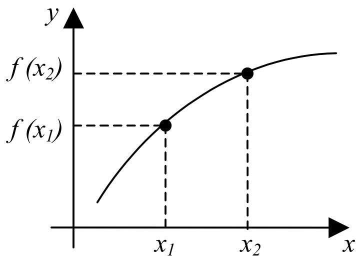
5.1- Teoremas Fundamentais do Cálculo Diferencial

Os teoremas de Rolle, de Lagrange, de Cauchy e a regra de L'Hospital são os quatro teoremas fundamentais do cálculo diferencial e são úteis no estudo das funções reais de variável real.

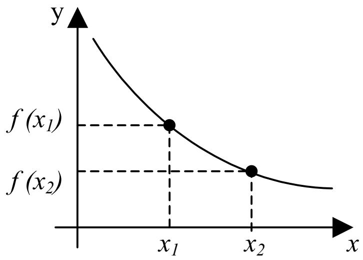
<u>Definições:</u>

1) Seja $y = f(x)$ definida em um intervalo I, então:

i) f é crescente em I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$

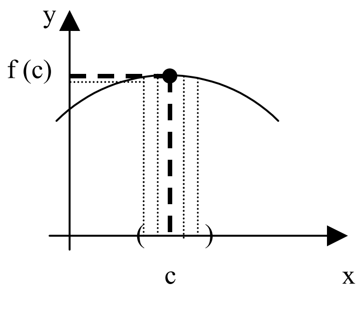


ii) f é decrescente em I se $f(x_1) \geq f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$

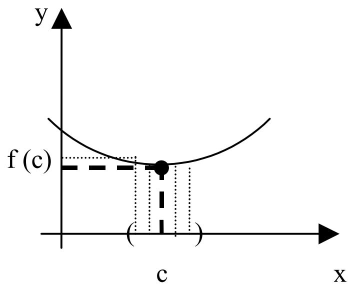


2) Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo I e seja $c \in I$, então:

i) $f(c)$ é **Máximo** de f se $f(c) \geq f(x)\ \forall x \in I$



ii) $f(c)$ é **Mínimo** de f se $f(c) \leq f(x)\ \forall x \in I$



Teoremas:

1) Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume o seu máximo e o seu mínimo ao menos uma vez em $[a, b]$.

2) Seja $y = f(x)$ uma função que tem um extremo (máximo ou mínimo) para um valor c, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c) = \nexists$

<u>Hipótese:</u> c é abcissa de máximo (mínimo)

<u>Tese:</u> $f'(c) = 0 \quad \exists\ f'(c)$

<u>Demonstração:</u>

Se c é máximo $\rightarrow f(c) \geq f(x)\ \forall x \in I$

$$\exists f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ \exists \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \end{cases}$$

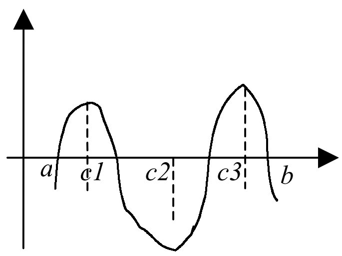
$$* \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

$$* \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

5.1.1- Teorema de Rolle

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. derivável no intervalo (a, b) se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto $x \in (a, b)\ /\ f'(c) = 0$.



$f'(c1)=0$
$f'(c2)=0$
$f'(c3)=0$

Para $f(a) = f(b) = k$ o teorema também é válido.

5.1.2- Teorema de Lagrange (Teorema do valor Médio - T. V. M.)

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b) então $\exists c \in (a,b) / \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ = tan α.

<u>Exemplos:</u>

Verificar as hipóteses do Teorema do Valor Médio e em caso afirmativo determinar os valores de c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

1) $f(x) = x^2 \qquad [0, 2]$

→ Contínua em [a, b] ?
Todo polinômio é contínuo. OK!
→ Derivável?
Sim. OK!
f '(x) = 2x → *∃ c*
$* f(b) = f(2) = 4$
$* f(a) = f(0) = 0$
$* f'(x) = 2x$
$* f'(c) = 2c$

$$\rightarrow\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad 2c = \frac{4+0}{2-0} \quad \therefore \quad c = 1$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $[-2, 2]$
→ Contínua em *[-2, 2]* ?
OK!
→ Derivável?
Não.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad f'(x) = \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \nexists \text{ para } x = 0$$

→ T.V.M. não se aplica pois não se verifica essa hipótese.

