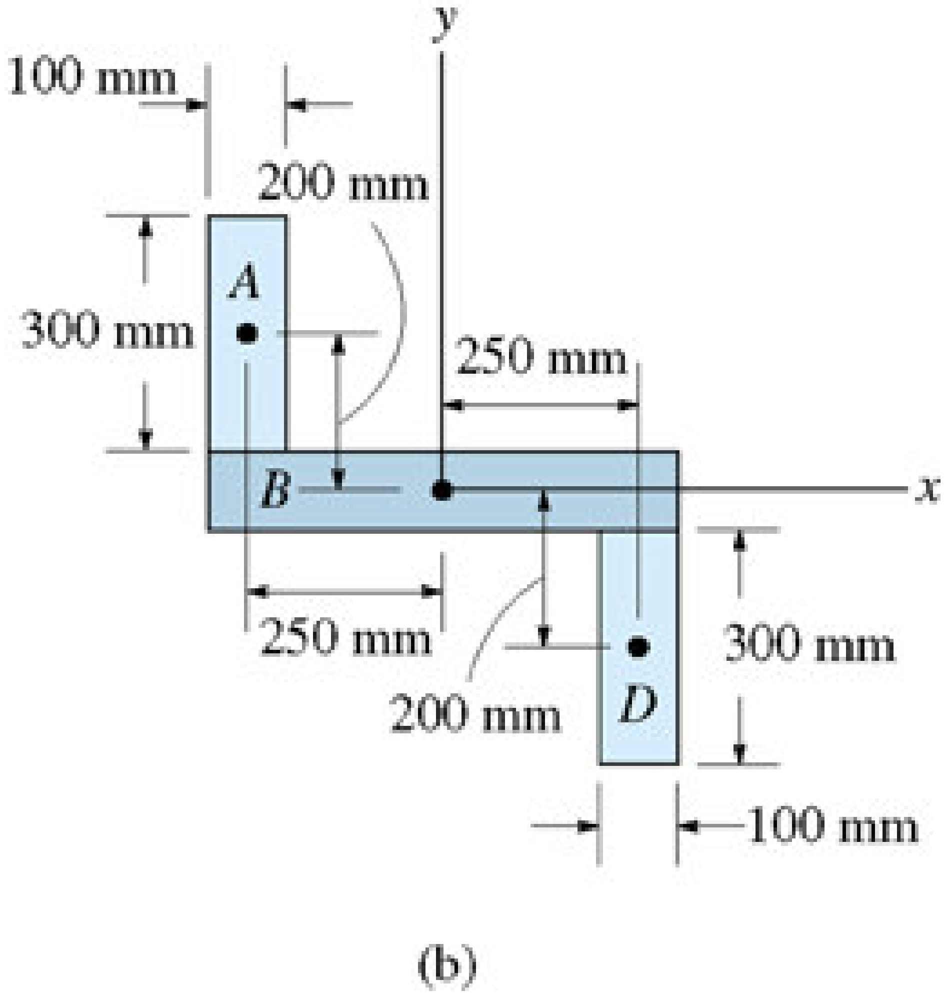


(b)

2- Determine os momentos de Inércia da área da seção reta da viga mostrada na Figura. Em relação aos eixos x e y que passam pelo seu centróide.



(a)

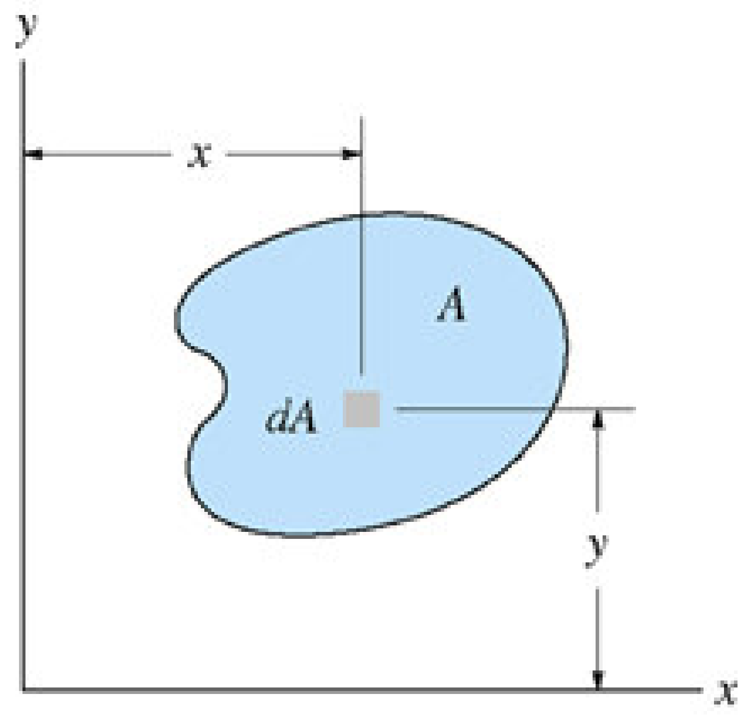


(b)

