

Torção

Definições:

Torção se refere ao giro de uma barra retilínea quando carregada por momentos (ou torques) que tendem a produzir rotação sobre o eixo longitudinal da barra.

Veja a Figura 1.

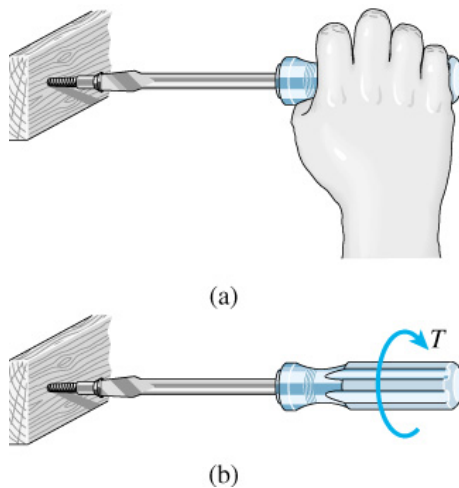


Figura 1 – Torção de uma chave de fenda devido a um torque T aplicado no cabo.

Exemplos de barras em torção: Hastes, eixos, eixos propulsores, hastes de direção e brocas de furadeiras. Caso idealizado do carregamento de torção

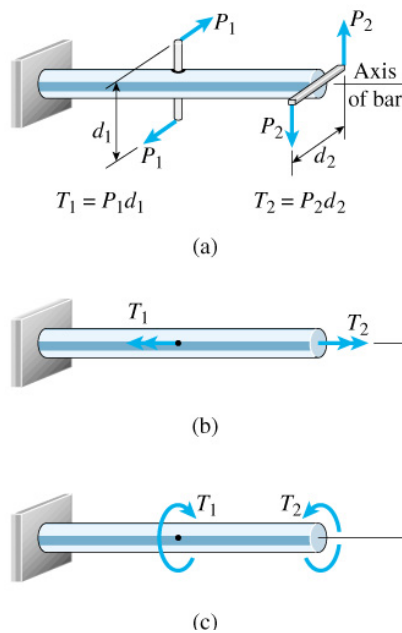


Figura 2- Barra submetida à torção pelo torque T_1 e T_2 .

Momentos que produzem giro na barra, como os momentos T_1 e T_2 da Figura 2, são chamados de **torques** ou **momentos torçores**.

Membros cilíndricos submetidos a torques e que transmitem potência através de rotação são chamados de eixos.

Ex: o girabrequim de um automóvel ou o eixo propulsor de um navio. A maioria dos eixos tem seções transversais circulares, sólidas ou tubulares

Objetivo:

- Desenvolver fórmulas para as deformações e tensões em barras circulares submetidas à torção.
- Analisar o estado de tensão conhecido como cisalhamento puro e obtemos a relação entre os módulos de elasticidade E e G em tração e cisalhamento, respectivamente.
- Análise de eixos de rotação e determinação da potência que eles transmitem.

Deformações de torção de uma barra circular

Considere uma barra prismática de seção transversal circular girada por torques T agindo nas extremidades como na Figura 3.

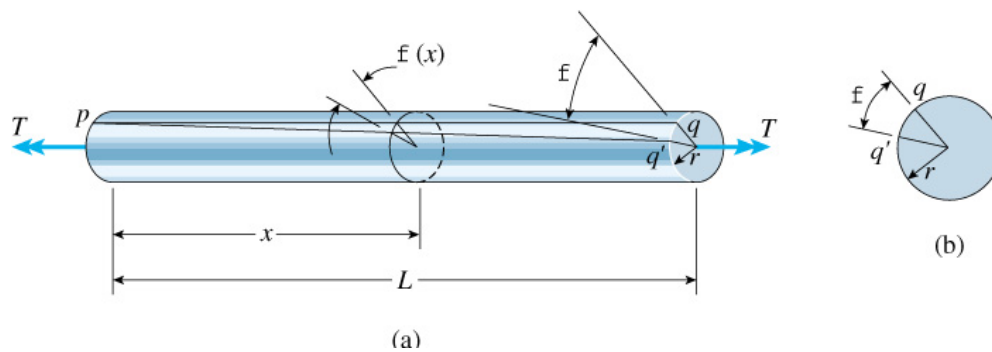


Figura 3- Deformações de uma barra circular em torção pura.

