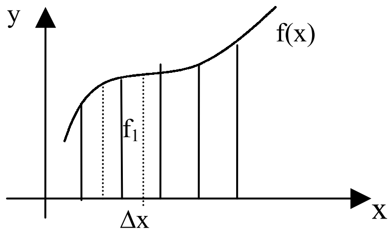
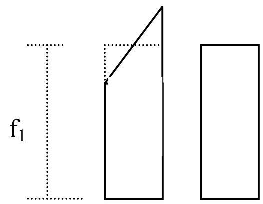
CAPÍTULO 8 - APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

8.1- A Integral Definida para Cálculo de Área

A integral definida de uma função *f(x)*, num intervalo *[a,b]* é igual à área entre a curva de *f(x)* e o eixo dos *x*.





$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\Delta x} f_1\,dx + \int_{a+\Delta x}^{a+2\Delta x} f_2\,dx + \ldots = f_1 \int dx + f_2 \int dx + \ldots$$

pois, o f_i para um dado retângulo é constante

$$= f_1\,\Delta x + f_2\,\Delta x + \ldots = A_1 + A_2 + \ldots = A$$

$\int_a^b f(x)\,dx = A$ área sob a curva

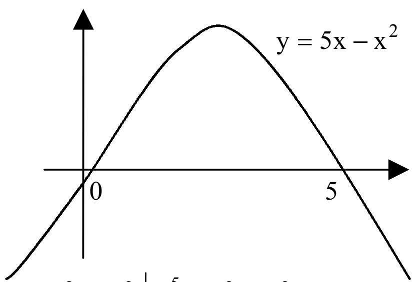
Exercícios

1) Determinar a área limitada pela curva $y = 5x - x^2$ e pelo eixo x.

$5x - x^2 = 0$

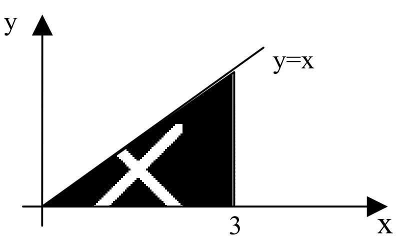
$x(5 - x) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$



$$A = \int_0^5 5x - x^2 dx = 5.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^5 = \frac{5^3}{2} - \frac{5^3}{3} = \frac{5}{6} \text{ u.a.}$$

2) Dada a função $y = x$ calcular a área sob o gráfico de $x = 0$ a $x = 3$.



$$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}$$

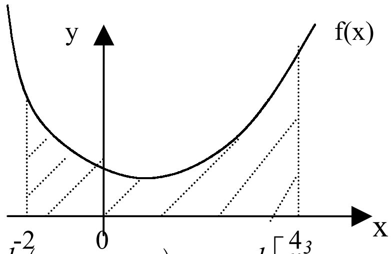
Por geometria

$$A = \frac{1}{2}\ base \times altura\ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

que é o mesmo resultado obtido por integração.

3) Calcule a área compreendida entre o eixo x e a curva $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$, entre $x = -2$ e $x = 4$.

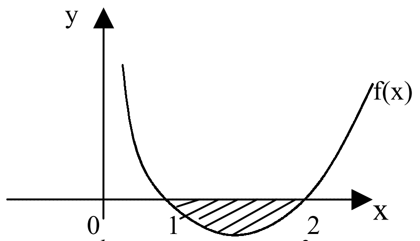
O gráfico da curva é:



$$A = \int_{-2}^{4} \frac{1}{8}\left(x^2 - 2x + 8\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-2}^{4} = \left[\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} + x\right]_{-2}^{4}$$

$$= \frac{4^3}{24} - \frac{4^2}{8} + 4 - \left[\frac{(-2)^3}{24} - \frac{(-2)^2}{8} - 2\right] = \frac{64}{24} - \frac{16}{8} + 4 + \frac{8}{24} + \frac{4}{8} + 2 = \frac{14}{3} + \frac{17}{6} = \frac{15}{2}$$

4) Calcular a área da região limitada inferiormente pela curva $y = x^2 - 3x + 2$ e o eixo x que é $y = 0$.



