CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 5 - Teoria do Método Simplex

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

9 de setembro de 2018

Tópicos

1. Fundamentos do Método Simplex
   - Terminologia
   - Soluções PEF adjacentes
   - Propriedades das soluções PEF
2. Método Simples na Forma Matricial

Section 1

Fundamentos do Método Simplex

Subsection 1

Terminologia

- As soluções ótimas para qualquer problema de programação linear residem nos limites da região de soluções viáveis - esses limites são um conceito geométrico;
- A equação limite de restrição para qualquer restrição é obtida substituindo-se seu sinal $\leq$, $=$ ou $\geq$ por um sinal $=$.

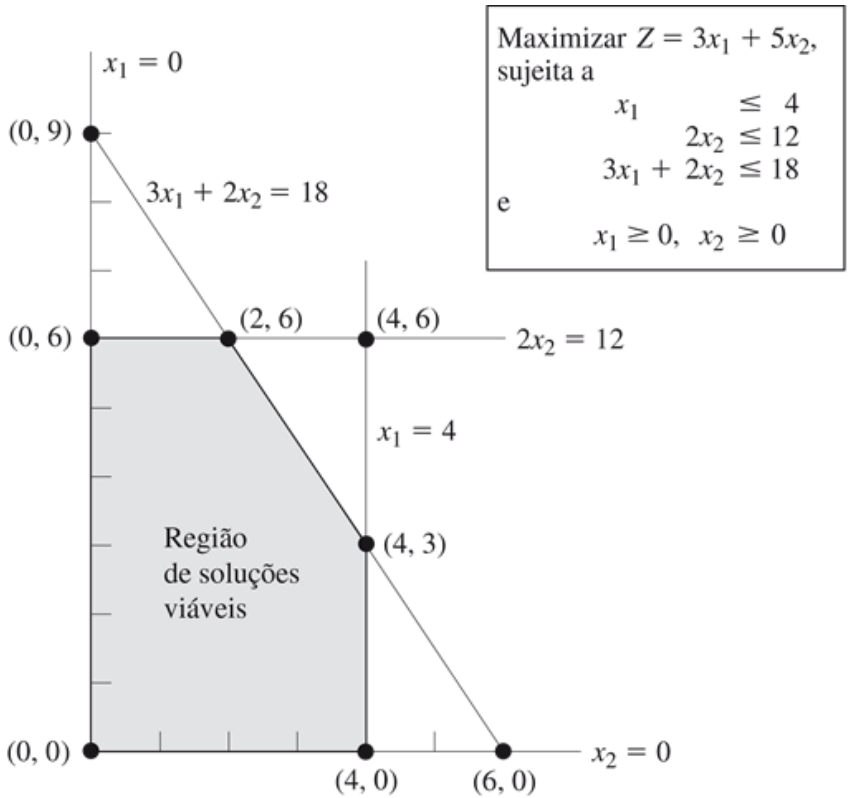

Figura 1: Problema da Wyndor Glass Co.

- O problema da Wyndor Glass Co. tem cinco restrições $\Rightarrow$ cinco restrições de limite;
- Por termos $n = 2$, o hiperplano definido por essas equações limite de restrição são simplesmente retas;
- Os limites de restrição para as cinco restrições são as cinco retas mostradas na Figura 6;

O limite da região de soluções viáveis contém apenas aquelas soluções viáveis que satisfazem uma ou mais equações limite de restrição.

Uma **solução viável em ponto extremo (PEF)** é uma solução viável que não cai sobre nenhum segmento de reta conectando duas outras possíveis soluções viáveis.

- Uma solução viável que cai sobre um segmento de reta conectando duas outras soluções viáveis não é uma solução FPE;
- Na Figura 6 com $n = 2$, temos:
  - O ponto (2, 3) não é uma solução PEF, pois ele cai sobre vários desses segmentos de reta, por exemplo, o segmento de reta conectando (0, 3) e (4, 3).
  - O ponto (0, 3) não é uma solução PEF, porque ela cai sobre o segmento de reta conectando os pontos (0, 0) e (0, 6).
  - O ponto (0, 0) é uma solução PEF, visto que é impossível encontrar duas outras soluções viáveis que caiam em lados completamente opostos de (0, 0).