Torção Pura: Toda a seção transversal está submetida ao mesmo torque interno T .

Considerações:

Das condições de simetria, as seções transversais da barra não variam na forma enquanto rotacionam sobre o eixo longitudinal. Em outras palavras, todas as seções transversais permanecem planas e circulares e todos os raios permanecem retos.

Caso o ângulo de rotação entre uma extremidade da barra e outra é pequeno, nem o comprimento da barra e nem seu raio irão variar.

Variáveis

f, ϕ - Ângulo de torção.

O ângulo de torção varia ao longo do eixo da barra: $0 \leq \phi(x) \leq \phi$

Se toda a seção transversal da barra tem o mesmo raio e está submetida ao mesmo torque (torção pura), o ângulo $\phi(x)$ irá variar linearmente.

Considere a Figura 4,

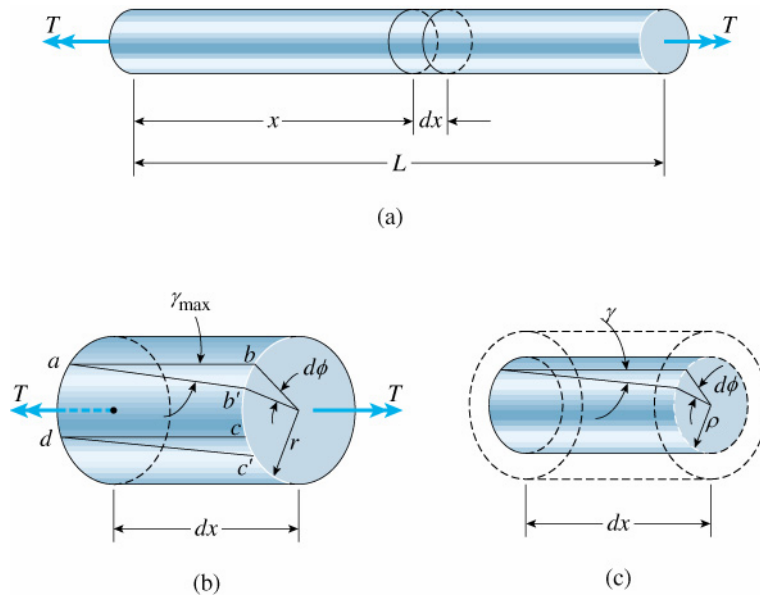


Figura 4 – Deformação de um elemento de comprimento dx extraído de uma barra em torção.

Os ângulos no canto do elemento, na Figura 4.b não são mais iguais a 90° . O elemento está em um estado de cisalhamento puro e a magnitude da deformação de cisalhamento γ_{max} é igual à diminuição no ângulo no ponto a , isto é, a diminuição no ângulo bad . Da figura, vemos que a diminuição nesse ângulo é:

$$\gamma_{max} = \frac{bb'}{ab} \quad (1)$$

onde γ_{max} é medido em radianos, bb' é a distância através da qual o ponto b se move e ab é o comprimento do elemento (igual a dx). Com r denotando o raio da barra, podemos expressar a distância bb' como $rd\phi$, em que $d\phi$ também é medido em radianos. Dessa forma a equação anterior fica:

$$\gamma_{max} = \frac{rd\phi}{dx} \quad (2)$$

Essa equação relaciona a deformação de cisalhamento na superfície externa da barra com o ângulo de torção.

