CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 4 - Seleção de problemas de programação linear: O método Simplex

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

4 de setembro de 2018

Tópicos

Section 1

A Essência do Método Simplex

A Essência do Método Simplex

- Cada **limite de restrição** é uma reta que forma o limite do que é permitido pela restrição correspondente;
- Os pontos da interseção são as **soluções em pontos extremos** do problema;
- Os cinco pontos que estão nos vértices da região de soluções viáveis [(0,0), (0,6), (2,6),(4,3),(6,0)] são as *soluções em pontos extremos factíveis* (**soluções PEF**);
- As outras três [(0,9),(4,6),(6,0)] são chamadas *soluções em pontos extremos infactíveis*.

A Essência do Método Simplex

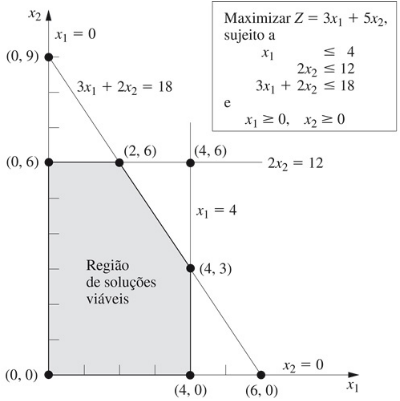


FIGURA 4.1 Limites de restrições e soluções em pontos extremos para o problema da Wyndor Glass Co.

A Essência do Método Simplex

- Nesse exemplo com **2** variáveis, cada solução em ponto extremo está na interseção de **dois** limites de restrições;
- Para um problema linear com n variáveis de decisão, cada uma de suas soluções em pontos extremos encontram-se na interseção de n limites de restrições.
- Para qualquer problema de programação linear com n variáveis de decisão, duas soluções PEF são **adjacentes** entre si, caso compartilhem $n - 1$ limites de restrições.
  - No exemplo, $n = 2$, então, duas de suas soluções PEF são adjacentes se elas compartilham **um** mesmo limite de restrição.
  - Por exemplo, (0,0) e (0,6) são adjacentes pois compartilham o mesmo limite da restrição $x_1 = 0$.

A Essência do Método Simplex

■ TABELA 4.1 Soluções PEF adjacentes para cada solução PEF do problema da Wyndor Glass Co.

Solução PEF	Suas soluções PEF adjacentes
(0, 0)	(0, 6) e (4, 0)
(0, 6)	(2, 6) e (0, 0)
(2, 6)	(4, 3) e (0, 6)
(4, 3)	(4, 0) e (2, 6)
(4, 0)	(0, 0) e (4, 3)

A Essência do Método Simplex

Estamos interessados em soluções PEF pelo fato delas estarem relacionadas à solução ótima

Teste de otimalidade

Considere qualquer problema de programação linear que possua pelo menos uma solução ótima.
Se uma solução ótima PEF não tiver nenhuma solução PEF *adjacente* que seja *melhor* (conforme medido por Z), então ela tem de ser uma solução *ótima*.

Subsection 1

Solução do exemplo

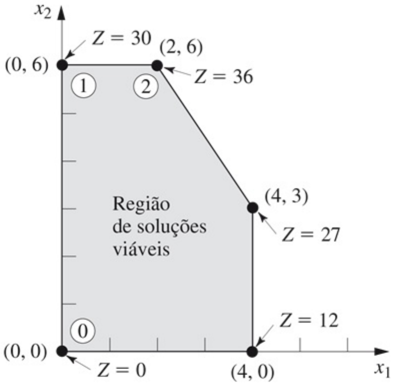


FIGURA 4.2 Este gráfico mostra a sequência de soluções PEF (⓪, ①, ②) examinadas pelo método simplex para o problema da Wyndor Glass Co. Encontra-se a solução ótima (2, 6) apenas após terem sido examinadas três soluções.

A Essência do Método Simplex

Solução do exemplo

- *Inicialização*: selecione (0,0) como solução PEF inicial;
- *Teste de otimalidade*: conclui-se que (0,0) não é uma solução ótima;
- *Iteração 1*: mova para uma solução PEF*adjacente* melhor:
  1. Considerando os dois lados da região de soluções viáveis que provêm de (0,0), desloque-se ao longo do eixo x_2
  2. Pare no primeiro limite de restrição novo: $2x_2 = 12$
  3. Encontre a solução para a interseção do novo conjunto de limites de restrições: (0,6)
- *Teste de otimalidade*: chega-se à conclusão de que (0,6) *não é* uma solução ótima (há uma solução PEF adjacente melhor).

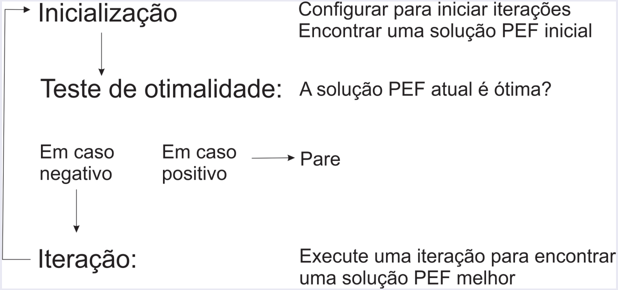
- *Iteração 2*: mova a solução PEF *adjacente* melhor (2,6):
    1. Considerando os dois lados da região de soluções viáveis provenientes de (0,6), desloque-se ao longo do lado que vai para a direita;
    2. Pare no primeiro limite de restrição encontrado: $3x_1 + 2x_2 = 12$
    3. Encontre a solução para a intersecção do conjunto de limites: (2,6)
- *Teste de otimalidade*: conclui-se que (2,6) é uma solução ótima.

Subsection 2

Conceitos-chave para soluções

Conceito 1: O método simplex concentra-se exclusivamente em soluções PEF (a região de soluções ótimas deve ser limitada).

Conceito 2: o método simplex é um *algoritmo iterativo* (um procedimento sistemático para solução que repete uma série de etapas, chamadas *iteração*, até que se chegue ao resultado desejado).



Conceito 3: Sempre que possível a inicialização do método simples opta pela origem (todas as variáveis de decisão iguais a zero) como solução PEF inicial.

