- UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ESCOLA DE ENGENHARIA INDUSTRIAL METALÚRGICA DE VOLTA REDONDA
PROFESSORA: SALETE SOUZA DE OLIVEIRA BUFFONI
DISCIPLINA: RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Deflexão de Vigas

Objetivo: Determinar a equação da curva de deflexão e também encontrar deflexões em pontos específicos ao longo do eixo da viga.

Importância:

- Estruturas estaticamente indeterminadas-Número de reações excede as equações de equilíbrio.
- Análise dinâmica. Vibrações de aeronaves ou as respostas de edifícios aos terremotos.

Equações Diferenciais da Curva de Deflexão

Deflexão de vigas → Equações diferenciais da curva de deflexão

Considere uma viga engastada com um carregamento concentrado atuando para cima na extremidade livre.

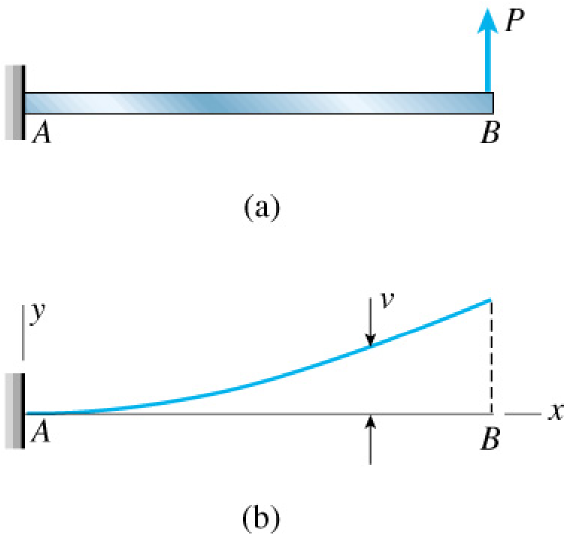


Figura 1 – Curva de deflexão de uma viga engastada. (Gere, 2003)

Considerações: O plano *xy* é um plano de simetria da viga e todos os carregamentos atuam nesse plano (plano de flexão). O material segue a Lei de Hooke e consideramos somente deformações devido à flexão pura.

Deflexão ν - É o deslocamento na direção *y* de qualquer ponto no eixo da viga, como apresenta a Figura 1.b. Como *y* é positivo para cima, então ν é positivo.

Vamos considerar a curva de deflexão com mais detalhes como mostra a Figura 2.

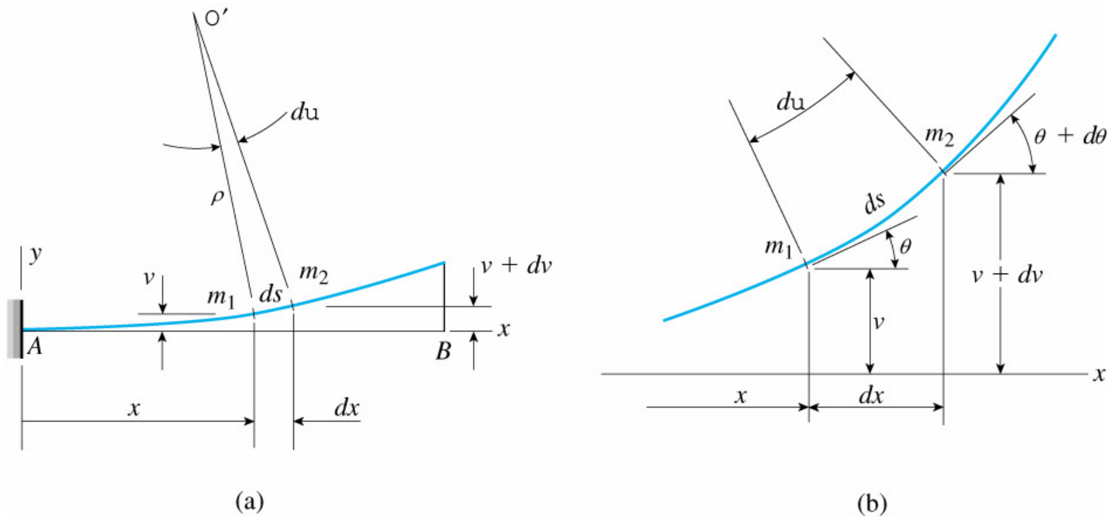


Figura 2 – Curva de deflexão de uma viga. (Gere, 2003)

Viga Flexionada$\rightarrow \begin{cases} \textit{Deflexão em cada ponto ao longo do eixo} \\ \textit{Rotação em cada ponto} \end{cases}$

Ângulo de rotação θ - É o ângulo entre o eixo *x* e a tangente à curva de deflexão, como mostra a Figura 2.b.