A relação $d\phi/dx$ é a razão da variação do ângulo de torção ϕ em relação à distância x medida ao longo do eixo da barra. Vamos denotar $d\phi/dx$ pelo ângulo θ e nos referimos a ele como razão de torção ou ângulo de torção por unidade de comprimento.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad (3)$$

Equação para deformação de cisalhamento na superfície externa

$$\gamma_{max} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta \quad (4)$$

As equações (3) e (4) são válidas quando a razão de torção θ não é constante, mas varia com a distância x ao longo do eixo da barra.

Torção Pura

- Razão de torção

$$\theta = \frac{\phi}{L} \quad (5)$$

- Deformação de cisalhamento

$$\gamma_{max} = r\theta = \frac{r\phi}{L} \quad (6)$$

As deformações por cisalhamento no interior da barra podem ser encontradas pelo método usado para encontrar a deformação de cisalhamento γ_{max} na superfície externa.

Como os raios nas seções transversais permanecem retos e não distorcidos durante o giro, vemos que a discussão anterior para um elemento $abcd$ na superfície externa (Figura 4.b) também se aplica para um elemento similar situado na superfície de um cilindro interno de raio ρ , como na Figura 4.c.

Dessa forma, elementos internos também estão em cisalhamento puro com as deformações de cisalhamento correspondentes dadas pela equação:

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{max} \quad (7)$$

A deformação de cisalhamento no centro da seção é zero, analise a eq. (7). As equações de (4) a (7) aplicam-se a tubos circulares, bem como para barras circulares sólidas.

A Figura 5 apresenta a variação linear na deformação de cisalhamento entre a deformação máxima na superfície externa e a deformação mínima na superfície interna. As equações para essas deformações são as seguintes:

$$\gamma_{max} = \frac{r_2 \phi}{L}, \quad \gamma_{min} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{max} = \frac{r_1 \phi}{L} \quad (8)$$

Em que r_1 e r_2 são raios interno e externo, respectivamente, do tubo.

Essas equações são válidas para qualquer material, tanto para comportamento elástico ou inelástico, linear ou não-linear. As equações são limitadas para barras tendo pequenos ângulos de rotação e pequenas deformações.

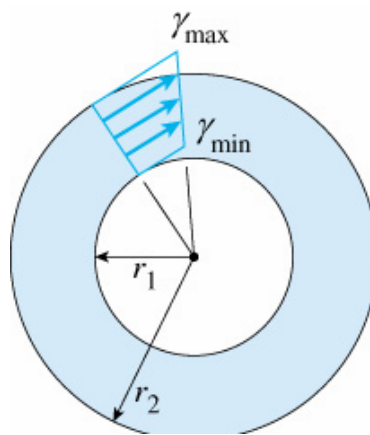


Figura 5 - Deformações de cisalhamento em um tubo circular.

Barras Circulares de Materiais Elásticos Lineares

As direções das tensões são determinadas por inspeção como indica a Figura 6.

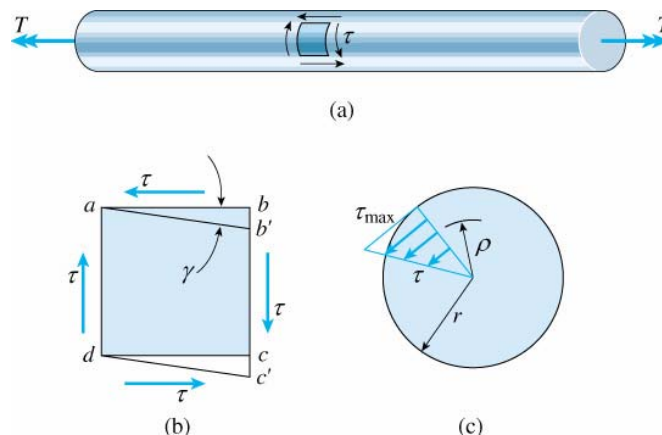


Figura 6 - Tensões de cisalhamento em uma barra circular em torção.