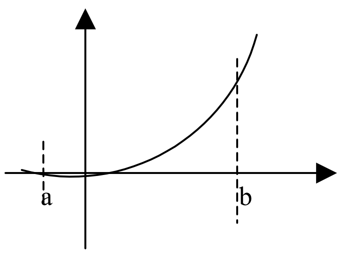
5.2) Estudo da Variação das Funções

5.2.1) Crescimento e Decrescimento

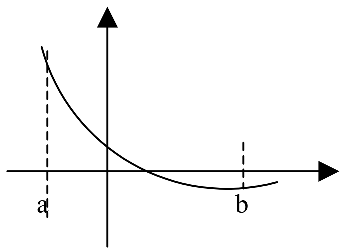
Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então:

i) Se $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \rightarrow f$ é crescente em (a, b)

ii) Se $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \rightarrow f$ é decrescente em (a, b)

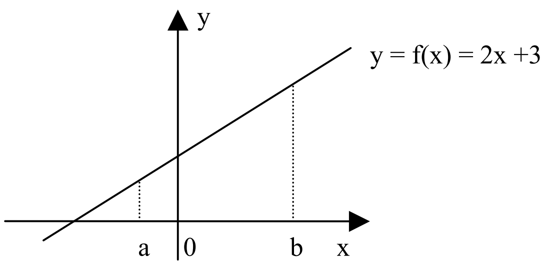


f '(x) > 0 →crescente



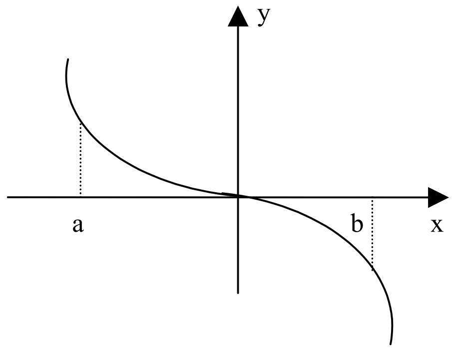
f '(x) < 0 → decrescente

Exemplo 1: A função f(x) = 2x + 3 é sempre crescente.



Função crescente

Exemplo2: A função f(x) = - $2x^3$ é sempre decrescente.



Função decrescente

<u>Demonstração:</u>

<u>Hipótese:</u> f é contínua em *[a, b]*   <u>Tese:</u> f é crescente em *(a, b)*
derivável em *(a, b)*
$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$

* Pelo T.V.M. $\exists\ c \in (a, b) \ / \ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

* $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \therefore f'(c) > 0$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

$b > a \ \rightarrow \ b - a > 0 \ \rightarrow f(b) - f(a) > 0 \ \therefore \boxed{f(b) > f(a) \ \rightarrow f \text{ é crescente}}$

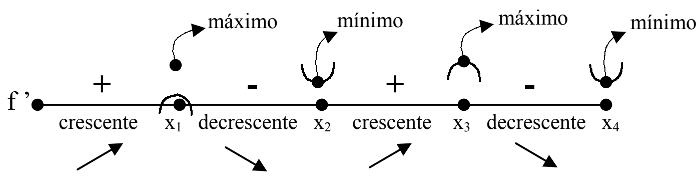
<u>Hipótese:</u> f é contínua em *[a, b]*   <u>Tese:</u> f é decrescente em *(a, b)*
derivável em *(a, b)*
$f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$

* $\exists\ c \in (a, b) \ / \ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

* $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b) \ \therefore f'(c) < 0$

$b > a \rightarrow f(b) - f(a) < 0 \ \therefore \boxed{f(b) < f(a) \ \rightarrow f \text{ é decrescente}}$

$\boxed{y = f(x)}$ → Para saber se uma função é crescente ou decrescente deve-se analisar o sinal da derivada da equação.