Resolver os exercícios 10.45, 10.49 e 10.51 do Hibbeller

Produto de Inércia de Uma Área $I_{xy} = \int_A xydA$

Se o elemento de área escolhido tem uma dimensão infinitesimal em duas direções, como mostra a figura, uma integração dupla deve ser efetuada para calcular a integral acima. Na maioria dos casos, é mais simples escolher um elemento de área com uma dimensão infinitesimalou largura em apenas uma direção; nesses casos é necessária apenas uma simples integração.

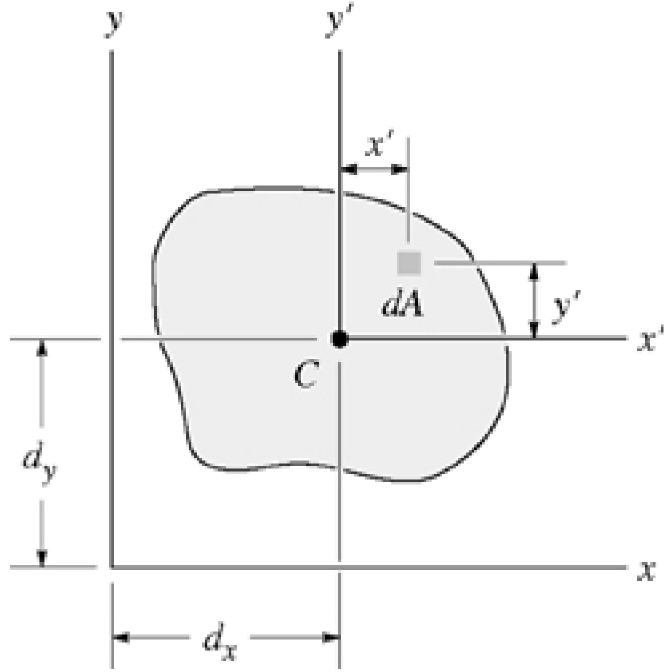


Teorema dos Eixos Paralelos

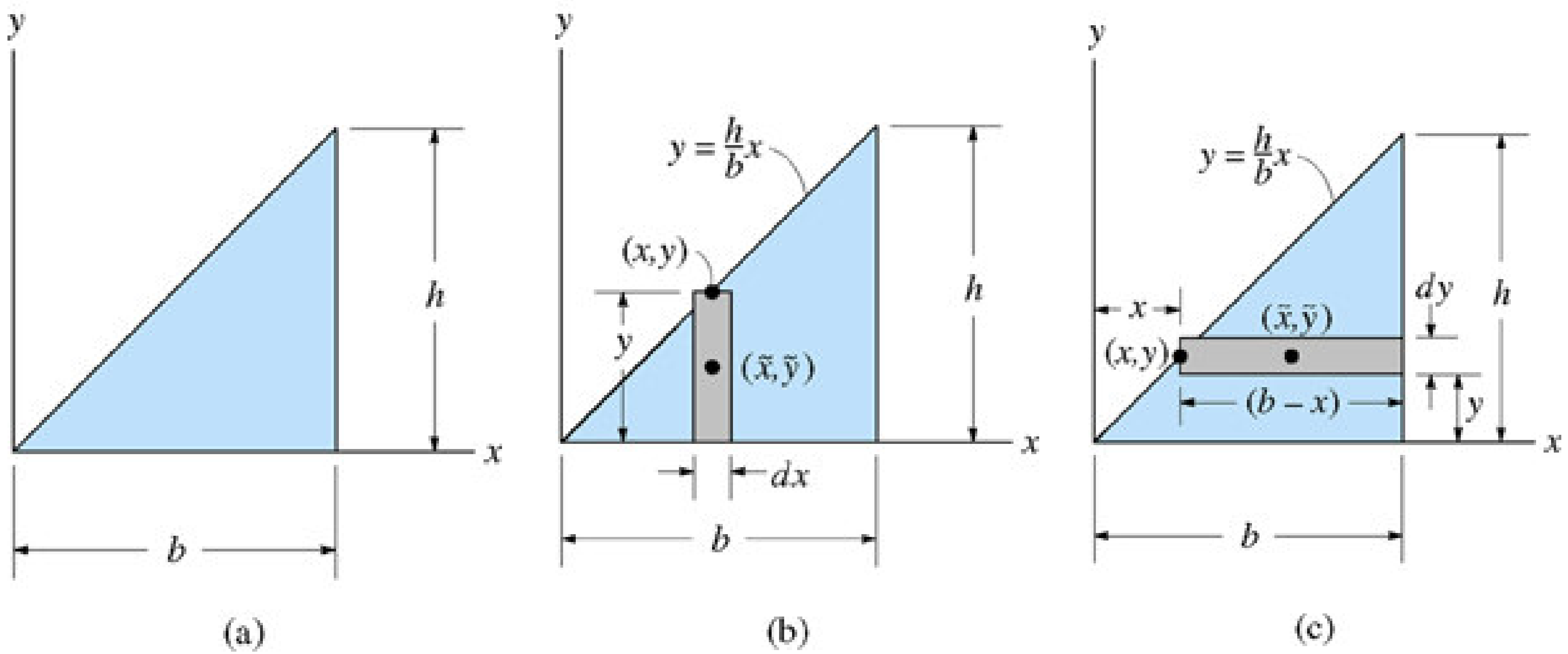