Como explicado em aulas anteriores, usualmente desenhamos elementos de tensão em duas dimensões, como na Figura 6.b, mas devemos lembrar que os elementos de tensão na realidade são objetos tridimensionais com uma espessura perpendicular ao plano da figura. Caso o material seja elástico-linear, podemos usar a lei de Hooke em cisalhamento.

$$\tau = G\gamma \quad (9)$$

Em que G é o módulo de elasticidade de cisalhamento e γ é a deformação de cisalhamento em radianos. Combinando a eq. (9) com as eqs. (4) (5) e (6) obtemos:

$$\tau_{max} = Gr\theta; \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r} \tau_{max} \quad (10)$$

Em que τ_{max} é a tensão de cisalhamento na superfície externa da barra (raio r), τ é a tensão de cisalhamento em um ponto interior (raio ρ) e θ é a razão de torção. (Nessas equações, θ tem unidades de radianos por unidade de comprimento).

As eq. 9 mostram que as tensões de cisalhamento variam linearmente com a distância com centro da barra, como ilustrado pelo diagrama de tensão triangular na Figura 6.c. Essa variação linear de tensão é uma consequência da Lei de Hooke.

As tensões de cisalhamento agindo num plano transversal são acompanhadas pelas tensões de cisalhamentos de mesma magnitude agindo em planos longitudinais como na Figura 7.

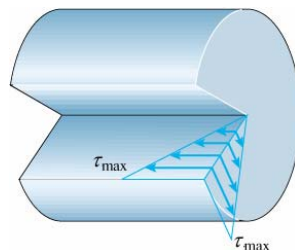


Figura 7 – Tensões de cisalhamento longitudinal e transversal em uma barra circular submetida à torção.

O estado de cisalhamento puro na superfície de uma barra é equivalente a tensões iguais de compressão e tração agindo num elemento orientado num ângulo de 45° . Verifique a Figura 8.

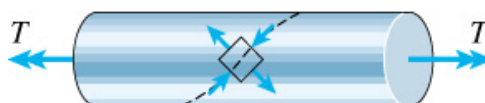


Figura 8- Tensões de compressão e tração agindo em um elemento de tensão orientado a 45° do eixo longitudinal.

Se uma barra é feita de um material que é mais frágil em tração do que em cisalhamento, a falha irá ocorrer em tração ao longo de uma hélice a 45° do eixo.

A Fórmula de Torção

Objetivo:

Determinar a relação entre as tensões de cisalhamento e o torque T .

A distribuição de tensões de cisalhamento agindo em uma seção transversal foi ilustrada anteriormente. Como essas tensões agem continuamente ao redor da seção transversal, têm uma resultante na forma de um momento – um momento igual ao torque agindo na barra. Analise a Figura 9.

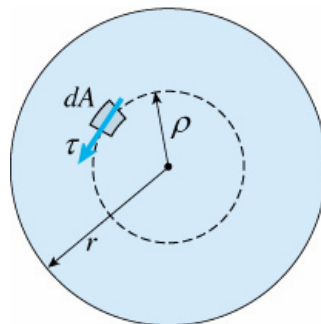


Figura 9 – Determinação da resultante das tensões de cisalhamento agindo em uma seção transversal.

Força de cisalhamento agindo no elemento da Figura 9.

$$\tau dA \quad (11)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento no raio ρ . Utilizando-se a expressão (10) tem-se que o momento elementar dessa força sobre o eixo da barra é

$$dM = \tau \rho dA = \frac{\tau_{max}}{r} \rho^2 dA \quad (12)$$

O momento resultante (igual ao torque) é a soma de todos os momentos elementares sobre a área da seção transversal.

$$T = \int_{dA} dM = \frac{\tau_{max}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{max}}{r} I_p \quad (13)$$

Em que

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (14)$$

É o momento de inércia polar da seção transversal circular

Para um círculo de raio r e diâmetro d , o momento de inércia polar é:

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (15)$$

Lembre – se que a unidade do momento de inércia é o comprimento a quarta potência.

Rearranjando a expressão (13) tem-se a seguinte expressão para a tensão de cisalhamento máxima:

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_p} \quad (16)$$

A equação (16) é conhecida como a **fórmula de torção**. A tensão de cisalhamento máxima é diretamente proporcional ao torque aplicado, T e inversamente proporcional ao momento de inércia polar, I_p .