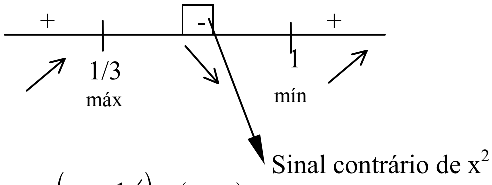
5.2.2- Função Monótona

Uma função é monótona num intervalo I se ela for crescente ou decrescente em I.

<u>Exercícios:</u> Determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento e os pontos de máximo e mínimo, se existir, das funções:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.(3).(1)}}{2.(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$



Intervalo de crescimento $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

Intervalo de decrescimento $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

Para $x = 1/3 \rightarrow y = ?$

$$y = \frac{1}{27} - 2\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3} + 2 = \frac{1 - 6 + 9 + 54}{27}$$

$$y = \frac{58}{27}$$

$\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ máximo

Para $x = 1 \rightarrow y = ?$

$y = 1 - 2 + 1 + 2$

$y = 2$

$(1, 2)$ mínimo

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$

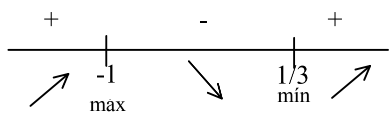
$$f'(x) = \frac{(1 + 3x^2)(2x - 1) - (x^2 - x)(6x)}{\underbrace{(1 + 3x^2)^2}_{\text{sempre positivo}}}$$

Analisando o sinal do numerador:

$2x - 1 + 6x^3 - 3x^2 - 6x^3 + 6x^2 = 3x^2 + 2x - 1$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.(3).(-1)}}{2.(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$



Intervalo de crescimento $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Intervalo de decrescimento $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ máximo

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ mínimo

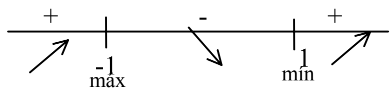
3) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$



Intervalo de crescimento $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
Intervalo de decrescimento $(-1,1)$
$(-1,0)$ máximo
$(1,-4)$ mínimo

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$
$3x^2 - 12x + 12 = 0\ (\div 3)$
$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2} \quad x = \dfrac{4}{2} \quad x = 2$

* 1 raiz, 1 único sinal (ou positivo ou negativo)

+ + + + + + + + + | + + + + + + + + +
↗ 2 ↗

* x = 2 não é máximo nem mínimo, *f* é sempre crescente

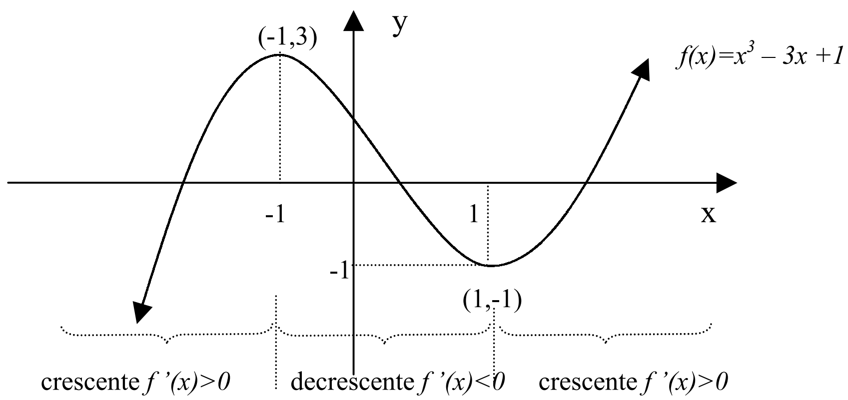
5) Determine os intervalos nos quais a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ seja monótona (crescente ou decrescente).

Temos $f(x) = x^3 - 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm 1$

f' + | - | +
- 1 + 1

a) $f'(x) > 0$ para $x < -1$, ou em $(-\infty, -1)$, $f(x)$ é crescente
b) $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 1$, ou em $(-1, 1)$, $f(x)$ é decrescente
c) $f'(x) > 0$ para $x > 1$, ou em $(1, \infty)$, $f(x)$ é crescente

Obs: Em $x = -1$ e $x = 1$ $f'(x) = 0$, nestes pontos $f(x)$ não é crescente nem decrescente!!