Observações: θ é positivo no sentido anti-horário.

Notação: Ângulo de rotação = Ângulo de inclinação = Ângulo de declive

Ângulo de rotação em $m_2 = \theta + d\theta$

$d\theta$ - Aumento no ângulo conforme nos movemos do ponto m_1 para o ponto m_2.

Ângulo entre as normais as tangentes = $d\theta$

Ponto de interseção entre as normais as tangentes = *O'* (Centro de curvatura)

ρ - Raio de curvatura – Distância de *O' à* curva e é dado pela seguinte expressão

$$ds = \rho d\theta \tag{1}$$

onde $d\theta$ é dado em radianos e ds é a distância ao longo da curva de deflexão entre os pontos m_1 e m_2.

A curvatura é dada por:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{2}$$

A convenção de sinal para a curvatura é apresentada na Figura 3

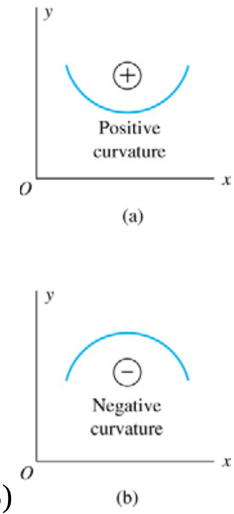


Figura 3 – Convenção de sinal para a curvatura. (Gere, 2003)

A inclinação da curva de deflexão é a primeira derivada dv/dx. Geometricamente, a inclinação da curva de deflexão é o incremento dv na deflexão (conforme vamos do ponto m_1 para o ponto m_2) Dividindo pelo incremento dx na distância ao longo do eixo x.

Como dv e dx são infinitesimais tem-se que:

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dv}{dx}\right) \tag{3}$$

De modo similar tem-se:

$$\cos(\theta) = \frac{dx}{ds} \text{ e } sen(\theta) = \frac{dv}{ds} \tag{4}$$

Essas equações são válidas para vigas de qualquer material

Vigas com Pequenos Ângulos de Rotação

Estruturas encontradas na vida diária: Edifícios, Automóveis, Aeronaves, navios e etc.

Essas estruturas sofrem pequenas variações na forma enquanto estão em serviço e não são percebidas por um observador casual. Dessa forma, a curva de deflexão da maioria das vigas e colunas tem ângulos de rotação muito pequenos, deflexões muito pequenas e curvaturas muito pequenas.

De acordo com a Figura 2, se o ângulo de rotação é muito pequeno, a curva de deflexão é quase horizontal. Dessa forma tem-se que:

$$ds \approx dx \rightarrow \cos\theta = 1 \tag{5}$$

Assim a curvatura, pode ser dada por:

$$k = \frac{d\theta}{dx} \tag{6}$$

Uma vez que $tan(\theta) \approx \theta$ quando θ é pequeno, tem-se o seguinte:

$$\theta \approx tan(\theta) = \frac{d\nu}{dx} \tag{7}$$

Derivando-se a expressão (7) em relação a *x* tem-se:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\nu}{dx^2} \tag{8}$$

Igualando com a equação da curvatura

$$\frac{d\theta}{dx} = k \Rightarrow k = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2\nu}{dx^2} \tag{9}$$

A expressão (9) é válida para uma viga de qualquer material, com a condição de que as rotações sejam pequenas.

Se o material é elástico e linear e segue a Lei de Hooke, a curvatura é dada por:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{10}$$

Em que M é o momento fletor e EI é a rigidez a flexão da viga. Combinando (9) e (10) produz-se a equação diferencial da curva de deflexão básica de uma viga.

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{11}$$

Essa equação pode ser integrada em cada caso particular para se obter, ν, M e EI que são funções de x.