A fórmula (16) aplica-se para barras sólidas e tubos circulares. A tensão de cisalhamento à distância ρ do centro da barra é:

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{max} = \frac{T\rho}{I_p} \quad (17)$$

A eq. (17) é obtida combinando-se com a eq. (10). A eq. (17) é a fórmula de torção generalizada e vemos mais uma vez que as tensões de cisalhamento variam linearmente com a distância radial a partir do centro da barra.

Ângulo de Torção

Combinando a eq. (10) e a fórmula de torção na eq. (17) tem-se:

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \quad (18)$$

Em que θ tem unidades de radianos por unidade de comprimento. Essa equação mostra que a razão de torção θ é diretamente proporcional ao torque T e inversamente proporcional ao produto GI_p conhecido como rigidez de torção da barra.

O ângulo de torção total para uma barra em torção pura $\phi = \theta L$

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} \quad (19)$$

Rigidez de torção linear – é o torque necessário para produzir uma unidade de ângulo de rotação e é dada por:

$$k_T = \frac{GI_p}{L} \quad (20)$$

Flexibilidade de torção - é definida como o ângulo de rotação produzido por uma unidade de torque e é dada por:

$$f_T = \frac{L}{GI_P} \quad (21)$$

A eq. (19) pode ser utilizada para calcular G .

Tubos circulares

São mais eficientes do que barras sólidas.

Por que? (Pense e responda)

As mesmas expressões básicas para as tensões de cisalhamento podem ser usadas. Logicamente, a distância radial ρ está limitada ao intervalo r_1 até r_2 , onde r_1 é o raio interno e r_2 é o raio externo da barra, como na Figura 10.

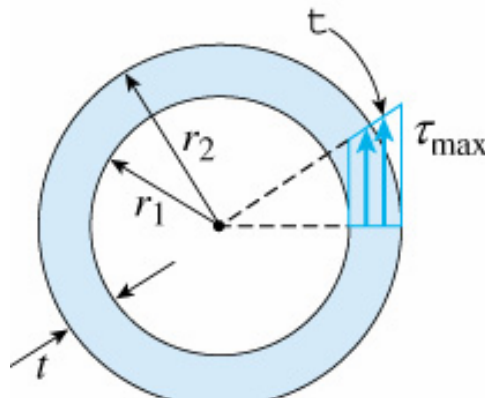


Figura 10 –Tubo circular em torção.

Momento de inércia Polar da área de seção transversal do tubo:

$$I_P = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) \quad (22)$$

Variante da equação (22)

$$I_P = \frac{\pi t}{2} (4r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4} (d^2 + t^2) \quad (23)$$

Onde $r = (r_1 + r_2)/2$, $d = (d_1 + d_2)/2$, t e a espessura.

Fórmula aproximada para o momento de inércia polar:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t \approx \frac{\pi d^3 t}{4} \quad (24)$$

Exercício:

1. Uma barra de aço sólida de seção transversal circular, Figura 11, tem diâmetro $d=1,5$ in., comprimento $L=54$ in. e módulo de elasticidade $G=11,5 \times 10^6$ psi. A barra está submetida a torques T agindo nas extremidades.

(a) Se os torques têm magnitude $T = 250$ lb – ft, qual é a tensão de cisalhamento máxima na barra? Qual é o ângulo de torção entre as extremidades? (b) Se a tensão admissível é 6000 psi e o ângulo de torção admissível é $2,5^\circ$, qual é o torque máximo permitido?

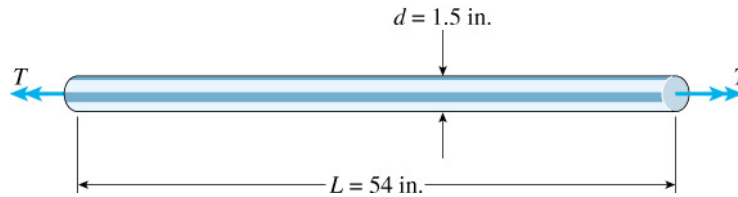


Figura 11- Barra em torção.