Conceito 4: Cada vez que o método simplex executar uma iteração para se deslocar da solução PEF atual para uma melhor, ele *sempre* opta por uma solução PEF que é *adjacente* à solução atual.

Conceito 5: O método desloca-se ao longo do lado com *maior* taxa de crescimento de Z.

Conceito 6: Uma taxa *positiva (negativa)* de crescimento em Z implica que a solução PEF adjacente é *melhor (pior)*. Então, verifique se qualquer um dos lados resulta uma taxa de crescimento em Z *positiva*, caso contrário a solução Z atual é ótima.

Section 2

Configuração do Método Simplex

Configuração do Método Simplex

- O procedimento algébrico se baseia em sistemas de equações para solução.
- Devemos converter as *restrições funcionais de desigualdade* em *restrições de igualdade equivalentes*, incluindo **variáveis de folga**.

Exemplo

- Considere a primeira restrição do exemplo da Wyndor Glass Co.:

$$x_1 \leq 4$$

Configuração do Método Simplex

- O procedimento algébrico se baseia em sistemas de equações para solução.
- Devemos converter as *restrições funcionais de desigualdade* em *restrições de igualdade equivalentes*, incluindo **variáveis de folga**.

Exemplo

- Considere a primeira restrição do exemplo da Wyndor Glass Co.:

$$x_1 \leq 4$$

- A variável de folga para essa restrição é definida como:

$$x_3 = 4 - x_1$$

que é a quantidade de folga no lado esquerdo da desigualdade. Logo:

$$x_1 + x_3 = 4$$

Configuração do Método Simplex

Após introduzir as variáveis de folga para as demais restrições funcionais temos agora a *forma aumentada* do modelo de programação linear:

Forma original del modelo

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2,\\
&\text{sujeta a}\\
&\qquad x_1 \leq 4\\
&\qquad 2x_2 \leq 12\\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 18\\
&\text{y}\\
&\qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Forma aumentada del modelo[4]

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2,\\
&\text{sujeta a}\\
&(1) \quad x_1 + x_3 = 4\\
&(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12\\
&(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18\\
&\text{y}\\
&\qquad x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

Configuração do Método Simplex

- Se uma variável *folga for igual a 0* na solução atual, então essa solução encontra-se no limite de restrição para a restrição funcional correspondente.
  - Um valor maior do que 0 indica que a solução está do lado *viável* desse limite de restrição;
  - Um valor menor do que 0 indica que a solução está do lado *inviável* desse limite de restrição;

Configuração do Método Simplex

- Se uma variável *folga for igual a 0* na solução atual, então essa solução encontra-se no limite de restrição para a restrição funcional correspondente.
  - Um valor maior do que 0 indica que a solução está do lado *viável* desse limite de restrição;
  - Um valor menor do que 0 indica que a solução está do lado *inviável* desse limite de restrição;
- **Solução aumentada** é uma solução para as variáveis originais, que foi aumentada pelas *variáveis de folga*.
  - Exemplo: a solução (3, 2) leva à solução aumentada (3, 2, 1, 8, 5), com variáveis de folga $x_3 = 1$, $x_4 = 8$ e $x_5 = 5$.

Configuração do Método Simplex

- Se uma variável *folga for igual a 0* na solução atual, então essa solução encontra-se no limite de restrição para a restrição funcional correspondente.
  - Um valor maior do que 0 indica que a solução está do lado *viável* desse limite de restrição;
  - Um valor menor do que 0 indica que a solução está do lado *inviável* desse limite de restrição;
- **Solução aumentada** é uma solução para as variáveis originais, que foi aumentada pelas *variáveis de folga*.
  - Exemplo: a solução (3, 2) leva à solução aumentada (3, 2, 1, 8, 5), com variáveis de folga $x_3 = 1$, $x_4 = 8$ e $x_5 = 5$.
- **Solução básica** é uma solução em ponto extremo *aumentada*.
  - Exemplo: a solução ponto extremo infactível (4,6), que aumentando-se com os valores das variáveis de folga: (4, 6, 0, 0, -6)

Configuração do Método Simplex

- Uma **solução básica viável (BV)** é uma solução PEF *aumentada*.
  - A solução PEF (0, 6) é equivalente à solução BV(0, 6, 4, 0, 6)
  - A *única* diferença entre a solução PEF e a BV é se os valores das *variáveis de folga* estão incluídos

Configuração do Método Simplex

- Uma **solução básica viável (BV)** é uma solução PEF *aumentada*.
  - A solução PEF (0, 6) é equivalente à solução BV(0, 6, 4, 0, 6)
  - A *única* diferença entre a solução PEF e a BV é se os valores das *variáveis de folga* estão incluídos
- No exemplo, temos:
  Número de variáveis - número de equações = 5 - 3 = 2
  - Temos 2 *graus de liberdade* na solução do sistema, já que quaisquer das duas variáveis podem ser escolhidas para ser iguais a qualquer valor arbitrário.
  - O método Simplex usa 0 para esse valor arbitrário.
  - Duas das variáveis (chamadas de *variáveis <u>não básicas</u>*) são configuradas em <u>0</u>;
  - A solução simultânea das três equações para as outras três variáveis (denominadas *variáveis <u>básicas</u>*) é a solução básica

Configuração do Método Simplex

Uma **solução básica** possui as seguintes propriedades

- Cada variável é designada como uma variável *básica* ou uma variável *não básica*;
- O *número de variáveis básicas* é igual ao número de restrições funcionais;
- O *número de variáveis não básicas* é igual ao número total de variáveis menos o número de restrições funcionais;
- As **variáveis não básicas** são configuradas em **zero**;
- Os valores das **variáveis básicas** são obtidas como a **solução** simultânea das equações (**base**);
- Se as variáveis básicas satisfazem as restrições de não negatividade, a solução básica é uma **solução BV**.

Configuração do Método Simplex

Quando lidamos com o problema na forma aumentada, é conveniente considerar e manipular a equação da função objetivo, ao mesmo tempo que as novas equações de restrições. Então, reescrevendo o problema de forma equivalente, temos:

$$\text{Maximizar} \quad Z,$$

sujeta a

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\
(1) & x_1 \qquad\quad + x_3 \qquad\qquad & = & 4 \\
(2) & 2x_2 \qquad + x_4 \qquad & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Section 3

A Álgebra do Método Simplex

Inicialização

Faça com que as variáveis x_1 e x_2 sejam *não básicas*, considerando o **Conceito 3** apresentado anteriormente.