Nos dois pontos $y = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ fornece $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$\int_a^b f(x)dx$ = A , então

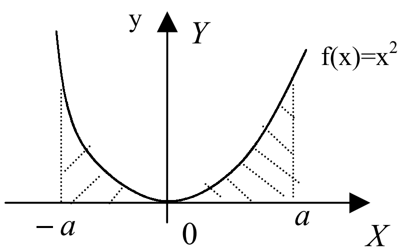
$$A_2 = + \int_a^b f(x)dx = + \int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2$$

$$A_2 = + \left\{\left[\frac{8}{3} - \frac{3 \times 4}{2} + 4\right] - \left[+\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right]\right\} = + \left\{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right\} = \frac{1}{6}\ \text{unidades de área}$$

8.1.1- A Integral Definida para Cálculo de Área de Funções Pares e Impares

Quando uma função é par ou impar o cálculo de sua área é feito dobrando a área calculada no primeiro quadrante, isto é, quando se possui uma curva gerada por funções pares ou ímpares, existe uma simetria da função que permite que a área $A = \left|\int_{-a}^{a} f(x)\,dx\right|$ seja e dada por $A = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Exemplo: Se tivermos uma curva gerada por funções pares ou ímpares, existirão simetrias do tipo



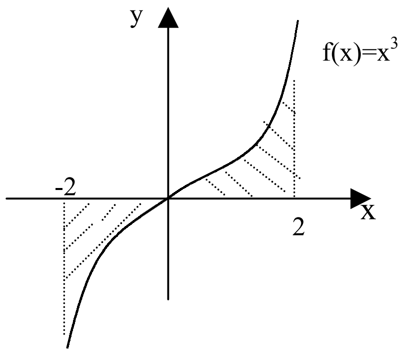
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$2\int_{0}^{2} x^2\, dx = 2 \times \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{2} = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Observação: Note que a curva é simétrica em relação a y.

No entanto, a função a seguir é ímpar e gera um gráfico assimétrico.



A área total $A = 2\int_{0}^{2} x^3\, dx$

A integral $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ porque a curva é assimétrica, e portanto, de sinal contrário em relação à origem.

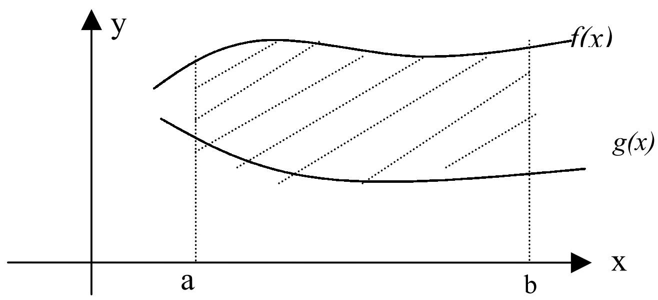
$$A = 2\int_{0}^{2} x^3\, dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2} = \left.\frac{x^4}{2}\right|_{0}^{2} = 8 - 0 = 8\ u.a.$$

ou $\int_{-2}^{2} x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$ (integral nula)

"A área deve ser considerada sempre positiva."

8.1.2- A Integral Definida para Cálculo de Área entre Duas Funções

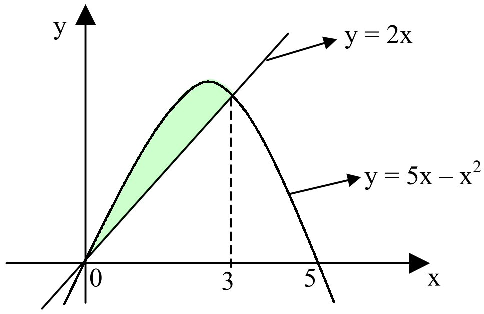
Teorema: A área entre os dois gráficos das funções f e g no intervalo $[a,b]$ é dado por:



$$A = \int_{a}^{b} \left| f(x) - g(x) \right| dx$$ e é sempre positiva.