Equações adicionais podem ser obtidas a partir das relações entre o momento fletor M, a força de cisalhamento V e a intensidade q da carga distribuída, como a seguir:

$$\frac{dV}{dx} = -q \qquad \frac{dM}{dx} = V \tag{12}$$

As convenções de sinais para essas grandezas são mostradas na Figura (4).

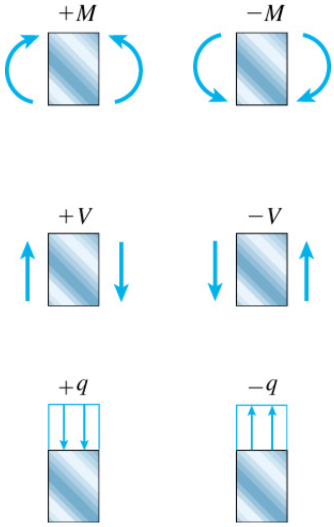


Figura 4 - Convenções de sinais para momento fletor *M*, força de cisalhamento *V* e intensidade *q* da carga distribuída. (Gere,2003)

Vigas Não-Prismáticas

A rigidez a flexão EI_x é variável. A eq. (11) torna-se

$$EI_x \frac{d^2 v}{dx^2} = M \tag{13}$$

Diferenciando ambos os lados da eq. (13) e usando as eqs. (12) obtém-se:

$$\frac{d}{dx}\left(EI_x \frac{d^2 v}{dx^2}\right) = \frac{dM}{dx} = V \tag{14}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_x \frac{d^2 v}{dx^2}\right) = \frac{dV}{dx} = -q \tag{15}$$

Vigas Prismáticas

No caso de uma viga prismática (*EI* constante), as equações diferenciais tornam-se:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M \qquad EI \frac{d^3 v}{dx^3} = V \qquad EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -q \tag{16}$$

Iremos nos referir a essas equações como a **equação do momento fletor**, a **equação da força de cisalhamento** e a **equação do carregamento**, respectivamente.

Deflexões por integração da equação do momento fletor – Método de integrações sucessivas

Objetivo: Integrar duas vezes $EI\dfrac{d^2 v}{dx^2} = M$

1ª Integração $\rightarrow$ $v' = dv/dx$

2ª integração $\rightarrow$ deflexão ν

Passos:

1- Escrever as equações para os momentos fletores da viga

2- Para cada região da viga substituímos as expressões para *M* na equação diferencial da elástica e integramos para obter a inclinação *v'*

3- Integramos cada equação da inclinação para obter ν.

Observações: Cada integração produz uma constante de integração.

As constantes de integração são obtidas a partir de condições relativas as inclinações e deflexões. As condições classificam-se em três categorias.

Condições de contorno: relativas às inclinações e deflexões nos apoios das vigas, como exemplifica a Figura 5 e a Figura 6.

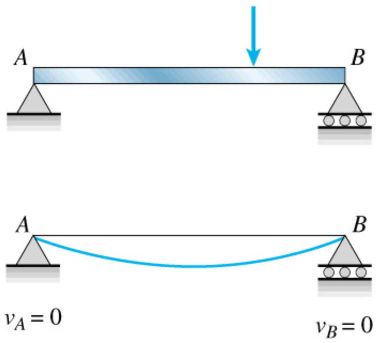


Figura 5 - Condições de contorno em apoio simples.(Gere, 2003)

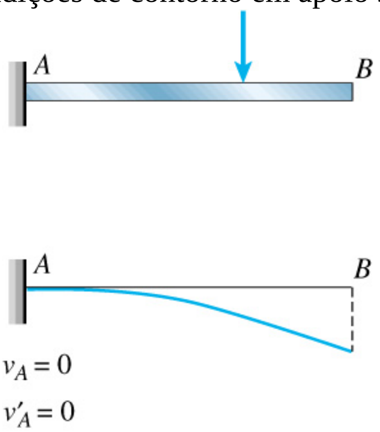


Figura 6 – Condições de contorno no engaste (Apoio fixo)

Condições de continuidade - Ocorrem em pontos em que as regiões de integração se encontram como o ponto C da Figura 7.