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \text{ entonces}$$

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & x_1 & & + \boldsymbol{x_3} & & & = 4 & \qquad \boldsymbol{x_3} = 4 \\
(2) & & 2x_2 & & + \boldsymbol{x_4} & & = 12 & \qquad \boldsymbol{x_4} = 12 \\
(3) & 3x_1 & + 2x_2 & & & + \boldsymbol{x_5} & = 18 & \qquad \boldsymbol{x_5} = 18
\end{array}$$

A **solução BV inicial** é (0, 0, 4, 12, 18)

A Álgebra do Método Simplex

Teste de Otimalidade

A função objetivo é:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

de modo que $Z = 0$ para a solução BV inicial

- Os coeficientes de cada variável não básica (x_1, x_2) fornecem a taxa de crescimento em Z
- As taxas de crescimento, são, então 3 e 5, respectivamente

A Álgebra do Método Simplex

Determinação da direção de deslocamento (etapa 1 de uma iteração)

A escolha de quais variáveis não básicas devem ser aumentadas é feita da seguintes forma:

$$
\begin{array}{rl}
 & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{Aumentar } x_1? & \text{Taxa de crescimento em } Z = 3 \\
\text{Aumentar } x_2? & \text{Taxa de crescimento em } Z = 5 \\
\multicolumn{2}{c}{5 > 3, \text{ portanto opte por } x_2 \text{ para aumentar}}
\end{array}
$$

Chamamos x_2 de **variável básica que entra** para a iteração atual

Determinação de onde interromper (etada 2 de uma iteração)

1. A exigência de satisfazer as restrições na forma aumentada significa que aumentar x_2 altera os valores de algumas das variáveis básicas:

$$
\begin{array}{llllllll}
 & & & & & & x_1 = 0, & \text{por lo tanto} \\
(1) & x_1 & & + \boldsymbol{x_3} & & = 4 & \boldsymbol{x_3} = 4 & \\
(2) & & 2x_2 & & + \boldsymbol{x_4} & = 12 & \boldsymbol{x_4} = 12 - 2x_2 & \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 & & & + \boldsymbol{x_5} & = 18 & \boldsymbol{x_5} = 18 - 2x_2. &
\end{array}
$$

A Álgebra do Método Simplex

Determinação de onde interromper (etada 2 de uma iteração)

2. Todas as variáveis sejam *não negativas*. Enquanto podemos aumentar o valor de x_2 sem violar as restrições de não negatividade para as variáveis básicas

$$
\begin{array}{lll}
x_3 = 4 \geq 0 & \Rightarrow \text{nenhum limite superior em } x_2 & \\
x_4 = 12 - 2x_2 \geq 0 & \Rightarrow x_2 \leq \frac{12}{2} = 6 & \leftarrow \text{mínimo} \\
x_5 = 18 - 2x_2 \geq 0 & \Rightarrow x_2 \leq \frac{18}{2} = 9 &
\end{array}
$$

Pelo **teste da razão mínima**, x_2 pode ser aumentada apenas até 6.

- Esse teste determina qual variável básica cai a zero primeiro à medida que a variável que entra é aumentada;
  - Diminuir essa variável básica até zero a converterá em uma *variável não básica* para a solução BV seguinte;
  - Essa variável é chamada **variável básica que sai** para a iteração atual (pois ela está saindo da base).

A Álgebra do Método Simplex

Método de resolução para se chegar à nova solução BV (etapa 3 de uma iteração)

- Aumentando-se $x_2 = 0$ para $x_2 = 6$ nos desloca da solução BV *inicial* à esquerda para a nova solução BV da direita.

	Solução BV inicial	Nova solução BV
Variáveis não básicas	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$	$x_1 = 0,\ x_4 = 0$
Variáveis básicas	$x_3 = 4,\ x_4 = 12,\ x_5 = 18$	$x_3 =?,\ x_2 = 6,\ x_5 =?$

Método de resolução para se chegar à nova solução BV (etapa 3 de uma iteração)

- O objetivo da etapa 3 é o de converter o sistema de equações em uma forma mais conveniente.
- As *novas* variáveis básicas são indicadas em negrito no sistema de equações completo

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & \mathbf{Z} - 3x_1 - 5\mathbf{x_2} & = & 0 \\
(1) & x_1 \qquad\quad + \mathbf{x_3} & = & 4 \\
(2) & 2\mathbf{x_2} \qquad\quad + x_4 & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2\mathbf{x_2} \qquad\quad + \mathbf{x_5} & = & 18.
\end{array}
$$

Método de resolução para se chegar à nova solução BV (etapa 3 de uma iteração)

Podemos usar qualquer um dos dois tipos de operações algébricas elementares

1. Multiplicar (ou dividir) uma equação por uma constante diferente de zero
2. Somar (ou subtrair) um múltiplo de uma equação a (de) outra equação.

A Álgebra do Método Simplex

- Os coeficientes de x_2 no sistema de equações anterior são, respectivamente -5, 0, 2 e 2.
- Desejamos que esses coeficientes sejam 0, 0, 1 e 0, respectivamente.
- Para transformar o coeficiente 2 na Equação(2) em 1 dividimos a Equação (2) por 2:

$$(2) x_2 + \frac{1}{2} x_4 = 6$$

- Para transformar os coeficientes -5 e 2 em zeros:
  - Adicionamos 5 vezes essa nova Equação (2) à Equação (0);
  - Subtraímos 2 vezes essa nova Equação (2) da Equação (3);
    O novo sistema resultante completo de equação fica:

A Álgebra do Método Simplex

$$
\begin{array}{llcr}
(0) & \boldsymbol{Z} - 3x_1 + \frac{5}{2}x_4 & = & 30 \\
(1) & x_1 + \boldsymbol{x_3} & = & 4 \\
(2) & \boldsymbol{x_2} + \frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\
(3) & 3x_1 - x_4 + \boldsymbol{x_5} & = & 6.
\end{array}
$$

Teste de otimalidade para a nova solução BV

Na nova função objetivo temos que o coeficiente de x_1 é positivo:

- Aumentar x_1 levaria a uma solução BV adjacente melhor
- A solução atual não é ótima

A Álgebra do Método Simplex

Iteração 2 e a solução ótima resultante

Etapa 1: A variável x_1 é a variável básica que entra.