Exercícios

1) Determinar a área limitada pelas curvas $y = 5x - x^2$ e $y = 2x$.



- Pontos de interseção

$$\begin{cases} y = 5x - x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$2x = 5x - x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Área

$$A = \int_0^3 (5x - x^2 - 2x)dx$$

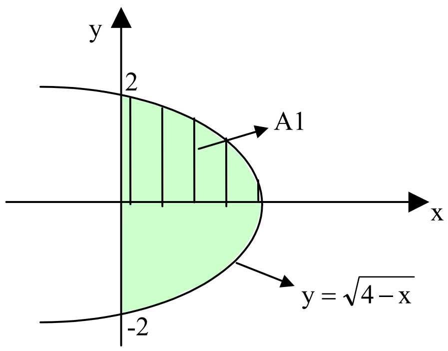
$$A = \int_0^3 (3x - x^2)dx$$

$$A = \left.\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^3$$

$$A = \frac{27}{2} - 9$$

$$A = \frac{9}{2} u.a.$$

2) Determinar a área limitada pelo eixo y e pela curva $x = 4 - y^2$



$$x = 4 - y^2$$

$$4 - y^2 = 0$$

$$y = \pm 2$$

$$A = 2.\underbrace{\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx}_{A1}$$

$$A = -2.\int_0^4 (4-x)^{\frac{1}{2}}.(-1)dx$$

$$A = -2\left[4 - x^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3}\right]_0^4$$

$$A = -2.\frac{2}{3}.[-8]$$

$$A = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

ou

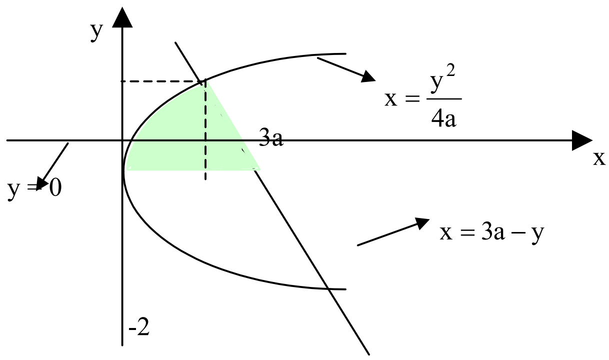
$$A = 2\int_0^2 (4 - y^2)dy$$

$$A = 2.\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = 2.\left[8 - \frac{8}{3}\right]$$

$$A = \frac{32}{3} u.a.$$

3) Determinar a área limitada pelas curvas $y^2 = 4ax$; $x + y = 3a$; $y = 0$; primeiro quadrante e "a" positivo.



- Pontos de interseção

$$\begin{cases} y^2 = 4ax \\ x + y = 3a \rightarrow x = 3a - y \end{cases}$$

$$y^2 = 4a(3a - y)$$

$$y^2 - 12.a^2 + 4ay = 0$$

$$y^2 + 4ay - 12a^2 = 0$$

$$y = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 48a^2}}{2}$$

$$y = \frac{-4a \pm 8a}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2a \\ y' = -6a \end{cases}$$

- Área

$$A = \int_0^{2a} (3a - y - \frac{y^2}{4a})dy$$

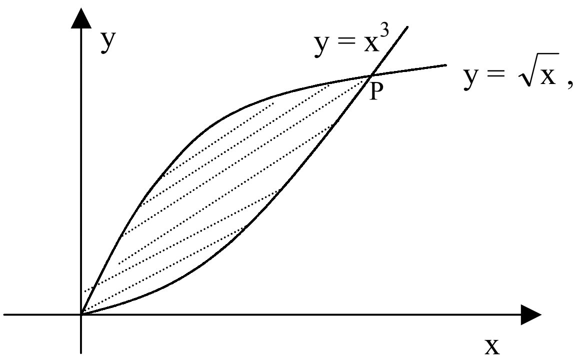
$$A = \left[3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a} \right]_0^{2a}$$

$$A = 6a^2 - 2a^2 - \frac{1}{12a}.8a^3$$

$$A = 4a^2 - \frac{2}{3}a^2$$

$$A = \frac{10.a^2}{3} u.a.$$

4) Achar a área entre as curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.