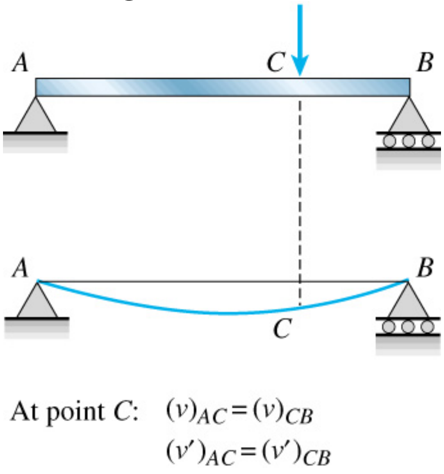


Figura 7 - Condições de continuidade no ponto C.

Condições de simetria – Por exemplo, se uma viga simples suporta uma carga uniforme em todo o seu comprimento, sabemos antecipadamente que a inclinação da curva de deflexão no ponto médio precisa ser zero.

4- Ao se determinar as constantes de integração, substitui-se nas expressões das deflexões e inclinações e se obtém as expressões finais para a curva de deflexão.

Exercícios:

1. Determine a equação da curva de deflexão para uma viga simples *AB* suportando um carregamento uniforme de intensidade *q* atuando por toda a extensão da viga (Figura 8). Determine também a deflexão máxima δ_{max} no ponto médio da viga e os ângulos de rotação θ_A e θ_B nos apoios. A viga tem comprimento *L* e rigidez a flexão *EI* constante.

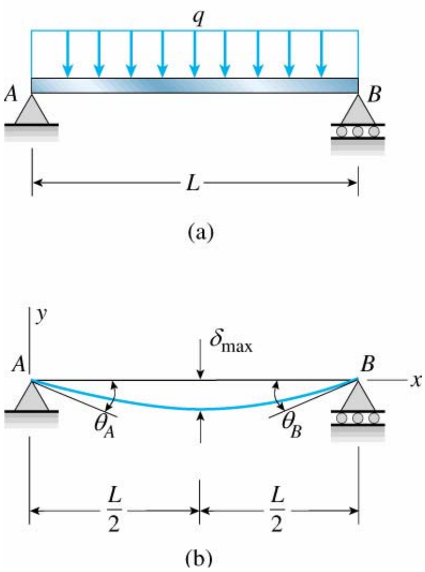
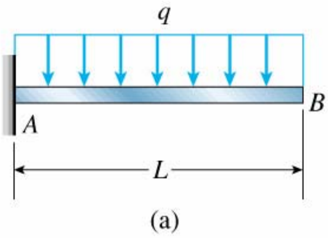


Figura 8 - Deflexões de uma viga simples com um carregamento uniforme.

Resposta: $v = -\dfrac{qx}{24EI}\left(L^3 - 2Lx^2 + x^3\right)$, $\delta_{max} = \dfrac{5qL^4}{384EI}$, $\theta_A = \dfrac{qL^3}{24EI}$, $\theta_B = \dfrac{qL^3}{24EI}$

2. Determine a equação da curva de deflexão para uma viga engastada *AB* submetida a um carregamento uniforme de intensidade *q*, Como apresenta a Figura 9.a. Determine também o ângulo de rotação θ_B e a deflexão δ_B na extremidade livre, Figura 9.b. A viga tem comprimento L e rigidez constante EI.



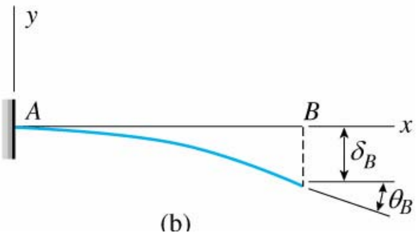
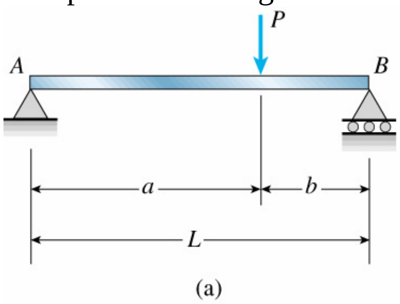


Figura 9- Deflexões de uma viga engastada com um carregamento uniforme

Resposta: $v = -\dfrac{qx^2}{24EI}\left(6L^2 - 4Lx + x^2\right)$, $\theta_B = \dfrac{qL^3}{6EI}$, $\delta_B = \dfrac{qL^4}{8EI}$

3. Uma viga simples *AB* suporta um carregamento concentrado *P* atuando nas distâncias a e *b* dos apoios esquerdo e direito, respectivamente como apresenta a Figura 10.a Determine as equações da curva de deflexão, os ângulos de rotação θ_A e θ_B nos apoios, a deflexão máxima δ_{max} e a deflexão δ_C no ponto médio C da viga (Figura 10.b). A viga tem comprimento *L* e rigidez a flexão *EI* constante.