Etapa 2: Determinar a variável básica que sai pelo teste da razão mínima.

$$\begin{array}{lll} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{1} = 4 & \\ x_2 = 6 \geq 0 \geq 0 & \Rightarrow \text{nenhum limite superior em } x_1 & \\ x_5 = 6 - 3x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq \frac{6}{2} = 2 & \leftarrow \text{mínimo} \end{array}$$

O teste da razão mínima indica que x_5 é a variável básica que sai.

Etapa 3: Realizamos as operações básicas para que x_1 tenha os coeficientes (0, 0, 0, 1) nas respectivas equações.

Iteração 2 e a solução ótima resultante

- A nova solução BV é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,\ 6,\ 2,\ 0,\ 0)$
- O valor ótimo é $Z = 36$.

$$
\begin{array}{llcl}
(0) & Z & + \frac{3}{2}x_4 + x_5 & = 36 \\
(1) & x_3 & + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 & = 2 \\
(2) & x_2 & + \frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
(3) & x_1 & - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = 2.
\end{array}
$$

A Álgebra do Método Simplex

Teste de otimalidade

Usando a Equação (0) para expressar Z em termos somente das variáreis não-básicas atuais:

$$Z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5$$

Aumentar x_4 ou x_5 diminuiria Z

- Nenhuma das soluções BV adjacentes é tão boa como a atual.
- A solução BV atual é **ótima**

Section 4

O Método Simplex na Forma Tabular

O Método Simplex na Forma Tabular

- A forma algébrica transmite a lógica do método simplex
- Para resolver o problema de forma manual usamos a *forma tabular*.

TABELA 4.3 Sistema inicial de equações para o problema da Wyndor Glass Co.

(a) Forma algébrica

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & \boldsymbol{Z} - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\
(1) & x_1 \qquad + \boldsymbol{x_3} & = & 4 \\
(2) & 2x_2 \qquad + \boldsymbol{x_4} & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 \qquad + \boldsymbol{x_5} & = & 18
\end{array}
$$

(b) Forma tabular

Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 1

Inicialização Selecione as *variáveis de decisão* para ser as *variáveis não básicas* iniciais, iguais a zero, e as *variáveis de folga* para ser as *variáveis básicas*.

Teste de otimalidade A atual solução BV é ótima se, e somente se, todos os coeficientes na linha 0 forem não negativos (≥ 0)

Iteração

- Etapa 1: Determine a variável básica que entra selecionando a variável com coeficiente negativo de maior valor absoluto. Coloque um retângulo em torno da coluna abaixo do coeficiente e denominei-a **coluna pivô**.
- Etapa 2: Determine a variável básica que sai aplicando o *teste da razão mínima*.

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 1 - Teste de razão mínima

1. Selecione na coluna pivô os coeficientes estritamente positivos;
2. Divida os coeficientes "lado direito" pelos pelos da coluna pivô;
3. Identifique a linha que possui a <u>menor</u> dessas razões;
4. A variável básica para essa linha é a que sai.

TABELA 4.4 Aplicando o teste da razão mínima para determinar a primeira variável básica que sai para o problema da Wyndor Glass Co.

Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito	Razão
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	$\boxed{0}$	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12	$12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ mínimo
x_5	(3)	0	3	$\boxed{2}$	0	0	1	18	$18 \rightarrow \frac{18}{2} = 9$

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 1 (continuação)

- Coloque um retângulo em torno dessa linha e chame-a de **linha pivô**
- O número que se encontra entre ambos os retângulos é o **número pivô**.
- Etapa 3: Encontre uma nova solução BV usando **operações elementares em linhas**:
  1. Divida a linha pivô pelo número pivo. Use esse nova linha pivô em 2 e 3.
  2. Para cada outra linha, incluindo a (0), que possua um coeficiente negativo na coluna pivô, adicione a essa linha o produto do valor absoluto desse coeficiente pela nova linha pivô.
  3. Para cada outra linha que tiver um coeficiente positivo na coluna pivô, subtraia dessa linha o *produto* desse coeficiente pela nova linha pivô.

Iteração 1

■ TABELA 4.5 Tabela simplex para o problema da Wyndor Glass Co. após a primeira linha pivô ter sido dividida pelo primeiro número pivô.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1						
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0						

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 1

Coeficiente Negativo adicione o produto;

Coeficiente Positivo subtraia o produto.

TABELA 4.6 As duas primeiras tabelas simplex para o problema da Wyndor Glass Co.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 2

- Etapa 1: A variável x_1 é a variável básica que entra.
  - **Número pivô** : 3
- Etapa 2: A variável x_5 é a variável básica que sai.

TABELA 4.7 Etapas 1 e 2 da iteração 2 para o problema da Wyndor Glass Co.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito	Razão
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	$\frac{6}{3} = 2 \leftarrow$ mínimo

O Método Simplex na Forma Tabular

Iteração 2

- Etapa 3:
  - Dividimos a linha pivô (linha 3) pelo número pivô 3
  - Adicionamos à linha 0 o produto de três vezes a nova linha 3
  - Subtraímos a nova linha 3 da linha 1

O Método Simplex na Forma Tabular

■ TABELA 4.8 Conjunto completo de tabelas simplex para o problema da Wyndor Glass Co.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Iteração 2

- A nova solução BV é (2, 6, 2, 0, 0)
- $Z = 36$
- Teste de otimalidade: não existe nenhum coeficiente negativo na linha 0, então, a solução atual é ótima.