Resposta: (a) $\tau_{max} = 4350$ psi $\phi = 1,62^\circ$ (b) $T_{max} = 331$ lb – ft

2. Um eixo de aço deve ser fabricado com uma barra circular sólida ou com um tubo circular, Figura 12. O eixo deve transmitir um torque de 1200 N.m sem exceder uma tensão de cisalhamento admissível de 40 MPa nem uma razão de torção de $0,75^\circ/m$. (O módulo de elasticidade de cisalhamento do aço é de 78 GPa)

(a) Determine o diâmetro necessário d_o eixo sólido. (b) Determine o diâmetro externo necessário d_2 do eixo vazado se a espessura t do eixo está especificada em um décimo do diâmetro externo. (c) Determine a razão dos diâmetros (isto é, a razão d_2/d_o) e a razão dos pesos dos eixos sólido e vazado.

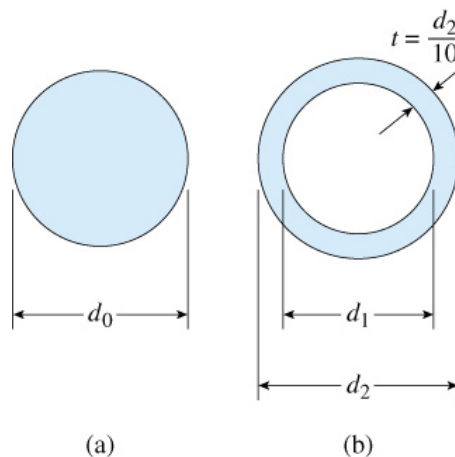


Figura 12 - Torção de um eixo de aço.

Resposta: (a) $d_o = 58,8$ mm (b) $d_2 = 67,1$ mm (c) $d_2/d_o = 1,14$ $W_{vazado}/W_{sólido} = 0,47$

3. Um eixo vazado e um eixo sólido construídos do mesmo material têm o mesmo comprimento e o mesmo raio externo R , Figura 13, o raio interno do eixo vazado é $0,6R$. (a) Assumindo que ambos os eixos estão submetidos ao mesmo torque, compare suas tensões de cisalhamento, ângulos de torção e pesos. (b) Determine as razões de peso-resistência para ambos os eixos.

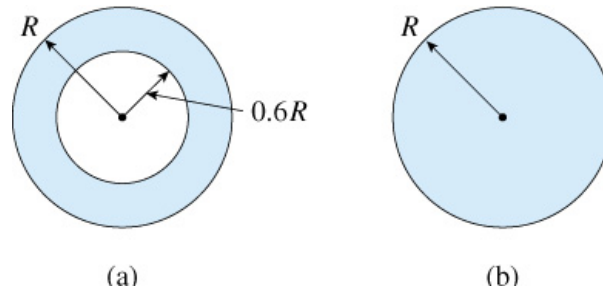


Figura 13- Comparação de eixos sólidos e vazados.

Resposta: $\frac{W_H}{W_S} = 0,64$, $\frac{T_H}{W_H} = 0,68 \frac{\tau_{max} R}{\gamma L}$ e $\frac{T_S}{W_S} = 0,5 \frac{\tau_{max} R}{\gamma L}$

H-vazado, S-Sólido

A razão para o eixo vazado é 36 % maior que do eixo sólido, mostrando a eficiência do eixo vazado.

Referências Bibliográficas:

1. BEER, F.P. e JOHNSTON, JR., E.R. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Makron Books, 1995.
2. Gere, J. M. Mecânica dos Materiais, Editora Thomson Learning
3. HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Editora Livros Técnicos e Científicos, 2000.

Observações:

- 1- O presente texto é baseado nas referências citadas.
- 2- Todas as figuras se encontram nas referências citadas.