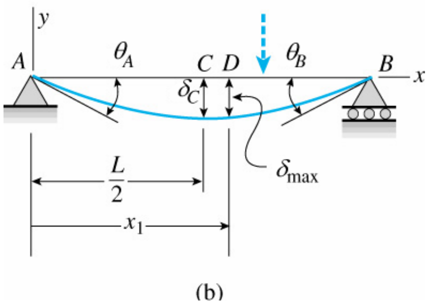


Figura 10 – Deflexões de uma viga simples com um carregamento concentrado.

Resposta: $v = -\dfrac{Pbx}{6LEI}\left(L^2 - b^2 - x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$,

$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}\left(L^2 - b^2 - x^2\right) - \frac{P(x-a)^3}{2EI} \qquad (a \le x \le L),\ \theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI},\ \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$(\theta_A)_{max} = \dfrac{PL^2\sqrt{3}}{27EI}$, ocorre quando $b = L/\sqrt{3}$, esse valor é obtido tomando-se a derivada de θ_A com relação a *b* e iguala-se a zero.

A deflexão máxima ocorre no ponto D, da Figura 10.b em que a curva de deflexão tem uma tangente horizontal. Se o carregamento está a direita do ponto médio, isto é se a>b, o ponto D está na parte da viga à esquerda do carregamento. Podemos localizar esse ponto igualando $v' = 0$ e resolvendo para a distância *x*, que agora denotamos como x_1. Dessa forma tem-se: $x_1 = \sqrt{\dfrac{L^2 - b^2}{3}}$ $\quad (a \ge b)$ que substituindo-se na equação da deflexão $\delta_C = -v\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{Pb\left(3L^2 - 4b^2\right)}{48EI}$

ESTUDE o caso onde o carregamento está no ponto médio da viga, a=b=L/2

4. Calcule a flecha e a inclinação máximas para a viga retangular (largura **b** e altura **h**) mostrada. Considere os dados da tabela 1.

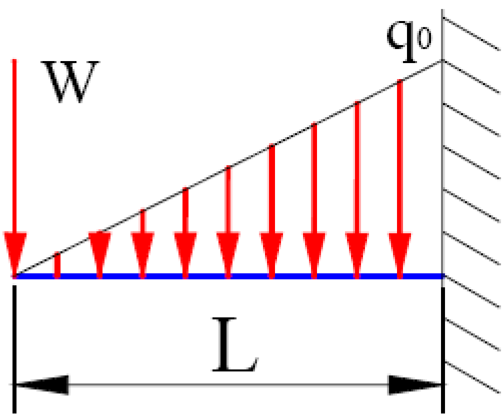


Figura 11 – Duran (2006)

Tabela 1.

Parâmetro	Valor	Unidades
W	2000	N
q_0	6000	N/m
L	4	m
b	0.05	m
h	0.2	m
E	70	GPa

Resposta:

$$\theta_{máx} = \theta(x = 0) = 0.78°$$
$$y_{máx} = y(x = 0) = -40.2 \text{ mm}$$

Deflexões por integração da equação da força de cisalhamento e da equação de carregamento

Nesse caso mais integrações são necessárias. Por exemplo, se começarmos com a equação de carregamento, quatro integrações são necessárias de modo a chegar às deflexões.

Exercícios:

1. Determine a equação da curva de deflexão para uma viga engastada *AB* suportando um carregamento triangularmente distribuído de máxima intensidade q_o (Figura 12). Determine também a deflexão δ_B e o ângulo de rotação θ_B na extremidade. Use a equação de quarta ordem da curva de deflexão (a equação de carregamento). A viga tem comprimento L e rigidez de flexão EI constante.