Section 5

Desempate no método simplex

Desempate no método simplex

Desempate no método simplex

- **Empate para a variável que entra:** A seleção pode ser feita de forma arbitrária e a solução ótima será alcançada, independente da escolha. Exemplo: $Z = 3x_1 + 3x_2$
- **Empate para a variável básica que sai:** Simplesmente faça o desempate de forma arbitrária.
- **Nenhuma variável básica saindo:** Esse resultado poderia ocorrer quando a variável básica que entra pudesse for aumentada indefinidamente sem dar valores negativos a qualquer variável básica atual. Provavelmente o modelo foi mal formulado ou podem ter ocorrido erros computacionais.
- **Soluções ótimas múltiplas**

Desempate no método simplex

Desempate no método simplex: soluções ótimas múltiplas

- Qualquer problema de programação linear com soluções ótimas múltiplas possui pelo menos duas soluções PEF que são ótimas.
- É uma combinação convexa dessas soluções PEF adjacentes.
  - Para o exemplo, se (2,6) e (4,3) são soluções ótimas, então qualquer outra solução será dada pela combinação convexa: $(x_1, x_2) = w_1(2, 6) + w_2(4, 3)$ para $w_1 + w_2 = 1$, $w_1, w_2 \geq 0$
- Uma das variáveis não-básicas terá um coeficiente igual a zero na linha 0 final; portanto, aumentar qualquer variável desse tipo não vai alterar o valor de Z.
- Outras soluções BV ótimas podem ser identificadas executando-se iterações adicionais do método simplex e cada vez escolhendo-se uma variável não-básica com um coeficiente igual a zero como variável básica que entra

Desempate no método simplex

■ TABELA 4.10 Conjunto completo de tabela simplex para obter todas as soluções BV ótimas para o problema da Wyndor Glass Co., com $c_2 = 2$

Iteração	Variável básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito	Solução ótima?
0	Z	(0)	1	−3	−2	0	0	0	0	Não
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	−2	3	0	0	12	Não
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	−3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	Sim
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	−1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
Extra	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	Sim
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_4	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

Section 6

Adaptação a outras formas de modelo

Exemplo

Suponha que o problema da Wyndor Glass Co tenha sido modificado para *exigir* que a Fábrica 3 seja usada em plena carga.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{array}{rl}
x_1 \quad & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & = 18 \\
x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0
\end{array}
\end{array}
$$

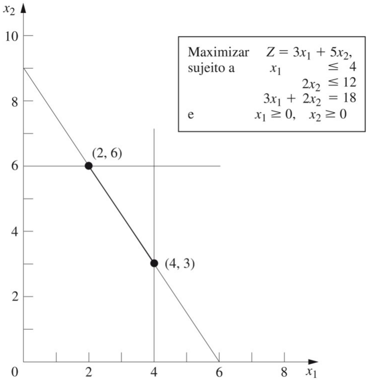


FIGURA 4.3 Quando a terceira restrição funcional torna-se uma restrição de igualdade, a região de soluções viáveis para o problema da Wyndor Glass Co. torna-se o segmento de reta entre (2, 6) e (4, 3).

A região de soluções viáveis agora é formada *apenas* pelo segmento de reta conectando os pontos (2,6) e (4,3).

- O sistema de equações para a forma aumentada fica, então:

$$
\begin{array}{llllll}
(0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & = 0 \\
(1) & x_1 & & x_3 & & = 4 \\
(2) & & 2x_2 & & x_4 & = 12 \\
(3) & 3x_1 & +2x_2 & & & = 18
\end{array}
$$

- Não temos mais uma variável de folga para a Equação (3).

Obtenção de uma solução básica (BV) inicial

Devemos construir um **problema artificial**.

1. Aplique a **técnica das variáveis artificiais** introduzindo uma **variável artificial** *não negativa* $\bar{x}_5$ na Equação (3) como se fosse uma variável de folga

   (3) $\quad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$

Obtenção de uma solução básica (BV) inicial

Devemos construir um **problema artificial**.

1. Aplique a **técnica das variáveis artificiais** introduzindo uma **variável artificial** *não negativa* $\bar{x}_5$ na Equação (3) como se fosse uma variável de folga

   (3) $\quad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$

2. Atribua um custo *extremamente alto* para ter $\bar{x}_5 \geq 0$, alterando a função objetivo:

   $Z = 3x_1 + 5x_2$ para

   $Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5$

   em que M representa, simbolicamente, um número positivo enorme.

Conversão da equação (0) para a forma apropriada

O sistema de equações após o problema artificial ser aumentado é

$$
\begin{array}{llllllll}
(0) & Z & -3x_1 & -5x_2 & & & +M\bar{x}_5 & = 0 \\
(1) & x_1 & & x_3 & & & & = 4 \\
(2) & & 2x_2 & & x_4 & & & = 12 \\
(3) & 3x_1 & +2x_2 & & & & \bar{x}_5 & = 18
\end{array}
$$

Entretanto, a variável $\bar{x}_5$ tem um coeficiente não zero na equação (0).
Lembre-se: **Todas as variáveis básicas tem que ser algebricamente eliminadas da Equação (0)**.

Conversão da equação (0) para a forma apropriada

- Para eliminar algebricamente $\bar{x}_5$ da Equação (0), precisamos calcular: Equação (0) - $M\cdot$ Equação(3)

$$\begin{array}{c} Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0 \\ -M(3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18) \\ \hline Z - (3M+3)x_1 - (2M+5)x_2 = -18M \end{array}$$

- Expressamos cada coeficiente na Equação (0) como uma função linear $aM + b$

Aplicação do método simplex

- Pelo fato de M ser supostamente tão grande que b seja sempre desprezível comparando com M quando $a \neq 0$, as decisões no teste de otimalidade e a escolha da variável básica que entra são feitas usando-se apenas os fatores *multiplicadores* da forma usual, exceto para os casos de desempate, que usamos os fatores aditivos.
- Como $3M + 3 > 2M + 5 \Rightarrow$ devemos aumentar x_1.
- Veja que a variável artificial $\bar{x}_5$ é a *variável básica* $\bar{x}_5 > 0$ nas duas primeiras tabelas e uma *variável não básica* $\bar{x}_5 = 0$ nas duas últimas etapas

TABELA 4.11 Conjunto completo de tabela simplex para o problema mostrado na Figura 4.4

Iteração	Variável básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	Lado direito
0	Z	(0)	1	$-3M-3$	$-2M-5$	0	0	0	$-18M$
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	$\bar{x}_5$	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	0	$-2M-5$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	$\bar{x}_5$	(3)	0	0	2	-3	0	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M+\frac{5}{2}$	27
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
3	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$M+1$	36
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& 0,3x_1 + 0,1x_2 \quad \leq 2,7 \\
& 0,5x_2 + 0,5x_2 \quad = 6 \\
& 0,6x_1 + 0,4x_2 \quad \geq 6 \\
& x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Para a terceira restrição devemos adicionar uma variável de excesso $x_5 = 0,6x_1 + 0,4x_2 - 6$. A **variável de excesso** subtrai o excedente do lado esquerdo, convertendo a restrição de desigualdade em uma igualdade.