Considere a área sombreada mostrada na Figura, onde x' e y' representam um par de eixos passando pelo centróide da área, enquanto x, y representam o par de eixos paralelos correspondente. Como o produto de inércia de dA em relação aos eixos x,y é $dI_{xy}=(x'+d_x)(y'+dy)dA$**, então para toda área**

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y) dA = \int_A x' y' dA + d_x \int_A y' dA + d_y \int_A x' dA + d_x d_y \int_A y' dA$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A d_x d_y$$



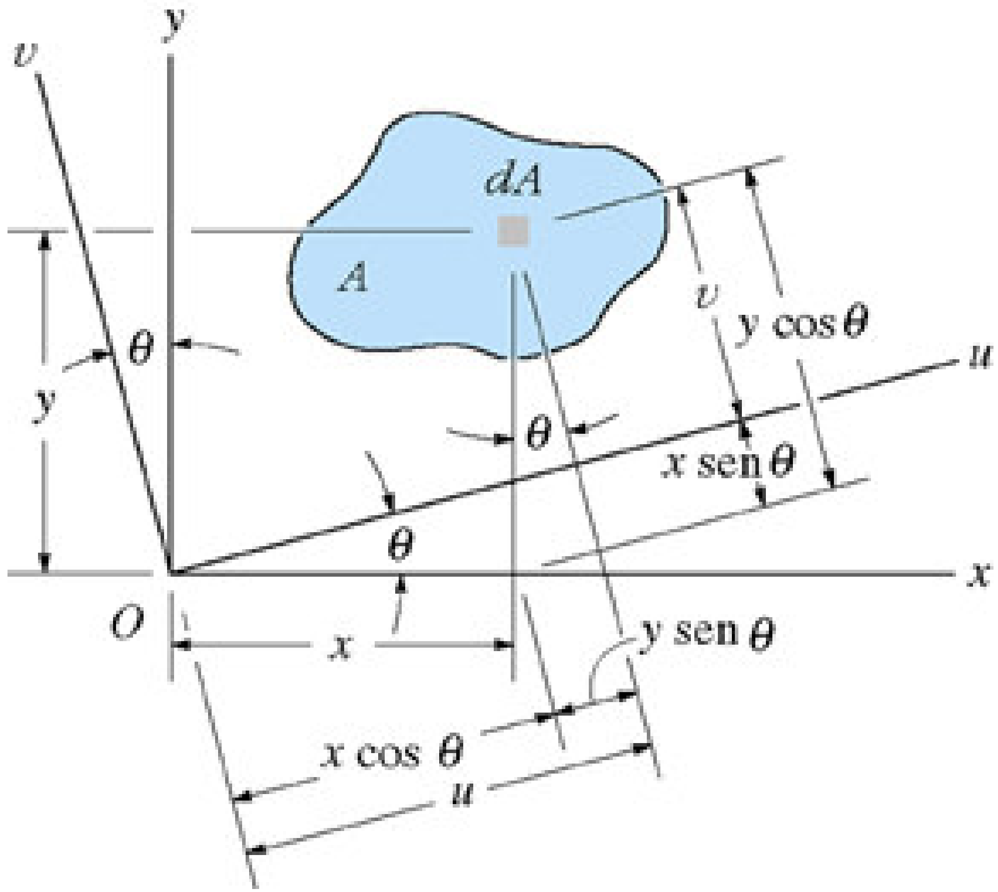
Exercício – Determine o produto de Inércia do triângulo mostrado na Figura abaixo