Solução: Primeiro resolva o sistema $y = x^3 = \sqrt{x}$ para achar os limites de integração.

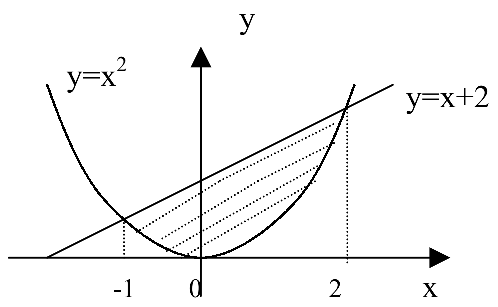
$x^6 = x \quad \rightarrow \quad x(x^5 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \text{ e } x = 1$

satisfazem a equação.

$$A = \int_0^1 \left| \sqrt{x} - x^3 \right| dx$$ pode integrar e depois tomar o módulo.

$$A = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^3 \right) dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

5) Calcule a área entre os gráficos de $y = x + 2$ e $y = x^2$.



Resolve-se o sistema de equações para achar P_1 e P_2.

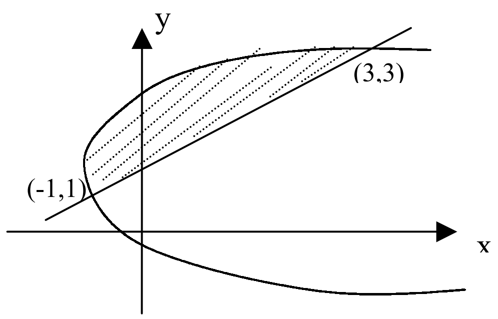
$$y = x^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1 \quad e \quad x = 2$$

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2 \right) dx$$

$$A = \left| \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{2} = \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right] = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} \ unid.^2$$

6) Achar a área da região limitada pelos gráficos $x = y^2 - 2y$ e $x = 2y - 3$.



P_1 e P_2 são obtidos pela solução do sistema

$$x = y^2 - 2y = 2y - 3 \ \rightarrow \ y' - 4y + 3 = 0$$
$$y_1 = 1 \quad e \quad y_2 = 3 \quad e \quad x_1 = -1 \quad e \quad x_2 = 3$$

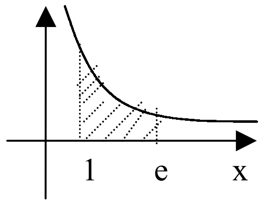
A integração é feita em y, porque as funções estão resolvidas para x e não para y.

$$A = \int_1^3 \left| f(y) - g(y) \right| dy = \left| \left[\frac{y^3}{3} - 2y + 3y \right] \right|_1^3 = \frac{4}{3}$$

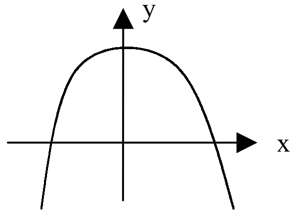
Exercícios Propostos

Calcule a área da curva com o eixo x nos intervalos:

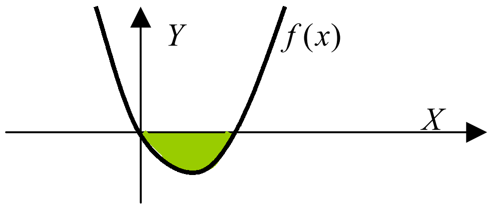
1) $y = \dfrac{1}{x}$ entre $x = 1$ e $x = 2{,}718$



