

CEC00121 - Tópicos Especiais em Pesquisa Operacional I

Introdução à Pesquisa Operacional

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

2 de setembro de 2018

- 1 Referências
- 2 Introdução
- 3 Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional
 - Principais fases de modelagem
 - Ferramentas da pesquisa operacional
- 4 Introdução à Programação Linear
 - Formulação matemática do problema

Section 1

Referências

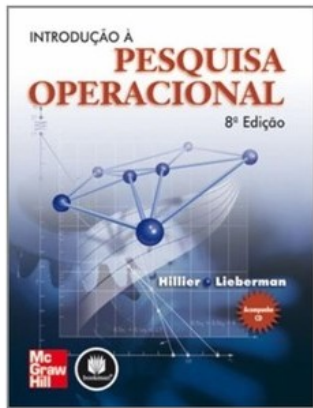


Figura 1: Hillier e Lieberman

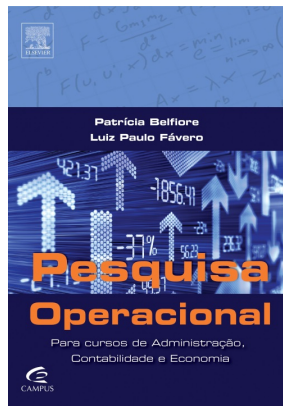


Figura 2: Belfiore e Fávero

Section 2

Introdução

Conceito da Pesquisa Operacional

- Uma representação do mundo real, das operações das organizações, de forma simplificada mas capturando os aspectos fundamentais da realidade.
- “a Pesquisa Operacional consiste na utilização de um método científico (modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos computacionais) para a tomada de decisões.” (BELFIORE; FÁVERO, 2012, p. 2)

Objetivo

Alocar recursos disponíveis para as diversas atividades da maneira mais eficiente para toda a organização

História

- O início da Pesquisa Operacional (P.O) é normalmente atribuído à II Guerra Mundial
- O método Simplex foi desenvolvido por George Dantzig em 1947
- Posteriormente, o crescimento industrial e a crescente complexidade das organizações
- Revolução computacional

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Exemplo: Planejamento Regional

- Considere três *kibutzim* em Israel.
- A produção agrícola é limitada pela quantidade de área disponível e pela quantidade de água disponível para irrigação.
- Entre as plantações adequadas para essa região temos a beterraba, algodão e sorgo.
- Essas culturas diferem nos retornos líquidos e no consumo de água, e cada cultura tem uma cota máxima para a área total a ser cultivada.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Exemplo: Planejamento Regional

Kibutz	Terra utilizável (em acres)	Alocação de água (em pés/acre)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Plantação	Cota máxima (em acres)	Consumo de água (em pés/acre)	Retorno líquido (em dólares/acre)
Beterraba	600	3	1.000
Algodão	300	2	750
Sorgo	325	1	250

Section 3

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Subsection 1

Principais fases de modelagem

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

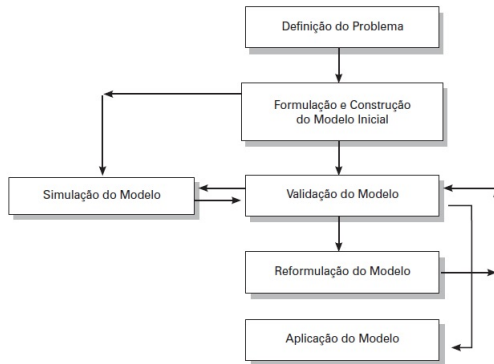


Figura 3: Principais fases

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Definição do problema e coleta de dados

Definição do problema e coleta de dados

- Desenvolver um problema bem definido
- Definir os objetivos apropriados para a organização
- Coletar dados

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Formulação de um modelo matemático

Formulação de um modelo matemático

- Representar a **essência** do problema.
 - Foco no valor relativo entre as escolhas possíveis
 - O valor obtido não necessita ser correto (em absoluto).
 - Ponderar entre “precisão” e “tratabilidade”
- Elementos de um problema de pesquisa operacional
 - Função objetivo
 - Variáveis de decisão
 - Restrições
 - Parâmetros

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Formulação de um modelo matemático

Formulação de um modelo matemático

- **Variáveis de decisão.**

- São as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo.
- Exemplo: A quantidade produzida.

- **A função objetivo**

- A medida de desempenho que se deseja maximizar ou minimizar
- Exemplo: Maximizar o lucro, minimizar o custo total, etc.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Formulação de um modelo matemático

Formulação de um modelo matemático

● Restrições

- Conjunto de equações ou inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer.
- Adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.
- Exemplo: A renda dos consumidores *restringe* as quantidades dos produtos que os indivíduos podem adquirir, etc.