Momento de Inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$u = x\cos\theta + y\,sen\theta$$

$$v = y\cos\theta - x\,sen\theta$$



Os momentos e o produto de inércia em relação aos eixos *u* e *v* são

$$dI_u = v^2 dA = \left(y\cos\theta - x\,sen\theta\right)^2 dA$$

$$dI_v = u^2 dA = \left(x\cos\theta + y\,sen\theta\right)^2 dA$$

$$dI_{uv} = uv\,dA = \left(x\cos\theta + y\,sen\theta\right)\left(y\cos\theta - x\,sen\theta\right)dA$$

Expandindo cada expressão e integrando, levando em conta que

$$I_x = \int y^2 dA,\ I_y = \int x^2 dA,\ I_{xy} = \int xy\,dA$$

$$I_u = I_x \cos^2\theta + I_y sen^2\theta - 2I_{xy} sen\theta\cos\theta$$

$$I_v = I_x sen^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy} sen\theta\cos\theta$$

$$I_{uv} = I_x sen\theta\cos\theta - I_y sen\theta\cos\theta + I_{xy}\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right)$$

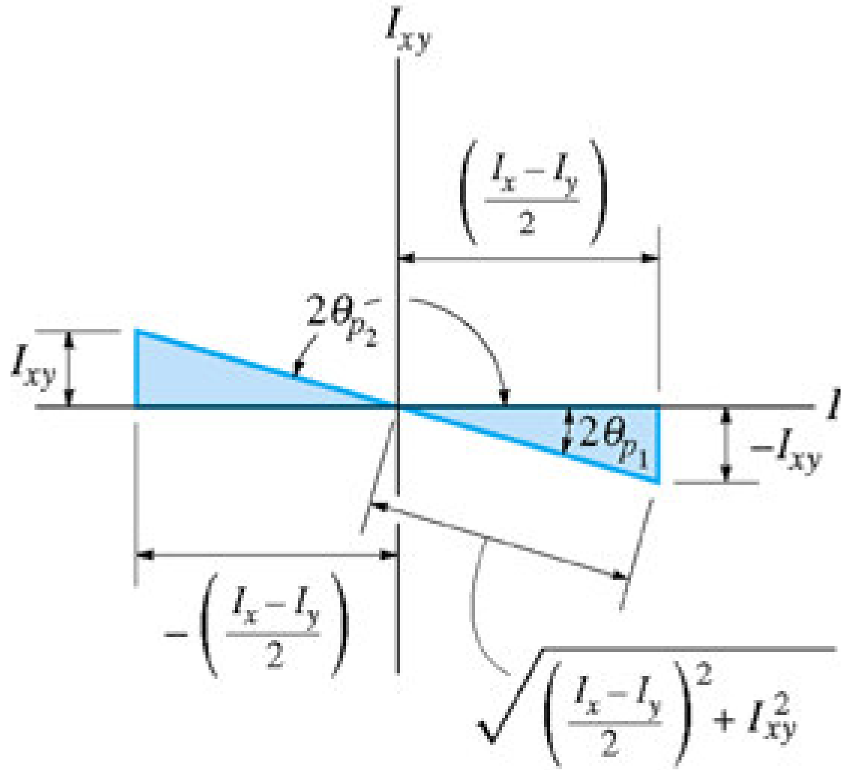
$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy} sen2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy} sen2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} sen2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

O momento Polar de Inércia em relação ao eixo z que passa pelo ponto O é independente da orientação dos eixos u,v, isto é

$$J_o = I_u + I_v = I_x + I_y$$



Momentos Principais de Inércia

O Ângulo θ= θp define a orientação dos eixos principais para a área.