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& 0,3x_1 + 0,1x_2 \quad \leq 2,7 \\
& 0,5x_2 + 0,5x_2 \quad = 6 \\
& 0,6x_1 + 0,4x_2 \quad \geq 6 \\
& x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Para a terceira restrição devemos adicionar uma variável de excesso $x_5 = 0,6x_1 + 0,4x_2 - 6$. A **variável de excesso** subtrai o excedente do lado esquerdo, convertendo a restrição de desigualdade em uma igualdade.
- Posteriormente adicionamos a variável artificial $\bar{x}_6$ para podermos trabalhar com essa restrições agora na forma de igualdade.

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$0,6x_1 + 0,4x_2 \geq 6$$

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{rlll}
 & 0,6x_1 + 0,4x_2 & & \geq 6 \\
\rightarrow & 0,6x_1 + 0,4x_2 & -x_5 & = 6 \quad (x_5 \geq 0)
\end{array}
$$

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{lllllll}
 & 0,6x_1 + 0,4x_2 & & & \geq 6 & \\
\rightarrow & 0,6x_1 + 0,4x_2 & -x_5 & & = 6 & (x_5 \geq 0) \\
\rightarrow & 0,6x_1 + 0,4x_2 & -x_5 & \bar{x}_6 & = 6 & (x_5, \bar{x}_6 \geq 0)
\end{array}
$$

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& 0,3x_1 + 0,1x_2 \quad \leq 2,7 \\
& 0,5x_2 + 0,5x_2 \quad = 6 \\
& 0,6x_1 + 0,4x_2 \quad \geq 6 \\
& x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Então, devemos incluir para cada restrição:

Restrição 1: variável de folga: x_3

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{array}{rr}
0,3x_1 + 0,1x_2 & \leq 2,7 \\
0,5x_2 + 0,5x_2 & = 6 \\
0,6x_1 + 0,4x_2 & \geq 6 \\
x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0
\end{array}
\end{array}
$$

Então, devemos incluir para cada restrição:

Restrição 1: variável de folga: x_3

Restrição 2: variável artificial: $\bar{x}_4$

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 \\ \text{sujeito a} & \\ & \begin{array}{lr} 0,3x_1 + 0,1x_2 & \leq 2,7 \\ 0,5x_2 + 0,5x_2 & = 6 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 & \geq 6 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Então, devemos incluir para cada restrição:

Restrição 1: variável de folga: x_3

Restrição 2: variável artificial: $\bar{x}_4$

Restrição 3: variável de excedente: x_5
variável artificial: $\bar{x}_6$

Adaptação a outras formas de modelo

Restrições funcionais na forma $\geq$

$$
\begin{array}{llllllr}
\text{Minimizar} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6, \\
\text{sujeta a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 & & & & = 2.7 \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 & + \bar{x}_4 & & & = 6 \\
& 0.6x_1 + 0.4x_2 & & - x_5 & + \bar{x}_6 & = 6
\end{array}
$$

$$\text{y} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0.$$

- Como estamos minimizando, temos $+M$ e não $-M$
- Mas como resolver um problema de minimização?

Minimização

- Uma maneira simplex de converter qualquer problema de minimização

$$\text{Minimizar} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

em um problema de maximização equivalente:

$$\text{Maximizar} \qquad -Z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

Minimização

Assim, para o exemplo:

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & Z = 0,4x_1 + 0,5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \rightarrow & \text{Maximizar} & -Z = -0,4x_1 - 0,5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6 \end{array}$$

O sistema de equações completo ficará assim:

$$\begin{array}{llr} (0) & -Z + 0.4x_1 + 0.5x_2 \quad + M\bar{x}_4 \quad + M\bar{x}_6 & = 0 \\ (1) & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 & = 2.7 \\ (2) & 0.5x_1 + 0.5x_2 \quad + \bar{x}_4 & = 6 \\ (3) & 0.6x_1 + 0.4x_2 \quad - x_5 + \bar{x}_6 & = 6. \end{array}$$

- Devemos eliminar as variáveis básicas $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_5$ da função objetivo:
  - Equação (0) - M$\cdot$ Equação(2) - M$\cdot$ Equação(3):

Renglón 0:

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
 & [0.4, & 0.5, & 0, & M, & 0, & M, & 0] \\
 & -M[0.5, & 0.5, & 0, & 1, & 0, & 0, & 6] \\
 & -M[0.6, & 0.4, & 0, & 0, & -1, & 1, & 6] \\
\hline
\text{Nuevo renglón} & 0 = [-1.1M + 0.4, & -0.9M + 0.5, & 0, & 0, & M, & 0, & -12M]
\end{array}
$$

TABELA 4.12 O método "do grande número" para o exemplo do tratamento radioterápico

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado direito
0	Z	(0)	-1	$-1{,}1M + 0{,}4$	$-0{,}9M + 0{,}5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	$\boxed{0{,}3}$	0,1	1	0	0	0	2,7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0,5	0,5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0,6	0,4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	$-2{,}1M - 3{,}6$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1,5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	$\boxed{0{,}2}$	-2	0	-1	1	0,6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}M - \frac{11}{6}$	$-0{,}5M - 4{,}7$
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{5}{3}$	0,5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0,5	$M - 1{,}1$	0	M	$-5{,}25$
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7,5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0,6	1	-1	0,3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4,5

O método de duas fases

O método de suas fases

Podemos imaginar o método do "grande número" como tendo duas fases:

1. *Primeira fase*: todas as variáveis artificiais são levadas a zero (em razão do custo imposto por M por unidade ser maior que zero);

O método de duas fases

O método de suas fases

Podemos imaginar o método do "grande número" como tendo duas fases:

1. *Primeira fase*: todas as variáveis artificiais são levadas a zero (em razão do custo imposto por M por unidade ser maior que zero);
2. *Segunda fase*:todas as variáveis artificiais são mantidas em zero (devido a esse mesmo custo), ao passo que o método simplex gera uma sequência de soluções BV para o problema real, levando a uma solução ótima