- Quando o número de variáveis de decisão n for maior que 2 ou 3, a definição acima para solução FPE não é convincente na identificação de tais soluções $\Rightarrow$ mais útil interpretá-las algebricamente.

Exemplo: O caso da Wyndor Glass Co

- Cada solução FPE da Figura 6 cai na interseção de duas ($n = 2$) retas de restrição;
- Ela é a solução simultânea de um sistema de duas equações limite de restrição.

TABELA 5.1 Definição das equações para cada solução PEF para o problema da Wyndor Glass Co.

Solução PEF	Equações delimitadoras
(0, 0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$
(0, 6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$
(2, 6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
(4, 3)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$
(4, 0)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$

As **equações delimitadoras** se referem às equações limite de restrição que conduzem (definem) à solução PEF indicada.

Para qualquer problema de programação linear com n variáveis de decisão, cada solução PEF cai sobre a interseção de n limites de restrição

- Cada solução PEF é a solução simultânea de um sistema de equações limite de restrição.

- Nem todo conjunto de equações limite de restrição escolhidos das $n + m$ restrições (n restrições de não-negatividade em restrições funcionais) levam a uma solução PEF.
- A solução simultânea de um sistema de equações poderia violar uma ou mais das m restrições não escolhidas, em cujo caso ela é uma solução inviável em ponto extremo (Figura 2)
- Pode ser que um sistema de equações com n limites de restrição não tenha nenhuma solução.
- Mais de um sistema com n equações limite da restrição pode conduzir à mesma solução PE.
  - Ex.: Se no lugar de $x_1 \leq 4$ tivéssemos $x_1 \leq 2$, resultaria na mesma solução $(2, 6)$.

TABELA 5.2 Equações delimitadoras para cada solução em ponto extremo infactível para o caso da Wyndor Glass Co.

Solução em ponto extremo infactível	Equações delimitadoras
(0, 9)	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
(4, 6)	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$
(6, 0)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$

Figura 2: Equações delimitadoras para cada solução inviável em ponto extremo para o caso da Wyndor Glass Co

Subsection 2

Soluções PEF adjacentes

Para $n = 2$

- O limite da região de soluções viáveis é constituído por vários segmentos de retas interconectados (Figura 6)
- Esses segmentos de reta são os lados da região de soluções viáveis.
- A primeira iteração (Figura 6) envolve deslocar-se ao longo do lado de (0,0) a (0, 6) e, a seguir, a próxima iteração se desloca ao longo do lado indo de (0, 6) até (2, 6).
- Cada um desses deslocamentos para uma solução FPE adjacente envolve apenas uma mudança no conjunto de equações delimitadoras (restrições de limite sobre as quais a solução recai).

Para $n = 3$

- Os pontos são as soluções PEF.
- A região de soluções viáveis é um poliedro em vez do polígono que tínhamos com n $= 2$
- A restrição de limite agora é um plano em vez de retas (Figura 3).
- As faces do poliedro formam os limites da região de soluções viáveis
- Cada solução PEF cai na interseção de três limites de restrição (algumas vezes incluindo alguns dos limites de restrição para as restrições de não-negatividade como $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$) e a solução também satisfaz as demais restrições.
- Interseções que não satisfazem uma ou mais das demais restrições levam a soluções inviáveis em pontos extremos.