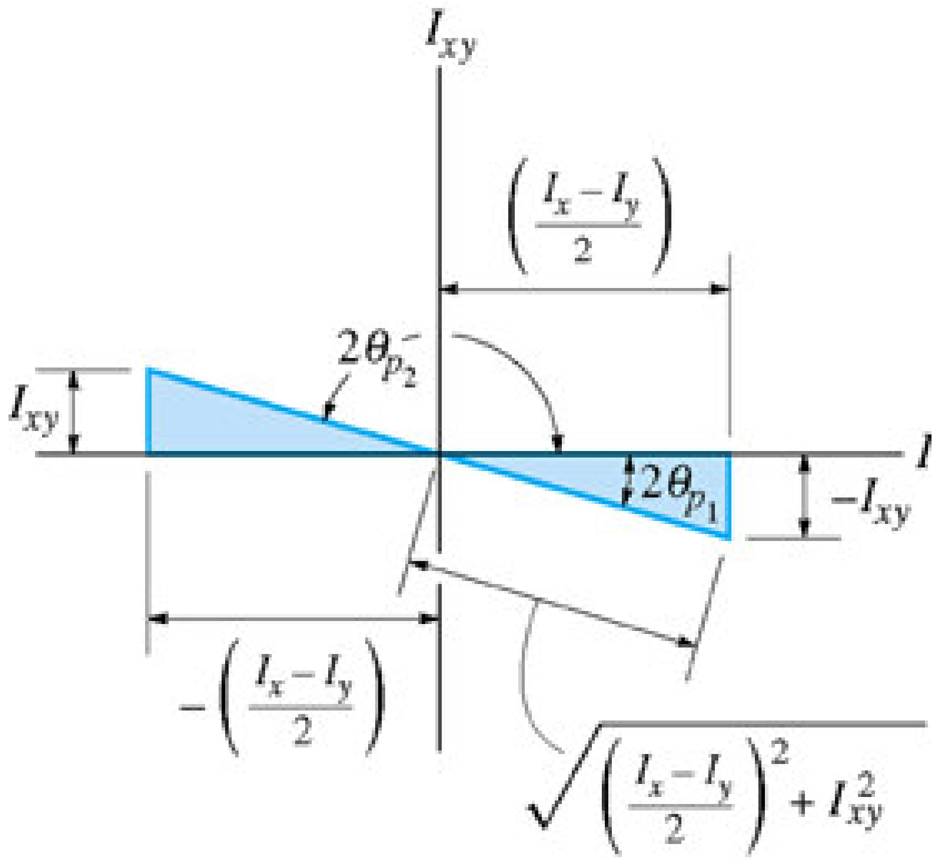
$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) sen 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$tg\, 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{\left(I_x - I_y\right)/2}$$

Raízes

$$sen2\theta_{p1} = -I_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p1} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