Os pontos:

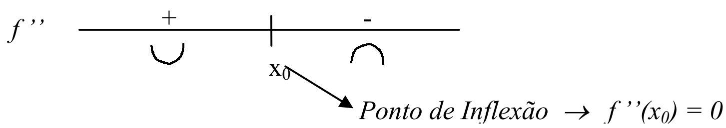
(-1, 3), "topo da colina" são máximos relativos;
(1, -1), "fundo do vale" são mínimos relativos.

Exercício proposto: Estudar a função $f(x) = x^2 - 6x + 3$

5.2.3- Concavidade

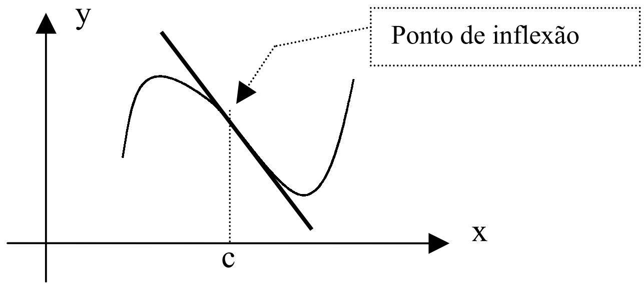
O sinal algébrico da 2ª derivada determina se o gráfico é curvado para cima (em forma de xícara) ou curvado para baixo (em forma de boné).

Seja $y = f(x)$, uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então:
i) Se $f''(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \ \rightarrow f$ tem a concavidade para cima em (a, b)
ii) Se $f''(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \ \rightarrow f$ tem a concavidade para baixo em (a,b)



5.2.4- Pontos de Inflexão

É um ponto onde a curva muda a sua concavidade e o gráfico da função intercepta a tangente no ponto.



Neste ponto $f''(x) = 0$. Esta condição é necessária mas não é suficiente! (veja exemplo a seguir)

__Exercícios__

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

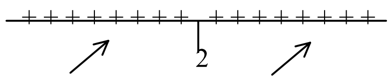
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \ (\div 3)$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2} \qquad x = \frac{4}{2} \qquad x = 2$$

* 1 raiz, 1 único sinal (ou positivo ou negativo)



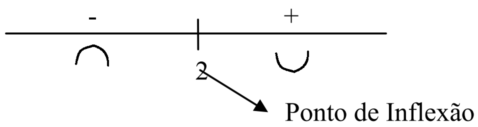
* $x = 2$ não é máximo nem mínimo, f é sempre crescente

* Estudo do sentido da concavidade

$f''(x) = 6x - 12$

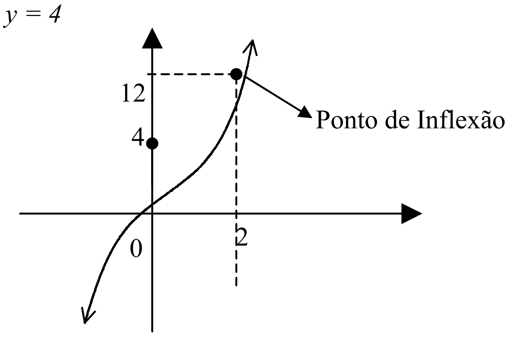
$6x - 12 = 0$

$x = 2$



(2, 12) Ponto de inflexão

Para $x = 0, \ y = 4$



5.2.5- Revisão para o cálculo de Máximos e Mínimos de Funções

__Máximo Relativo__

Uma função $f(x)$ possui um MÁXIMO RELATIVO (ou máximo local) em um ponto de abscissa "c", se existir um intervalo aberto I contendo "c" tal que $f(x)$ seja definida em I e $f(c) \geq f(x)$ seja verdadeiro para todo x em I.

Mínimo Relativo

Uma função *f(x)* possui um MÍNIMO RELATIVO (ou mínimo local) em um ponto de abscissa "*c*", se existir um intervalo aberto *I* contendo "*c*" tal que *f(x)* seja definida em *I* e $f(c) \leq f(x)$ seja verdadeiro para todo *x* em *I.*

OBS.: Se uma função *f(x)* possui um máximo ou um mínimo num ponto "c", diz-se que *f(x)* possui um EXTREMO RELATIVO em "c".