● Parâmetros

- São as constantes estimadas pelos dados
- Para compensar a incerteza dos parâmetros, esses valores são modificados para valores plausíveis e é analisada a variação da função objetivo.
- Exemplo: Analisar o efeito sobre o lucro quando o preço da mercadoria varia (extremos).

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Derivação de soluções com base no modelo - Simulação

Derivação de soluções com base no modelo

- Usa-se **algoritmos** padrão (procedimentos de solução sistemática).
- Podem ser utilizados diversos programas para solucionar modelos de programação (linear) como:
 - LINGO <http://www.lindo.com/hillier>
 - Xpress Optimization Suite: <https://community.fico.com/download.jspa>
 - Solver do Microsoft Excel (possui limite de variáveis)
 - Solver do Calc do LibraryOffice (sem limite artificial de variáveis)
 - O Lingo e o Xpress possuem versão “*Student*”

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Derivação de soluções com base no modelo - Simulação

A solução ótima (melhor solução possível)

- As soluções são ótimas apenas para aquele modelo idealizado (e simplificado)
- Não há garantias que essa solução possa ser implementada no mundo real
- Solução **satisfatória**, aquela suficientemente boa e plausível para o problema em questão
- Podem ser obtidas soluções **subótimas** por meio de procedimentos **heurísticos**
- Procedimentos heurísticos são intuitivamente desenvolvidos mas não garantem a solução ótima, normalmente utilizados quando o tempo e o custo para a encontrar a solução ótima do modelo é muito grande.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Teste do modelo

Validação do modelo

- Alguns fatores ou inter-relacionamentos relevantes podem não ter sido considerados
- Alguns parâmetros ainda não foram estimados corretamente
- Checar se todas as expressões matemáticas são dimensionalmente consistentes
- **Teste de retrospectiva**, em que são utilizados dados históricos para reconstruir o passado por meio do modelo
- Testar valores máximos e mínimos para os parâmetros.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Preparação e Implantação do modelo

Preparação para aplicar o modelo

- Instalar um sistema documentado para implantar o sistema, como o modelo, o procedimento de solução e operacionais para implementação

Implementação

- Deve ser controlada e acompanhada por uma equipe responsável, de forma a detectar e corrigir possíveis mudanças nos valores da nova solução,

Subsection 2

Ferramentas da pesquisa operacional

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

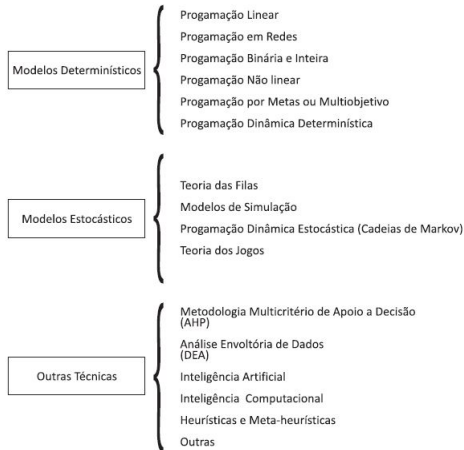


Figura 4: Ferramentas da Pesquisa Operacional

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Modelos determinísticos

Os modelos determinísticos são aqueles em que todas as variáveis envolvidas em sua formulação são constantes conhecidas.

- Programação linear (PL): a função objetivo e todas as restrições do modelo serão representadas por funções lineares das variáveis de decisão.
 - Função objetivo $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 8x_2 - 2x_3$ é linear
 - Restrição $g_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12$ é linear
 - Função objetivo $3x_1^2 + 4x_2$ é não linear
 - Uma função é dita linear quando envolve apenas constantes e termos com variáveis de **primeira ordem**.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Modelos determinísticos

- Programação não linear: Pelo menos a função objetivo ou uma das restrições do modelo será representada por uma função não linear das variáveis de decisão.
- Programação Binária e Inteira: Na programação inteira, todas as variáveis de decisão do modelo são discretas. Nos casos em que todas as variáveis de decisão são binárias, tem-se um modelo de programação binária.
- Programação em Redes: Estrutura em rede que consiste em diversos nós, em que cada nó deve estar conectado a um ou mais arcos. Exemplo: Problema clássico de transporte, problema do caminho mínimo

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Modelos determinísticos

- Programação por Metas ou Multiobjetivo: considera problemas com múltiplos objetivos ou metas.
- Programação Dinâmica Determinística: possibilita a descrição do estado do sistema em função do avanço da contagem do tempo, ao contrário dos modelos estáticos, que consideram apenas um dado momento.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Modelos Estocásticos

Os modelos estocásticos utilizam uma ou mais variáveis aleatórias em que pelo menos uma de suas características operacionais é definida por meio de funções de probabilidade.