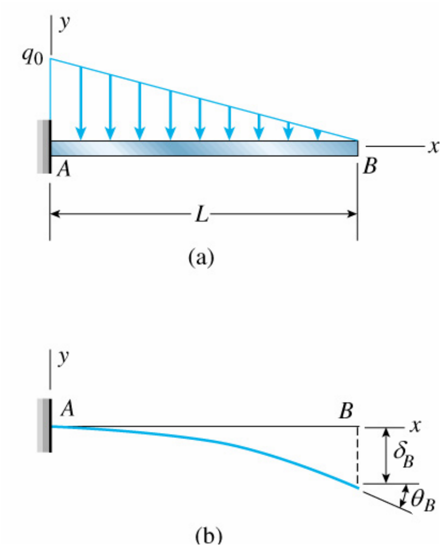


Figura 12 - Deflexões de uma viga engastada com um carregamento triangular

Resposta: $v = -\frac{q_o x^2}{120LEI}\left(10L^3 - 10L^2 x + 5Lx^2 - x^3\right)$, $\theta_B = \frac{q_o L^3}{24EI}$, $\delta_B = \frac{q_o L^4}{30EI}$

2. Uma viga simples *AB* com um balanço *BC* suporta um carregamento concentrado *P* na extremidade do balanço (Figura 13). A extensão principal da viga tem comprimento *L* e o balanço tem comprimento *L/2*. Determine as equações da curva de deflexão e a deflexão δ_C na extremidade do balanço. Use a equação diferencial de terceira ordem da curva de deflexão(a equação da força de cisalhamento). A viga tem rigidez de flexão *EI* constante.

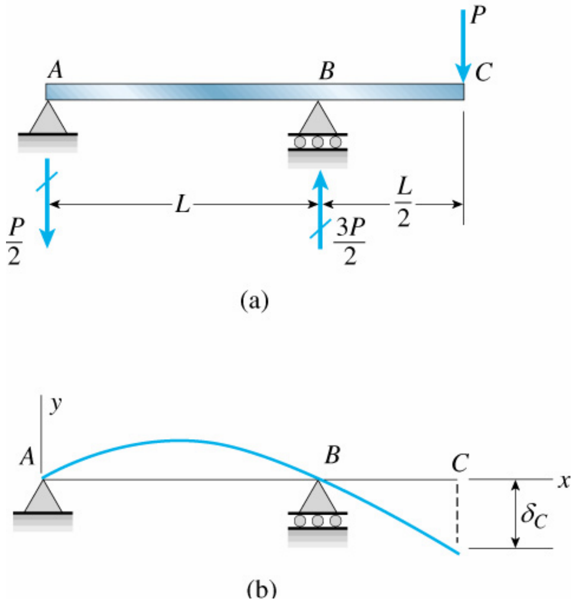


Figura 13 – Deflexões de uma viga em balanço.

Resposta: $v = \frac{Px}{12EI}\left(L^2 - x^2\right), \qquad 0 \le x \le L$

$$v = -\frac{P}{12EI}\left(3L^3 - 10L^2 x + 9Lx^2 - 2x^3\right), \qquad L \le x \le \frac{3L}{2}$$

$$\delta_C = \frac{PL^3}{8EI}$$

3. A curva de deflexão para uma viga simples AB como apresenta a Figura 13 é dada pela seguinte equação:

$$v = -\frac{q_o x}{90L^2 EI}\left(3L^5 - 5L^3x^2 + 3Lx^4 - x^5\right)$$

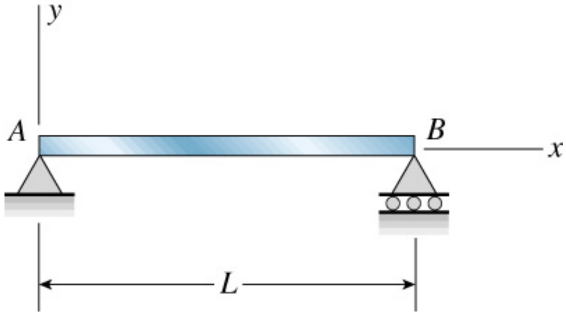


Figura 14 – Viga simplesmente apoiada.

Resposta: $q = 4q_o x\left(L - x\right)/L^2$, Carga parabólica agindo para baixo.

Referências Bibliográficas:

1.	BEER, F.P. e JOHNSTON, JR., E.R. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Makron Books, 1995.
2.	Gere, J. M. Mecânica dos Materiais, Editora Thomson Learning
3.	HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos, 2000.

Observações:

1- O presente texto é baseado nas referências citadas.

2- Todas as figuras se encontram nas referências citadas.