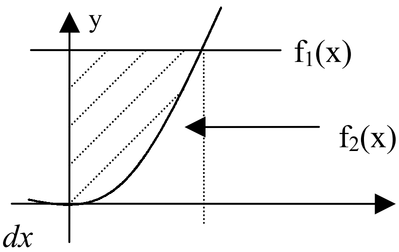
2) $y = 4 - x^2$ (só a parte acima de x)



3) $y = x^2 - 3x$ entre $x = 0$ e $x = 3$

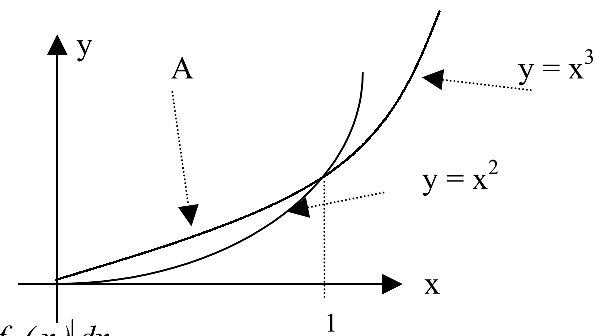


4) Calcular a área entre a reta $y = 4$ e $y = x^2$ no intervalo de $x = 0$ a $x = 2$



$$A = \int_0^a f_1(x)\,dx - \int_0^a f_2(x)\,dx$$

5) Achar a área entre as curvas $y = x^3$ e $y = x^2$ no intervalo $x = 0$ a $x = 1$.



$$A = \int_0^a \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$$

8.1.3- A Integral Definida para Cálculo do Centróide

O centróide de uma região plana *(R)* é definido como o centro de massa da região. O centro de massa é o ponto pelo qual esta região *R* pode ser suspensa sem girar.

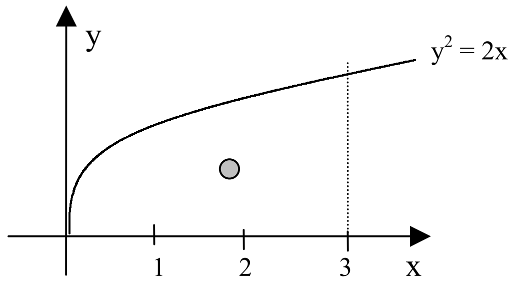
As coordenadas ($\bar{x}$, $\bar{y}$) do centróide são dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} [\, f(x) - g(x)]\, x\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_{x_1}^{x_2} [\, f^2(x) - g^2(x)]\; dx$$

Exercícios

1) Achar as coordenadas do centróide da região limitada pela curva $y^2 = 2x$ e o eixo x, no intervalo [0,3].



$y = \sqrt{2x}$ (só a parte positiva)

Solução: Acha-se a área A

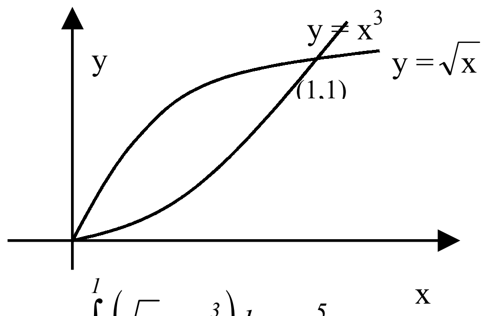
$$A = \int_0^3 \sqrt{2x}\; dx = \sqrt{2}\int_0^3 x^{1/2}\; dx = 2\sqrt{6}$$

$$\bar{x}\, A = \int_0^3 x\left(\sqrt{2x} - 0\right)dx = \sqrt{2}\int_0^3 x^{3/2}\; dx = \frac{18}{5}\sqrt{6}$$

$$\bar{y}\, A = \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^3 2x\; dx = \frac{1}{2}\,.\,2\,.\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\frac{18}{5}\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{18}{10} = 1{,}8} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{9/2}{2\sqrt{6}} = \frac{9}{4\sqrt{6}} = 0{,}92}$$