Fase 1 para o exemplo

$$\text{Minimizar} \quad Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 \phantom{+ \bar{x}_4 - x_5 + \bar{x}_6} &= 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 \phantom{- x_5 + \bar{x}_6} &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \phantom{+ x_3 + \bar{x}_4} - x_5 + \bar{x}_6 &= 6 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0$$

que usamos operações elementares em linhas para eliminar as variáveis básicas $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_6$

O método de duas fases

Fase 1

■ TABELA 4.13 Fase 1 do método das duas fases para o exemplo do tratamento radioterápico

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado direito
0	Z	(0)	-1	$-1,1$	$-0,9$	0	0	1	0	-12
	x_3	(1)	0	0,3	0,1	1	0	0	0	2,7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0,5	0,5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0,6	0,4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$-2,1$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1,5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0,2	-2	0	-1	1	0,6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-0,5$
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0,5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6

- Observe que na penúltima tabela há um empate para a variável básica que entra entre x_3 e x_5, que é desempatado arbitrariamente em favor de x_3
- A solução obtida no final da fase 1 é, então, $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6)$=(6; 6; 0,3; 0; 0; 0) ou, após $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_6$ ser eliminadas, $(x_1, x_2, x_3, x_5) =$ (6; 6; 0,3; 0).

Na Tabela 4.13, eliminamos as variáveis artificiais, substituímos a função objetivo da fase 2 ($-Z = 0,4x_1 - 0,5x_2$ na forma maximizada) na linha 0 e, depois, restabelecemos a forma apropriada da eliminação gaussiana (eliminando algebricamente as variáveis *básicas* x_1 e x_2 da linha 0)

Adaptação a outras formas de modelo

O método de duas fases

TABELA 4.14 Preparo para iniciar a fase 2 do exemplo do tratamento radioterápico

	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado direito
Tabela final da fase 1	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0,3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6
Eliminar $\bar{x}_4$ e $\bar{x}_6$	Z	(0)	-1	0	0	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0,3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Substituir a função objetivo da fase 2	Z	(0)	-1	0,4	0,5	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0,3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Restabelecer a forma	Z	(0)	-1	0	0	0		$-0,5$		$-5,4$
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5		6

TABELA 4.15 Fase 2 do método das duas fases para o exemplo do tratamento radioterápico

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_5	Lado direito
0	Z	(0)	-1	0	0	0	$-0,5$	$-5,4$
	x_1	(1)	0	1	0	0	-5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	1	0,3
	x_2	(3)	0	0	1	0	5	6
1	Z	(0)	-1	0	0	0,5	0	$-5,25$
	x_1	(1)	0	1	0	5	0	7,5
	x_5	(2)	0	0	0	1	1	0,3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	0	4,5

Adaptação a outras formas de modelo

Nenhuma solução viável

Se o problema origina não tiver nenhuma *solução viável*, então tanto o método do “grande número ”como o método de duas fases levam a uma solução final que tem pelo menos uma variável artificial maior do que zero. Caso contrário, *todas* elas serão iguais a zero.

Adaptação a outras formas de modelo

Nenhuma solução viável

TABELA 4.16 O método "do grande número" para a revisão do exemplo do tratamento radioterápico que não possui nenhuma solução viável

Iteração	Variável básica	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado direito
0	Z	(0)	-1	$-1{,}1M + 0{,}4$	$-0{,}9M + 0{,}5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0,3	0,1	1	0	0	0	1,8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0,5	0,5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0,6	0,4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	$-5{,}4M - 2{,}4$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	6
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	3
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0,2	-2	0	-1	1	2,4
2	Z	(0)	-1	0	0	$M + 0{,}5$	$1{,}6M - 1{,}1$	M	0	$-0{,}6M - 5{,}7$
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	3
	x_2	(2)	0	0	1	-5	3	0	0	9
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0	-1	$-0{,}6$	-1	1	0,6

Section 7

Análise de Pós-Otimalidade

Análise de Pós-Otimalidade

- A Tabela 4.17 resume as etapas típicas na análise de pós-otimalidade em estudos de programação linear.
- A coluna mais à direita identifica algumas técnicas algorítmicas que envolvem o método simplex.

TABELA 4.17 Análise de pós-otimalidade para programação linear

Tarefa	Propósito	Técnica
Depuração do modelo	Encontra erros e pontos fracos no modelo	Reotimização
Validação do modelo	Demonstra a validade do modelo final	Ver Seção 2.4
Decisões gerenciais finais sobre alocação de recursos (os valores b_i)	Faz a divisão apropriada dos recursos organizacionais entre as atividades em estudo e outras atividades importantes	Preços-sombra
Avalia as estimativas dos parâmetros de modelos	Determina estimativas cruciais que podem afetar a solução ótima para estudo adicional	Análise de sensibilidade
Avalia o equilíbrio entre os parâmetros dos modelos	Determina o melhor equilíbrio	Programação linear paramétrica

Preços-sombra

- Em muitos casos pode haver alguma flexibilidade nas quantidades b_i que estão disponíveis.

Preços-sombra

- Em muitos casos pode haver alguma flexibilidade nas quantidades b_i que estão disponíveis.
- O **preço sombra** para o recurso i (representado por y^*) mede o valor marginal desse recurso, isto é, a taxa marginal na qual Z poderia ser aumentado, elevando-se (ligeiramente) a quantidade desse recurso (b_i) que está sendo disponibilizado.

Preços-sombra

- Em muitos casos pode haver alguma flexibilidade nas quantidades b_i que estão disponíveis.
- O **preço sombra** para o recurso i (representado por y^*) mede o valor marginal desse recurso, isto é, a taxa marginal na qual Z poderia ser aumentado, elevando-se (ligeiramente) a quantidade desse recurso (b_i) que está sendo disponibilizado.
- O acréscimo de b_i deve ser suficientemente pequeno para que o conjunto atual de variáveis básicas permaneça ótimo já que a taxa (valor marginal) muda caso o conjunto de variáveis básicas varie.