5.2.6- Ponto Crítico

Diz-se que um ponto "*c*" é um PONTO CRÍTICO para uma função *f(x)* quando *f(x)* é definida em "*c*", mas não diferenciável em "*c*", ou quando $f'(c) = 0$.

Teste da Primeira Derivada para Extremos Relativos

Teorema:

Seja uma função *f(x)* definida e contínua no intervalo aberto (*a, b*); considere que o ponto "*c*" pertença a (*a, b*) e suponha que *f(x)* seja diferenciável em todos os pontos em (*a, b*) exceto, possivelmente em "*c*". Então:

- Se $f'(x) > 0$ para todo o ponto *x* em (*a, c*) e $f'(x) < 0$ para todo ponto x em (*c, b*) , então *f(x)* possui um *máximo* relativo em "*c*".
- Se $f'(x) < 0$ para todo o *x* em (*a, c*) e $f'(x) > 0$ para todo o ponto *x* em (*c, b*), então *f(x)* possui *mínimo* relativo em "*c*".

5.2.7- Teste da Segunda Derivada para Extremos Relativos

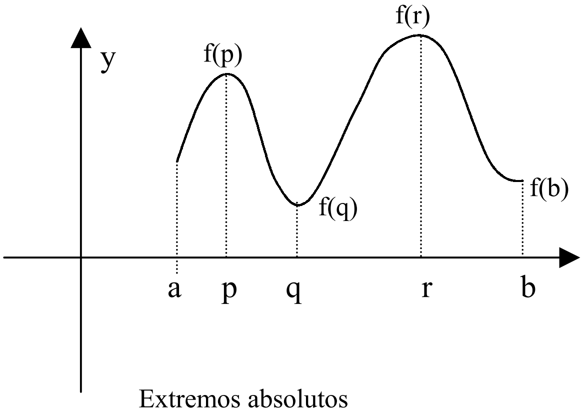
Teorema:

Seja uma função *f(x)* definida e contínua no intervalo aberto *I* e suponha que "*c*" seja um ponto em *I* tal que $f'(c) = 0$ e $f''(c)$ exista. Então:

- Se $f''(c) > 0$, então *f(x)* possui um *mínimo* relativo em "*c*".
- Se $f''(c) < 0$, então *f(x)* possui um *máximo* relativo em "*c*".

5.3- Extremos Absolutos

Supondo uma função *f* definida no intervalo *I*, e seja *c* um ponto deste intervalo. Se *f(c)* $\geq$ *f(x)* para todo *x* de *I*, então *f(c)* é um máximo absoluto de I. Se *f(c)* $\leq$ *f(x)* para todo *x* de *I*, então *f(c)* é um mínimo absoluto em c.



Extremos absolutos

$f(r) > f(p) \rightarrow f(r)$ é o máximo absoluto em *I* $\quad$ $I = [a,b]$

$f(q) < f(b) \rightarrow f(q)$ é o mínimo absoluto em *I*

Exercício Proposto: Determine os extremos absolutos da função f(x) = $\sqrt{9 - x^2}$ no intervalo [-3,3]

<u>Exercícios</u>: Determinar os pontos críticos (máximo e mínimo) das funções:

1) f (x) = $x^3 - 4x$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x \begin{cases} f''\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0 \rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{é Mínimo} \\ f''\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \rightarrow x = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \quad \text{é Máximo} \end{cases}$$

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0\ (\div 3)$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \rightarrow x = 1$ *é Máximo*

$f''(3) = 18 - 12 > 0 \rightarrow x = 3$ *é Mínimo*

3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 4$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 12\ (\div(-3))$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 2$