2) Achar o centróide da figura entre as duas curvas $y=x^3$ e $y = \sqrt{x}$



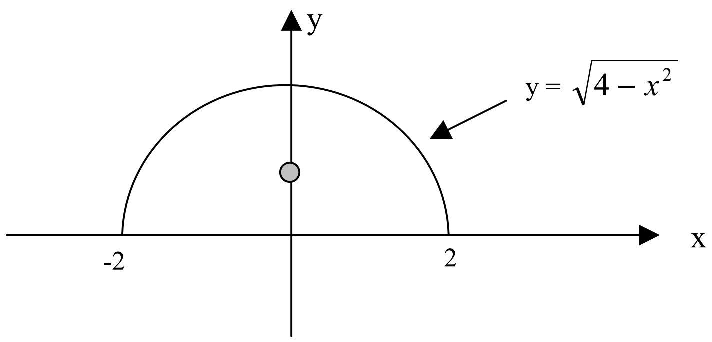
$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \frac{5}{12}$$

$$\bar{x}\,A = \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \frac{1}{5}$$

$$\bar{y}\,A = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - x^6\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{7-2}{14} = \frac{5}{28}$$

$$\bar{x} = \frac{2/5}{5/12} = \frac{12}{25} = 0{,}48 \qquad \bar{y} = \frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{12}} = \frac{5\times 12}{5\times 28} = \frac{12}{28} = \frac{3\times 4}{4\times 7} = \frac{3}{7} = 0{,}43$$

3) Achar o centróide de uma semi-circunferência. A equação da circunferência e $x^2 + y^2 = r^2$, onde r = raio, $r = 2$. Então $y = \sqrt{4 - x^2}$ é a semi-circunferência.



$$A = \frac{\pi\, r^2}{2} = \frac{\pi\,.\,4}{2} = 2\pi$$

$$\bar{x}\,A = \int_{-2}^{2} x\sqrt{4 - x^2}\,dx \qquad du = -2x\,dx \quad \begin{cases} u = 4 - x^2 \\ dx = -\dfrac{du}{2x} \end{cases}$$

$$= -\int_{-2}^{2} x\,.\,u^{1/2}\,.\,\frac{du}{2x} = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} u^{1/2}\,du = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{u^{3/2}}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(4 - x^2\right)^3}\Bigg|_{-2}^{2} = 0 \text{ (como já era esperado)}$$

$$\bar{y}\,\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right] = \frac{16}{3}$$

$$\bar{y}\,\mathrm{A} = \frac{16}{3} \quad\rightarrow\quad \bar{y} = \frac{\frac{16}{3}}{A} = \frac{16}{3A} = \frac{16}{6\pi} = 0{,}8488$$

8.1.4- Centro de Gravidade de Áreas Planas

Momento

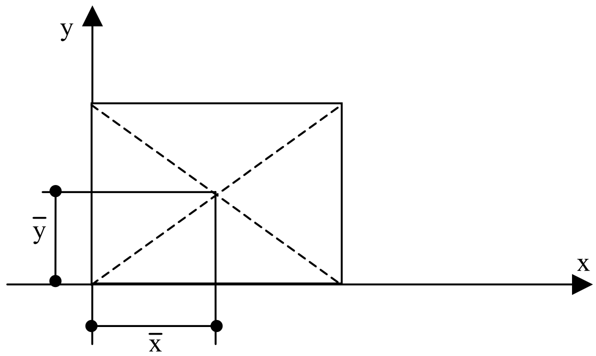
Momento de uma área "*A*" em relação ao eixo *x* é por definição o produto da área pela distância até o eixo *x*.

Momento em relação ao eixo *y* é o produto da área pela distância do centro de gravidade até o eixo *y*.