Fundamentos do Método Simplex

Soluções PEF adjacentes

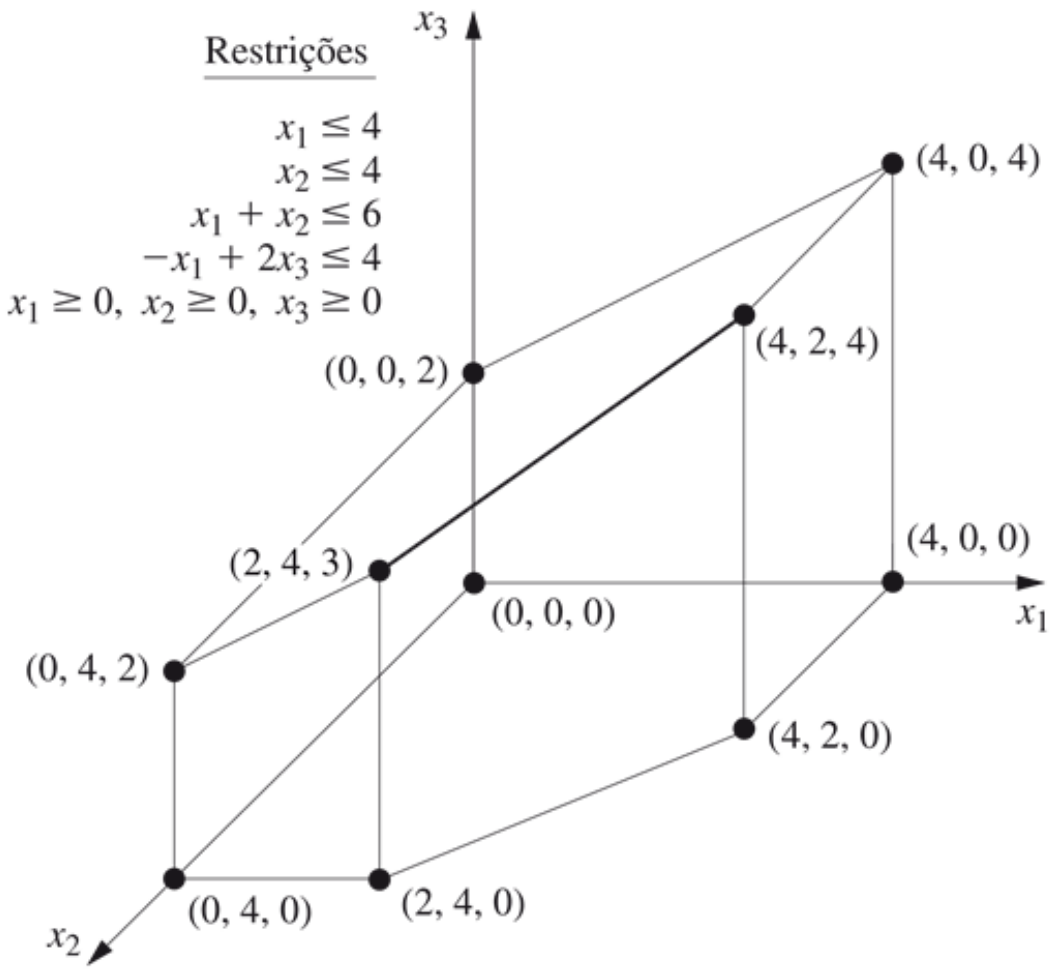

FIGURA 5.2 A região de soluções viáveis e soluções PEF para um problema de programação linear de três variáveis.

Para $n = 3$

- Suponha que o ponto (2, 4, 3) é a solução PEF atual e que o ponto (4, 2, 4) será a nova solução FPE no final da iteração.
- O ponto (2, 4, 3) cai na interseção dos limites de restrição $x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 6$ e $-x_1 + 2x_3 = 4$:
  - Essas três são as *equações delimitadoras* para essa solução PEF.
- Todas as arestas da região de soluções viáveis são formadas como o segmento de reta viável que cai na interseção de dois limites de restrição e as duas extremidades de um lado são as soluções PEF adjacentes.
- Há 15 arestas na região de soluções viáveis $\Rightarrow$ há 15 pares de soluções PEF adjacentes.

Para $n = 3$

- Para a solução PEF atual (2, 4, 3) temos (4,2,4), (0,4,2) e (2, 4, 0) como soluções PEF adjacentes.
- Se na próxima iteração, o método simplex escolher osegmento de reta mais escuro na Figura 3
- O ponto descoloca ao longo desse lado de (2,4,3) até atingir o novo limite de restrição, $x_1 = 4$;
- Não podemos prosseguir mais sobre essa reta para o limite de restrição seguinte, $x_2 = 0$,
  - Nos levaria a uma solução inviável (6,0,5).
  - A interseção desse novo limite de restrição com os dois limites de restrição forma a aresta e conduz à nova solução FPE (4, 2, 4).

Para $n > 3$

- Uma solução PEF cai na interseção de n limites de restrição (e satisfaz as demais restrições também).
- Uma aresta da região permissível é um segmento de reta que cai na interseção de $n - 1$ limites de restrição, em que cada extremidade cai sobre um limite de restrição adicional (de modo que essas extremidades sejam soluções FPE).
- Duas soluções PEF são adjacentes se o segmento de reta que as une for um lado da região de soluções viáveis.