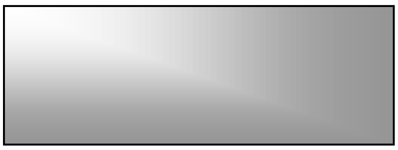
$f''(x) = -6x + 12$

$f''(2) = 0 \rightarrow$ *não tem máximo nem mínimo*

$x = 2 \rightarrow$ *é ponto de inflexão.*

5.4- Problemas de Aplicação de Máximos e Mínimos

1) Determinar as dimensões de um retângulo de perímetro 20 e que a área seja máxima:



y

$P = 20$

$2x + 2y = 20$

$x + y = 10$

$y = 10 - x$

$A = x \cdot y$

$A = x(10 - x)$

$A = 10x - x^2$

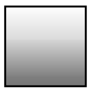
Derivando a área:

$A' = 10 - 2x$

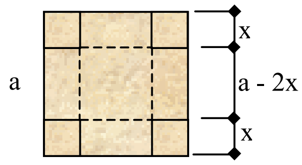
$10 - 2x = 0$

$x = 5$

$A'' = -2$

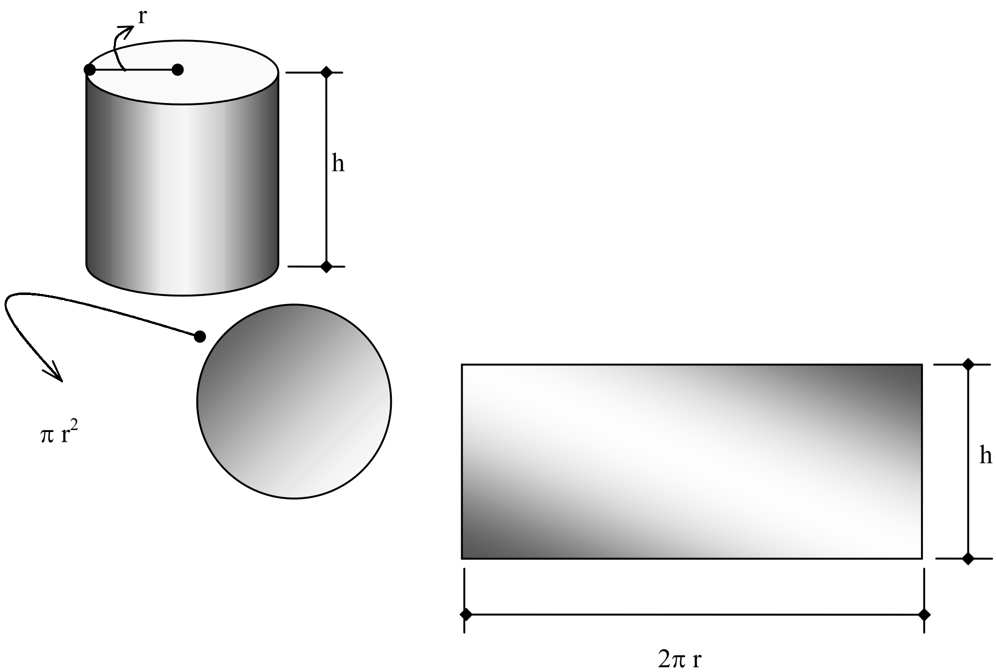
$-2 < 0 \rightarrow$ *Máximo* $\boxed{x = 5 \rightarrow y = 5}$ Quadrado 

2) Desejamos fabricar uma caixa com uma folha quadrada de lado "*a*" cortando quadrados de lado "*x*" desconhecido nos quatro cantos da folha. Determinar o valor de "*x*" a fim de que a caixa tenha volume máximo.



$$V = (a-2x)^2.x$$
$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$$
$$V = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$
$$*V' = a^2 - 8ax + 12x^2$$
$$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$
$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$
$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4(12)(a^2)}}{2(12)} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$
$$x_1 = \frac{a}{2} \rightarrow Mínimo$$
$$x_2 = \frac{a}{6} \rightarrow Máximo$$
$$*V'' = 24x - 8a$$
$$V'' = 24\left(\frac{a}{2}\right) - 8a > 0 \rightarrow Mínimo$$
$$V'' = 24\left(\frac{a}{6}\right) - 8a < 0 \rightarrow Máximo$$
Resposta :
$$x = \frac{a}{6}$$

3) Deseja-se fabricar um recipiente de forma cilíndrica por meio de uma folha metálica de superfície *S*. Calcular a relação que deve existir entre a altura "*h*" e o raio "*r*" para que o volume seja máximo. Supõe-se não haver perda alguma de metal, que sua espessura permanece constante e que <u>não há tampa</u>.