Preços-sombra

- Em muitos casos pode haver alguma flexibilidade nas quantidades b_i que estão disponíveis.
- O **preço sombra** para o recurso i (representado por y^*) mede o valor marginal desse recurso, isto é, a taxa marginal na qual Z poderia ser aumentado, elevando-se (ligeiramente) a quantidade desse recurso (b_i) que está sendo disponibilizado.
- O acréscimo de b_i deve ser suficientemente pequeno para que o conjunto atual de variáveis básicas permaneça ótimo já que a taxa (valor marginal) muda caso o conjunto de variáveis básicas varie.
- O método simplex identifica esse preço-sombra por $y_i^* =$ coeficiente da i-ésima variável de folga na linha 0 da tabela simplex final.

Pelos resultados finais do problema da Wyndor e Class Co:

TABELA 4.8 Conjunto completo de tabelas simplex para o problema da Wyndor Glass Co.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado direito
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

$y_1^* = 0$ preço sombra pra o recurso 1
$y_2^* = \frac{3}{2}$ preço sombra pra o recurso 2
$y_3^* = 1$ preço sombra pra o recurso 3

- O valor ótimo é $Z = 36$
- Se $y_2^* = \frac{3}{2}$, temos que acrescentar uma hora de tempo de produção por semana na Fábrica 2 para os dois produtos elevaria o lucro total para:
  $Z' = 36 + \frac{3}{2} = 37,5$
- ou um incremento de:
  $y_2^* = \Delta Z = 37\frac{1}{2} - 36 = \frac{3}{2} = 1,5$
  ou em milhares, R$1.500,00

Atenção: Elevar as horas disponíveis da Fábrica 1, que está restrita a 4 horas por semana não teria efeito no lucro total, já que o preço sombra é igual a O. Por quê?

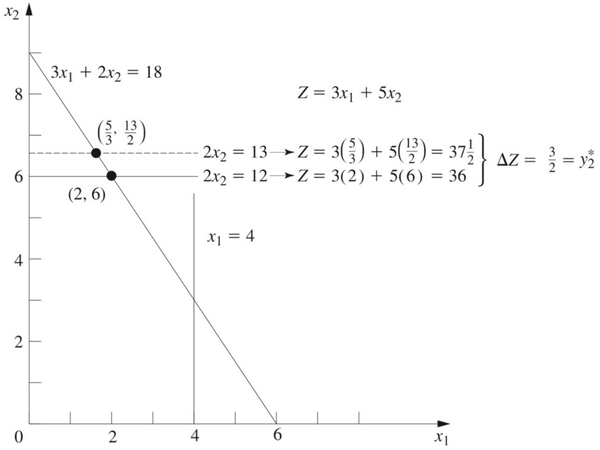


FIGURA 4.8 Este gráfico mostra que o preço-sombra é $y_2^* = \frac{3}{2}$ para o recurso 2 no problema da Wyndor Glass Co. Os dois pontos são as soluções ótimas para $b_2 = 12$ ou $b_2 = 13$, e 2 conectando essas soluções à função objetiva revela que aumentando-se b_2 de 1 aumenta Z de $y_2^* = \frac{3}{2}$.

- Pelo fato de a restrição do recurso 1, $x_1 \leq 4$ não estar atuando na solução ótima $(2, 6)$, há um excedente desse recurso.
- Portanto, aumentar b_1 além de 4 não poderia gerar uma nova solução ótima com um valor Z maior.

- Se um preço extra tem que ser pago pelo recurso no mercado, então y_i^* representa o *encargo máximo*, excesso em relação ao preço normal que valeria a pena pagar.

Células Ajustáveis

Célula	Nome	Valor final	Custo reduzido	Coeficiente objetivo	Acréscimo possível	Decréscimo possível
C12	Lotes Produzidos Portas	2	0	3.000	4.500	3.000
D12	Lotes Produzidos Janelas	6	0	5.000	1E+30	3.000

Restrições

Célula	Nome	Valor final	Preço-sombra	Restrição lado direito	Acréscimo possível	Decréscimo possível
E7	Usada Fábrica 1	2	0	4	1E+30	2
E8	Usada Fábrica 2	12	1.500	12	6	6
E9	Usada Fábrica 3	18	1.000	18	6	6

FIGURA 4.10 O relatório de sensibilidade fornecido pelo Excel Solver para o problema da Wyndor Glass Co.

Paramêtros c_j

Linha superior da Figura 86

- Para qualquer c_j, seu **intervalo possível** é o intervalo de valores para esse coeficiente sobre o qual a solução ótima atual permanece ótima, pressupondo-se que não haja nenhuma alteração nos demais coeficientes:

$$\frac{3.000 - 3.000}{1.000} \leqslant c_1 \leqslant \frac{3.000 + 4.500}{1.000}, \quad \text{portanto} \quad 0 \leqslant c_1 \leqslant 7,5$$

$$\frac{5.000 - 3.000}{1.000} \leqslant c_2 \leqslant \frac{5.000 + \infty}{1.000}, \quad \text{portanto} \quad 2 \leqslant c_1$$

- No Excel 1E+30 (10^{30}) indica infinito.

Paramêtros c_j

- Quando a tabela superior no relatório de sensibilidade indicar que tanto o acréscimo quanto o decréscimo possíveis forem maiores que zero para todos os coeficientes objetivos, isto é uma sinalização de que a solução ótima na coluna "Valor Final" é a única solução ótima.
- Se houver qualquer acréscimo ou decréscimo possíveis iguais a zero é uma indicação de que há soluções ótimas múltiplas.
- Alterando-se um pouco o coeficiente correspondente acima do zero permitido e recalculando-se, obtém-se outra solução PEF ótima para o modelo original.

Paramêtros b_i

- Para qualquer b_i, seu **intervalo possível** é o intervalo de valores do lado direito em relação ao qual a solução BV ótima atual (com os valores ajustados para as variáveis básicas) permanece viável, supondo-se que não ocorra nenhuma alteração nos lados direitos.
- Uma propriedade fundamental desse intervalo de valores é que o *preço sombra* atual para b_i permanece válido para avaliar o efeito sobre Z quando se altera b_i, somente enquanto b_i permanecer nesse intervalo possível

Paramêtros b_i

Usando a parte inferior da Tabela acima, a combinação das duas últimas colunas com os valores atuais dos lados direitos resulta nos seguintes intervalos possíveis:

- $2 \leqslant b_1$
- $6 \leqslant b_2 \leqslant 18$
- $12 \leqslant b_3 \leqslant 24$