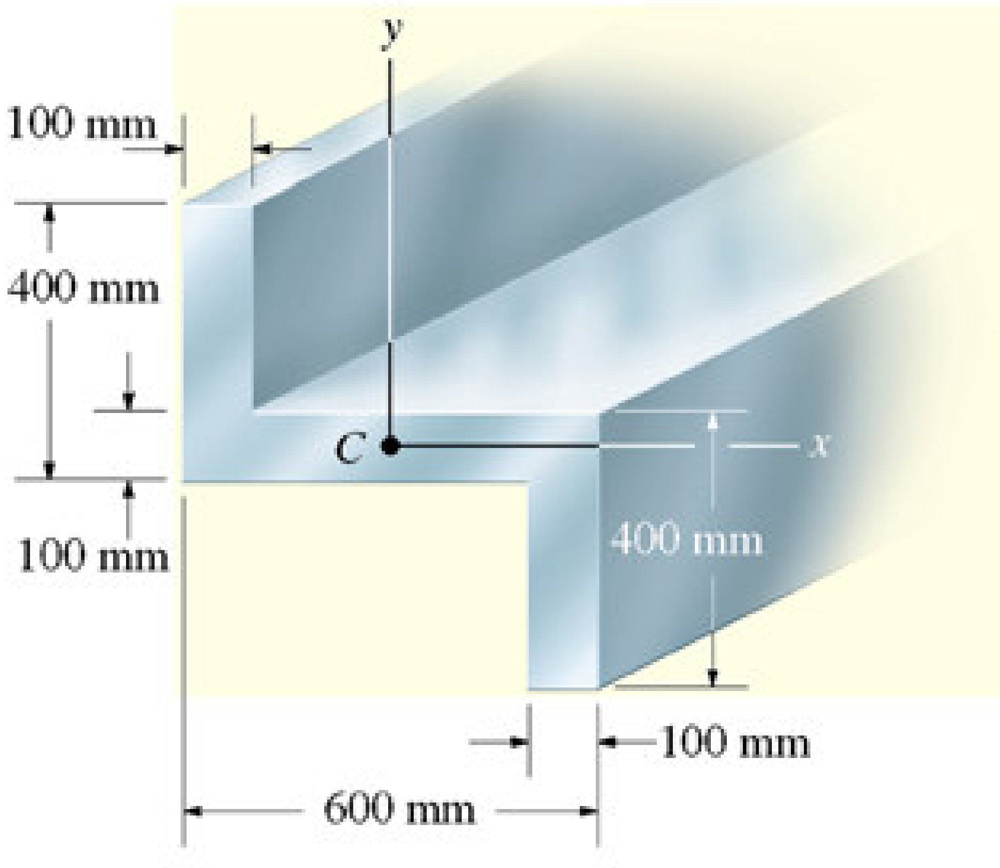


$$sen2\theta_{p2} = I_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

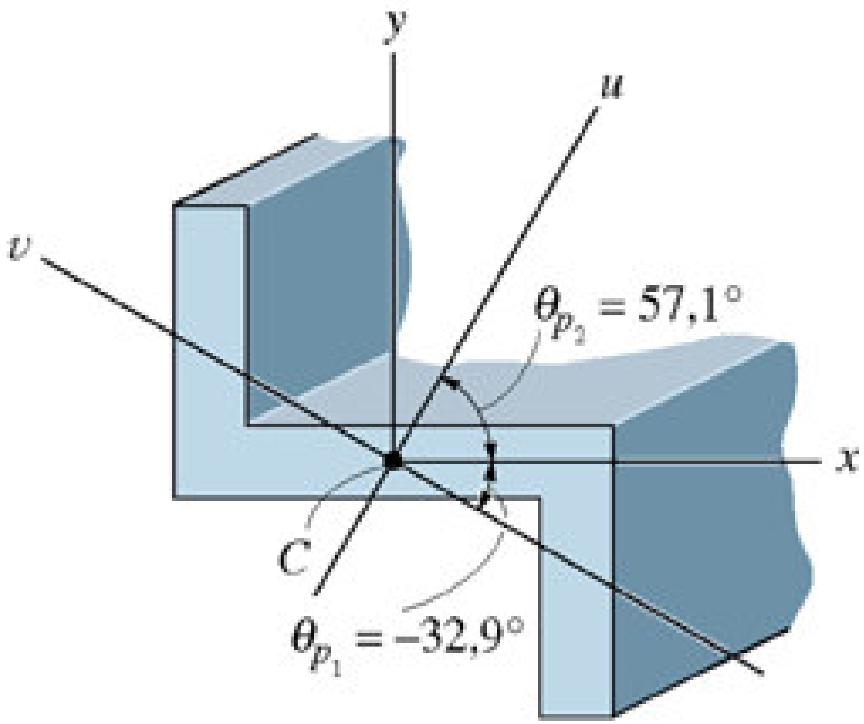
$$\cos 2\theta_{p2} = -\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}}$$

Exercício –Determine os momentos principais de inércia da área da seção transversal da viga mostrada na Figura em relação a um dos eixos que passa pelo centróide.



(a)