Mudando do ponto de vista geométrico para o algébrico

- A interseção de limites de restrição $\Rightarrow$ solução simultânea de *equações limite de restrição*.
- As n equações limite de restrição que levam (delimitam) a uma solução FPE $\Rightarrow$ equações delimitadoras.
- Eliminar uma dessas equações leva a uma reta cujo segmento de soluções viáveis é um lado dessa região viável.

O método simplex opta por uma variável básica que entra

- Interpretação geométrica: ele está escolhendo um dos lados provenientes da solução PEF atual sobre o qual ele se deslocará.
- Aumenta essa variável a partir de zero
- Simultaneamente muda os valores das demais variáveis básicas ao deslocar-se sobre esse lado.
- Permite que uma dessas variáveis básicas (a variável básica que sai) diminua a ponto de chegar a zero $\Rightarrow$ atingir-se o primeiro novo limite de restrição na outra extremidade desse lado da região de soluções viáveis.

Subsection 3

Propriedades das soluções PEF

Suponha um problema de programação linear que tenha soluções viáveis e uma região de soluções viáveis limitada

Propriedade 1

(a) Se houver exatamente uma solução ótima, então ela obrigatoriamente é uma solução PEF. (b) Se houver duas soluções ótimas múltiplas (e uma região de soluções viáveis limitada), então pelo menos duas delas têm de ser soluções PEF adjacentes.

Propriedade 2

Existe apenas um número finito de soluções FPE.

Propriedade 3

Se uma solução PEF não tiver nenhuma solução PEF adjacente que seja melhor (segundo a medida de Z), então não há nenhuma solução PEF melhor em nenhum outro lugar. Portanto, uma solução PEF dessas é certamente uma solução ótima (pela Propriedade 1), supondo-se apenas que o problema possui pelo menos uma solução ótima (garantido, caso o problema tenha soluções viáveis e uma região de soluções viáveis limitada).

Section 2

Método Simples na Forma Matricial

Método Simples na Forma Matricial

Notação

- Matrizes: letras **MAIÚSCULAS EM NEGRITO**;
- Vetores: letras **minúsculas em negrito**;
- Escalares: letras minúsculas;
- Vetor nulo: zero em negrito $\mathbf{0}$;

Método Simples na Forma Matricial

Forma Padrão

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\
\text{e} & \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Método Simples na Forma Matricial

Forma Padrão

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m,
\end{aligned}$$

e

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Forma matricial

$$\text{Max } Z = \mathbf{cx},$$

s.a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

e

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Método Simples na Forma Matricial

Forma matricial

em que $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots c_n]$,
$\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{0}$ são os vetores coluna, tais que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

, e $\mathbf{A}$ é a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Método Simples na Forma Matricial

Forma matricial

Para obter a forma aumentada do problema, introduza o vetor-coluna de variáveis de folga

$$\mathbf{x_s} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

de modo que as restrições fiquem :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{I}, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad e \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade m x m e o vetor nulo $\mathbf{0}$ agora tem $n + m$ elementos.

Método Simples na Forma Matricial

Forma matricial

O **vetor de variáveis básicas**

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

é obtido eliminando-se as variáveis não básicas de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x_s} \end{bmatrix}$$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

$$\mathbf{c} =$$

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad x_3 \qquad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 \qquad x_4 \qquad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad x_5 &\leq 18 \end{aligned}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix},$$

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad x_3 \qquad\qquad &\leq 4 \\ 2x_2 \qquad x_4 \qquad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad x_5 &\leq 18 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_5 &\leq 18 \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} =$$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad x_3 \qquad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 \qquad x_4 \qquad\quad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad x_5 &\leq 18 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 & \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} =$$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad x_3 \qquad\qquad &\leq 4 \\ 2x_2 \qquad x_4 \qquad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad x_5 &\leq 18 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_s} =$$

Método Simples na Forma Matricial

Exemplo

Considere novamente o problema da Wyndor Glass Co

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,

sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 \qquad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 \quad + x_4 \quad &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 &\leq 18 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 & \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_s} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$