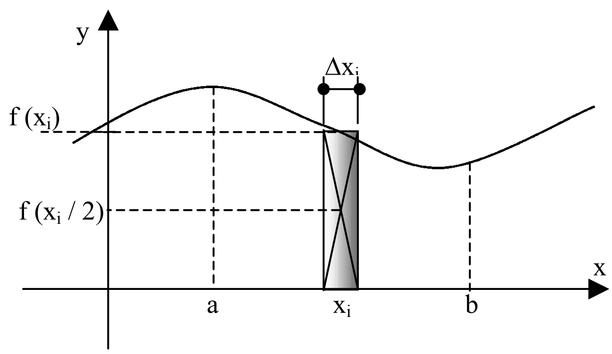
Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do centro de gravidade de uma região plana "*A*", então:

$Mx = A \cdot \bar{y}$

$My = A \cdot \bar{x}$



Seja $y = f(x)$ contínua e derivável em $[a, b]$.



$$Mx_i = f(x_i).\Delta x_i.f\left(\frac{x_i}{2}\right)$$

$$Mx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\,\frac{(x_i)^2}{2}\cdot\Delta x_i$$

$$Mx = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\cdot dx \qquad \boxed{Mx = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}$$

Para *My*, temos:

$$My = f(x_i).\Delta x_i.x_i$$

$$My = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).x_i.\Delta x_i$$

$$My = \int_a^b f(x).x.dx$$

$$\boxed{My = \int_a^b y.x.dx}$$

Se $Mx = A \cdot \bar{y}$ e $My = A \cdot \bar{x}$. Coordenadas do centro de gravidade de $A\ (x, y)$

$$\bar{x} = \frac{My}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Mx}{A}$$

Se $y = f(x);\ x = a;\ x = b$; eixo x.

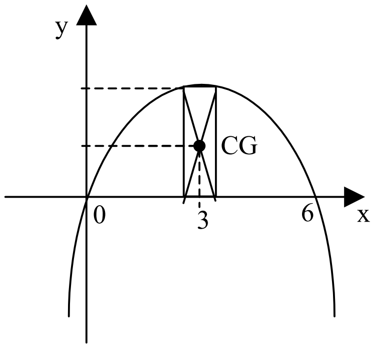
$$Mx = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 . dx$$

$$My = \int_a^b y.x.dx$$

$$A = \int_a^b y.dx$$

Exercícios

1) Determinar as coordenadas do centro de gravidade da região limitada pelas curvas $y = 6x - x^2$ e o eixo x.



$$6x - x^2 = 0$$
$$x(6 - x) = 0$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$Mx = A \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{Mx}{A}$$
$$My = A \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{My}{A}$$

Cálculo da área

$$A = \int_0^6 \left(6x - x^2\right)dx = 3x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^6$$
$$A = 36u.a.$$

Cálculo de Mx

$$Mx = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(6x - x^2\right)\left(6x - x^2\right)dx$$

$$Mx = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(36x^2 - 12x^3 + x^4\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{36x^3}{3} - \frac{12x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^6$$
$$Mx = 129{,}6$$

Cálculo de My

$$My = \int_0^6 \left(6x - x^2\right).x.dx$$

$$My = \int_0^6 \left(6x^2 - x^3\right)dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^6$$
$$My = 108{,}0$$

Determinação do CG

$$\bar{x} = \frac{My}{A} = \frac{108}{36} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{Mx}{A} = \frac{129,6}{36} = 3,6$$

$$\boxed{CG(3;\ 3,6)}$$

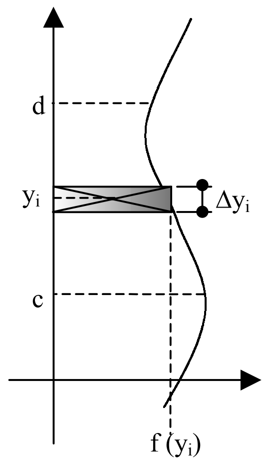
Seja $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ e eixo y.