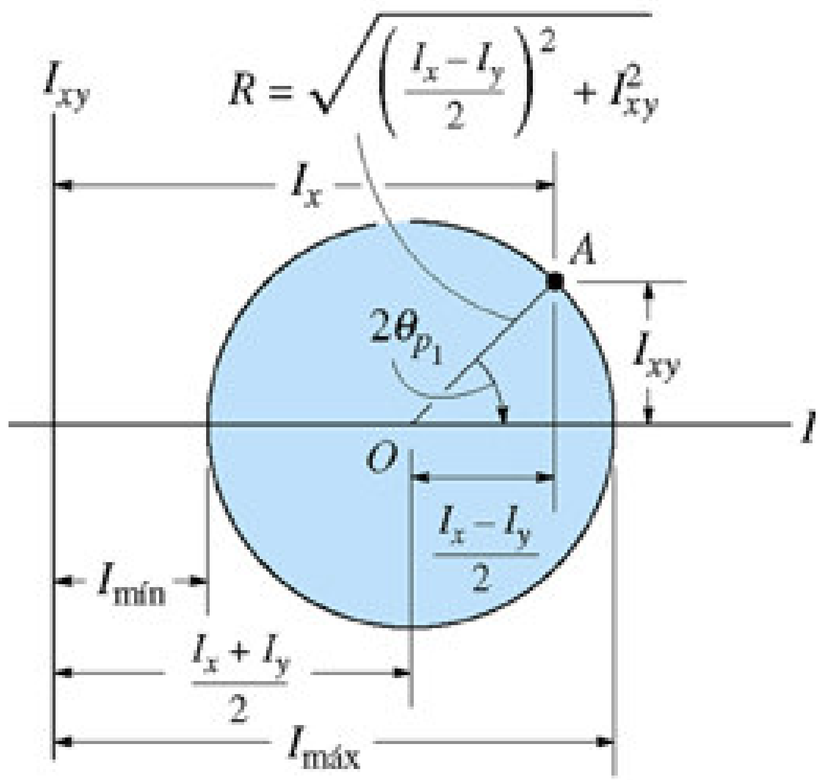
(b)

Círculo de Mohr para Momentos de Inércia

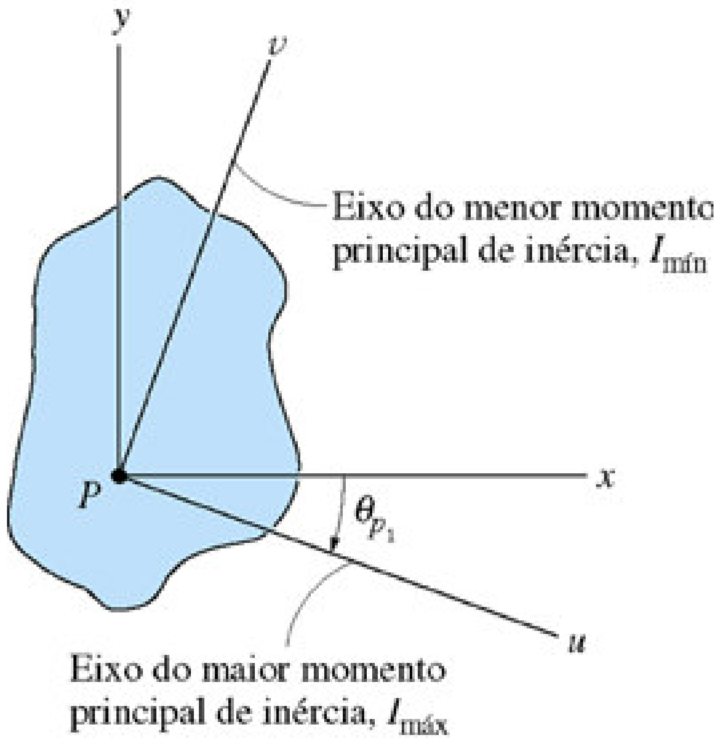
$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

$$\left(I_u - a\right)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

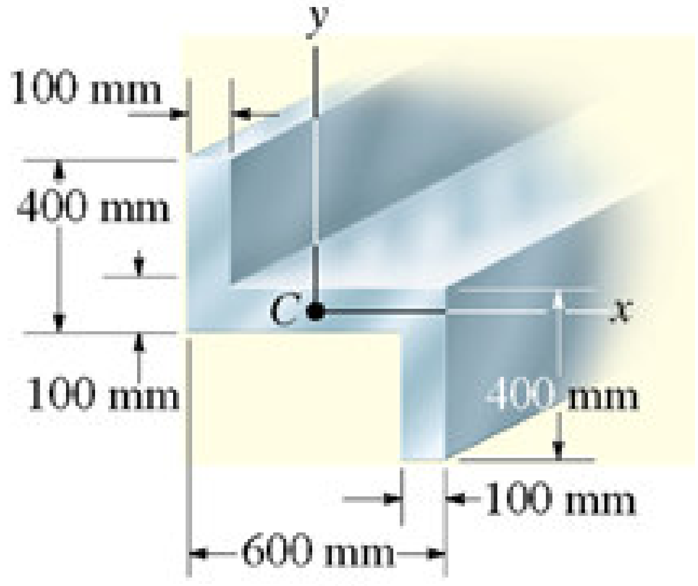


(b)