- Teoria das Filas: comportamento de um sistema no que diz respeito à formação de filas, usado em bancos de varejo, com a preocupação de dimensionar agências.
- Modelos de Simulação: Permite a comparação de diversos cenários, de forma a orientar o processo de tomada de decisão por meio da análise de como as variações nos parâmetros de entrada afetam as variáveis de saída.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Modelos estocásticos

- Programação Dinâmica Estocástica: variação da programação dinâmica determinística para o caso em que pelo menos uma das variáveis envolvidas no sistema for aleatória.
- Teoria dos Jogos: estuda o processo de tomada de decisão entre dois ou mais indivíduos que interagem entre si.

Visão Geral da Abordagem de Modelagem da Pesquisa Operacional

Ferramentas da Pesquisa Operacional (Belfiore e Fávero)

Outras Técnicas

- Metodologia Multicritério de Apoio à Decisão
- Análise Envoltória de Dados
- Inteligência Artificial
- Inteligência Computacional
- Heurísticas e Meta-heurísticas sob o Enfoque da Pesquisa Operacional

Section 4

Introdução à Programação Linear

Tópicos dessa seção

- Formulação matemática de um modelo de programação linear
- Solução gráfica
- Hipóteses da programação linear
 - Proporcionalidade
 - Aditividade
 - Divisibilidade
 - Certeza

Introdução à Programação Linear (PL)

- Alocar da melhor forma possível recursos limitados para atividades que competem entre si.
- Determinar o nível das atividades que competem entre si, o que determina quanto recurso cada atividade vai utilizar.
- O termo “Programação” se refere a planejamento a “linear” às equações que devem ser lineares.

Subsection 1

Formulação matemática do problema

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática (Belfiore)

A formulação de um modelo geral de programação linear pode ser representada matematicamente como:

$$\begin{array}{ll} \text{max ou mim} & z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeito a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq = \geq \} b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} : & : & : \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{ \leq = \geq \} b_m & & \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 & & \end{array}$$

em que z é a função objetivo; $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ são as variáveis de decisão; $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$ é a constante da i -ésima restrição da j -ésima restrição; b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i -ésima restrição; e c_j é a constante ou coeficiente da j -ésima variável da função objetivo.

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Exemplo 1

- Um fabricante produz bicicletas e motonetas. Cada uma delas deve ser processada em duas oficinas.
- A oficina 1 tem um máximo de 120 horas disponíveis e a oficina 2 tem um máximo de 180 horas disponíveis
- A fabricação de uma bicicleta requer 6 horas na oficina 1 e 3 horas na oficina 2.
- A fabricação de uma motoneta requer 4 horas na oficina 1 e 10 horas na oficina 2.
- O lucro é de R\$45,00 por bicicleta e de R\$ 55,00 por motoneta.
- Represente o modelo matemático de maximização do lucro?

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Solução

Fazendo x_1 = número de bicicletas e x_2 = número de motonetas, temos o modelo

$$\text{Maximize } Z = 45x_1 + 55x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Exemplo 2

A Wyndor Class Co. reformulou seu mix de produção, criando 2 novos produtos que podem ser produzidos em 3 de suas fábricas

Produto 1: porta de vidro de 2,5m com esquadria de alumínio

Produto 2: janela duplamente adornada com esquadrias de madeira de 1,2m x 1,8m

- O produto 1 requer parte da capacidade produtiva das fábricas 1 e 3.
- O produto 2 deve ser produzido nas fábricas 2 e 3.
- A empresa pode vender tanto quando for possível produzir.

Pelo fato de ambos os produtos competirem pela capacidade de produção da fábrica 3 não está claro qual o mix dos 2 produtos deve ser mais lucrativo.

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Exemplo 2

A equipe de PO, por meio de discussões com a direção da empresa definiu o problema:

- Determinar quais devem ser as *taxas de produção* para ambos os produtos
- De modo a *maximizar o lucro total*
- Sujeito às restrições impostas pela capacidade produtiva limitada disponível nas 3 fábricas

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Exemplo 2

A equipe de PO também identificou os dados que precisam ser coletados:

- 1 Número de horas de produção disponível por semana em cada fábrica.
- 2 Numero de horas de produção usada em cada fábrica para cada lote produzido.
- 3 Lucro por lote produzido de cada novo produto, uma vez que a equipe concluiu que o incremento do lucro de cada lote adicional produzido é mais ou menos constante.

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Exemplo 2

A Tabela sintetiza os dados reunidos

Fábrica	Tempo de produção por lote (horas)		Tempo de produção disponível por semana (em horas)
	Produtos 1	Produtos 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro/lote	3.000	5.000	

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Solução - Exemplo 2

Definimos as variáveis de escolha:

- x_1 = quantidade de lotes do produto 1 produzido semanalmente
- x_2 = quantidade de lotes do produto 2 produzido semanalmente

e o indicador que desejamos maximizar,

- Z = lucro total por semana (em milhares de reais) obtido pela produção desses dois produtos.

Introdução à Programação Linear (PL)

Formulação Matemática

Solução - Exemplo 2

Em linguagem matemática:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,

sujeito às restrições

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$