$$A = \int_c^d f(y)dy$$

$$\boxed{A = \int_c^d x.dy}$$

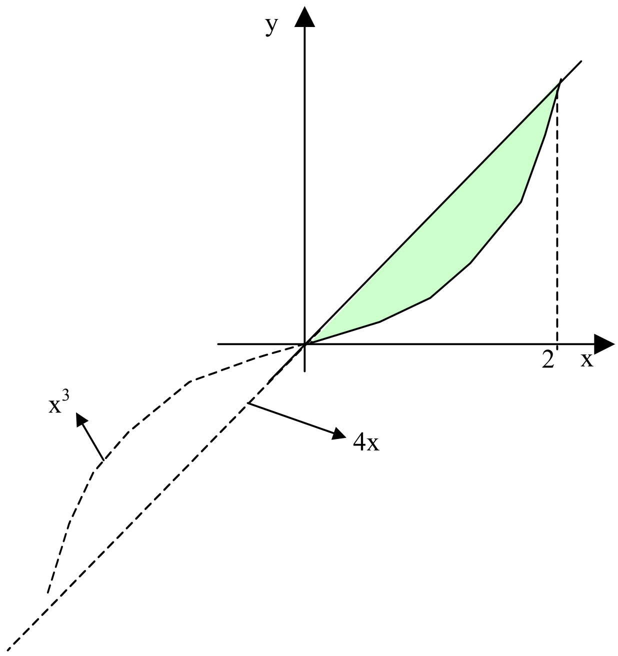
$$\boxed{Mx = \int_c^d xydy}$$

$$\boxed{My = \frac{1}{2}\int_c^d x^2 dy}$$



__Exercícios__

1) Determinar as coordenadas do centro de gravidade da área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 4x$ no 1º quadrante.



Ponto de interseção

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$$

$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$A = \int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx = \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 4u.a.$$

$$Mx = \int_0^2 \left(4x - x^3\right)\left(\frac{4x + x^3}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(16x^2 - x^6\right)dx$$

$$Mx = \frac{1}{2}\left[\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right]_0^2 = 12{,}19$$

$$My = \int_0^2 \left(4x - x^3\right)x.dx = \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right)dx$$

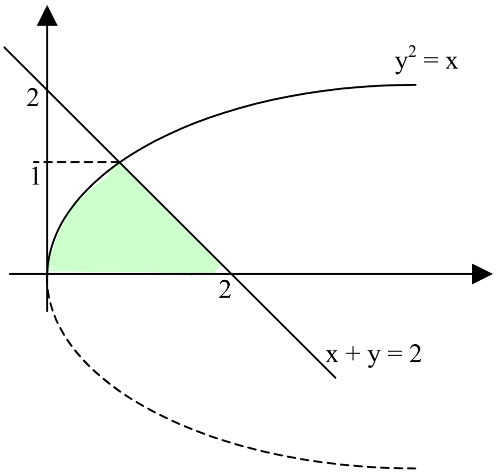
$$My = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 4{,}26$$

$$x = \frac{4{,}26}{4} = 1{,}06$$

$$y = \frac{12{,}19}{4} = 3{,}04$$

$\boxed{\text{CG } (1{,}06;\ 3{,}04)}$

2) Determinar as coordenadas do CG da região limitada pelas curvas $y^2 = x,\ x + y = 2\ e\ y = 0$ no primeiro quadrante.



Pontos de inflexão

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y \end{cases}$$

$$y^2 = 2 - y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$\begin{cases} -2 \rightarrow desprezar \\ 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 \left(2 - y - y^2\right)dy$$

$$A = 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

$$A = \frac{7}{6}\,u.a.$$

$$My = \int_0^1 \left(2 - y - y^2\right)\left(\frac{2 - y + y^2}{2}\right)dy$$

$$My = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(2-y)^2 - y^4\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - 4y + y^2 - y^4\right)dy$$

$$My = \frac{1}{2}\left[4y - \frac{4y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

$$Mx = \int_0^1 \left(2 - y - y^2\right)(y)dy$$

$$Mx = \int_0^1 \left(2y - y^2 - y^3\right)dy$$

$$Mx = \frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{16/15}{7/6} = \frac{32}{35} \qquad \bar{y} = \frac{5/12}{7/6} = \frac{5}{14} \qquad \boxed{CG\left(\frac{32}{35}, \frac{5}{14}\right)}$$