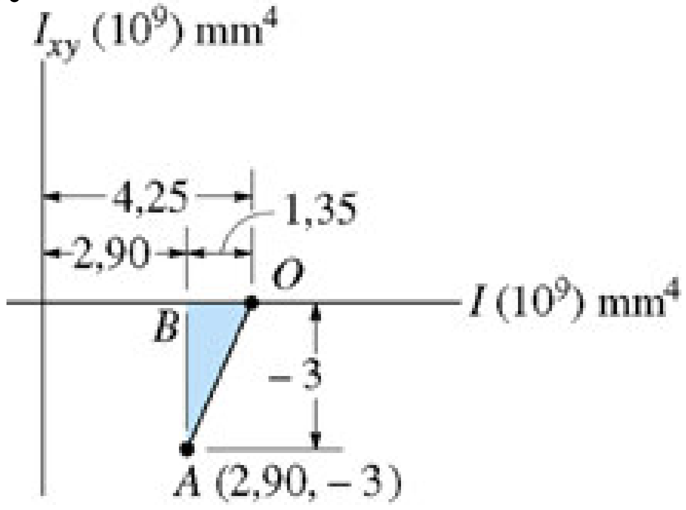


(a)

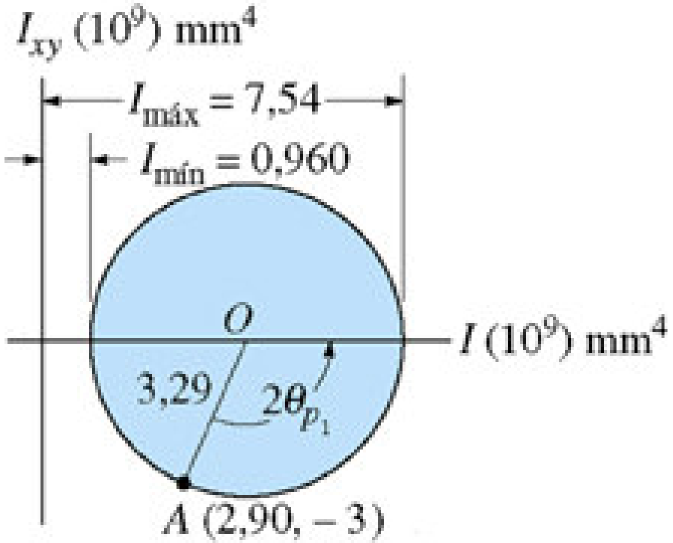
Ex- Utilizando o círculo de Mohr determine os momentos principais de inércia para a área da seção transversal da viga na Figura em relação a um eixo que passa pelo centróide.



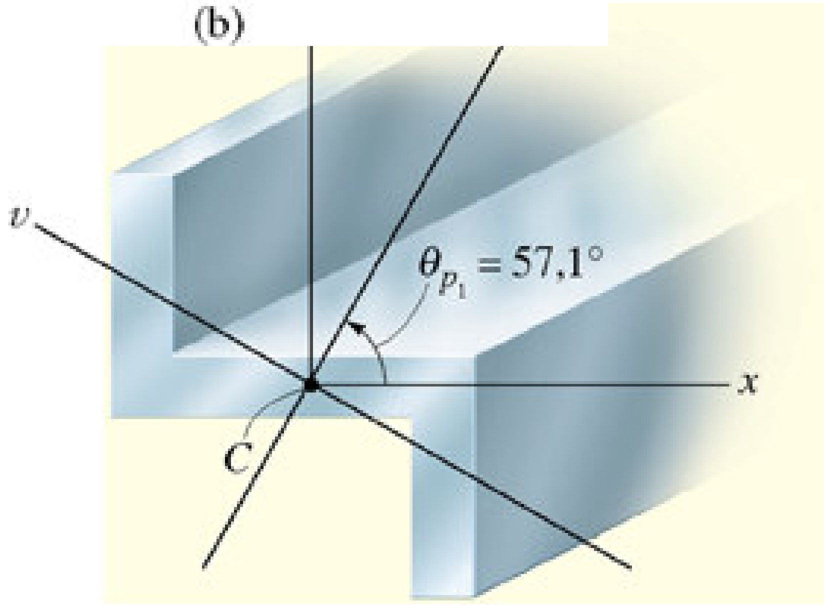
(a)



(b)



(c)



(d)

Resolver os exercícios do Hibbeller 10.54, 10.59,10.69,10.80