$* \; S = \pi \; r^2 + 2 \; \pi \, r \, h$

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$$

$* \; V = \pi \, r^2 \, h$

$$V = \pi \, r^2 \left(\frac{S - \pi r^2}{2\pi r} \right) \therefore V = \frac{1}{2}\left(Sr - \pi r^3\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2}\left(S - 3\pi r^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(S - 3\pi r^2\right) = 0 \therefore S - 3\pi r^2 = 0 \therefore r^2 = \frac{S}{3\pi} \therefore r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$* \; S = 3 \; \pi \, r^2$

$3 \; \pi \, r^2 \; = \pi \; r^2 + 2 \; \pi \, r \, h,$

fazendo as simplificações:

h=r

5.5- Esboço do Gráfico de Funções

__Exercícios__

1- Estude as funções dadas com relação à concavidade e pontos de inflexão e esboce o gráfico de cada uma

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

b) $f(x) = xe^{-2x}$

c) $f(x) = x \ln x$

d) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

5.6- Teorema de Cauchy

Sejam *f (x)* e *g (x)* definidas em um intervalo fechado *[a, b]* e derivável em *(a, b)*. Se *g' (x)* for diferente de zero para todo $x \in (a, b)$ então $\exists$ pelo menos um número real $c \in (a, b)$ / $\boxed{\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$.

5.7- Regra de L'Hospital

Considere duas funções *f (x)* e *g (x)* que para algum intervalo fechado verificam o Teorema de Cauchy. Se para algum número real *a* do intervalo considerado tivermos *f (a) = g (a) = 0*, então demonstra-se que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

__Exemplos:__

1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital $\rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x}{1} = \frac{2.2}{1} = 4$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\, 5x}{x} = \frac{0}{0} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital $\rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 5x.5}{1} = 5$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} = \frac{0}{0} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital $\rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x - 6}{2x - 7} = 0$

OBS.: A regra de L'Hospital poderá ser usada para indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital novamente $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \therefore$ indeterminação

aplicando L'Hospital novamente $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{k}{e^x} = 0}$$

Outras indeterminações:

- $0 . \infty$
- $\infty - \infty$
- 0^0
- 1^∞
- ∞^0
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Indeterminação da forma $0 . \infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) . g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} \text{ ou } \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

agora aplica-se a regra de L'Hospital.

Exemplo:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2.\ln x = 0.(-\infty) \therefore$ indeterminação

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \text{(aplicando L'Hospital)} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

Indeterminação da forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x).g(x)}}$$

agora aplica-se a regra de L'Hospital.

Exemplo:

1) $\lim_{x\to 0^+}\left(\text{cossec } x-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty \therefore$ indeterminação

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x - sen\, x}{x.sen\,x}\right)=(\text{aplicando L'Hospital})\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1 - \cos x}{x.cos\,x+sen\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{sen\ x}{-x.sen\,x+cos\,x+cos\,x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

Indeterminação da forma 0^0, 1^∞ ou ∞^0 :

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=y$$

$$\ln y=\ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \quad\rightarrow\quad \ln y=k \quad\rightarrow\quad \boxed{y=e^k}$$

$$\ln y=\underbrace{\lim_{x\to a} g(x).\ln f(x)}_{k}$$

Resumindo

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^k$$

$$k=\lim_{x\to a} g(x).\ln f(x)$$

Exemplo:

1) $\lim_{x\to 0} x^x=e^k$

$k=\lim_{x\to 0} x.\ln x=0.(-\infty) \therefore$ indeterminação

$$k=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=(\text{aplicando L'Hospital})\ \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-x^{-2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

Exercícios

1- Calcular o limite (que dá 0/0), por L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{3}{5}$$

Este limite poderia ser resolvido da forma:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{5}$$

2- Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{0}{0}$, mas por L'Hôpital.

3- Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12}=\frac{0}{0}$ (indeterminado)