

CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 6 - Teoria da Dualidade e Análise de Sensibilidade

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal
Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

9 de outubro de 2018

Tópicos: Dualidade

1 A Essência da Teoria da Dualidade

- Origem do Problema Dual
- Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual
- Aplicações

2 Interpretação Econômica da Dualidade

- Interpretação Econômica do problema primal
- Interpretação do problema dual
- Interpretação do Método Simplex

3 Adaptações para Outras Formas Primais

- Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

4 Relações Primal-Dual

- Soluções Básicas Complementares
- Relações entre as Soluções Básicas Complementares

5 O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

- Mudanças nos Coeficientes de uma Variável Não-básica
- Introdução de uma Nova Variável

6 A Essência da Análise de Sensibilidade

- Alteração em Coeficientes da Função Objetivo
- Alteração em Constantes do Lado Direito
- Custo Reduzido

Seção 1

A Essência da Teoria da Dualidade

Relação Primal x Dual

- O problema de programação linear (primal) tem associado a ele outro problema de programação linear: dual;
- Os preços-sombra são fornecidos pela solução ótima para o problema dual;
- O valor ótimo do problema dual também é o valor ótimo para o problema primal;
- É possível encontrar os valores ótimos das variáveis no problema primal por meio do problema dual.

A Essência da Teoria da Dualidade

■ TABELA 6.3 Correspondência entre entidades nos problemas primal e dual

Um problema		Outro problema
Restrição i	←→	Variável i
Função objetivo	←→	Lados direitos

Figura 1: Correspondência entre entidades nos problemas primal e dual

A Essência da Teoria da Dualidade

Problema primal

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Problema dual

$$\text{Minimizar} \quad W = \sum_{i=1}^m b_i y_i,$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Figura 2: Formas padrão: problema primal x dual.

A Essência da Teoria da Dualidade

- O problema primal é uma maximização $\Rightarrow$, o problema dual é uma minimização.
- O problema dual usa exatamente os mesmos parâmetros do problema primal, mas, em posições diferentes:
 - 1 Os coeficientes na função objetivo do problema primal são os lados direitos das restrições funcionais no problema dual.
 - 2 Os lados direitos das restrições funcionais no problema primal são os coeficientes na função objetivo do problema dual.
 - 3 Os coeficientes de uma variável nas restrições funcionais do problema primal são os coeficientes em uma restrição funcional do problema dual.

A Essência da Teoria da Dualidade

■ TABELA 6.1 Os problemas primal e dual para o exemplo da Wyndor Glass Co.

*Problema Primal
na Forma Algébrica*

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & Z = 3x_1 + 5x_2, \\ \text{sujeito a} & \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ \text{e} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.\end{array}$$

*Problema Primal
na Forma Matricial*

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ \text{sujeito a} & \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \\ \text{e} & \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{array}$$

*Problema Dual
na Forma Algébrica*

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3, \\ \text{sujeito a} & \\ & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ \text{e} & \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.\end{array}$$

*Problema Dual
na Forma Matricial*

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \\ \text{sujeito a} & \\ & [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5] \\ \text{e} & \\ & [y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0].\end{array}$$

Exemplo

Escreva a forma dual do modelo de programação linear abaixo

Maximizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4,$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Exemplo

Escreva a forma dual do modelo de programação linear abaixo

Maximizar

$$Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4,$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Minimizar $W = 24y_1 + 36y_2,$

sujeito a:

$$3y_1 + 3y_2 \geq 5$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$-3y_1 + y_2 \geq -1$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2$$

A forma matricial

Minimizar $W = 24y_1 + 36y_2$,
sujeito a:

$$3y_1 + 3y_2 \geq 5$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$-3y_1 + y_2 \geq -1$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2$$

Minimizar $W = \mathbf{y}\mathbf{b}$

sujeito a:

$$\mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

em que:

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2],$$

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2] = [24 \quad 36]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Subseção 1

Origem do Problema Dual

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

■ TABELA 5.9 Notação genérica para as tabelas simplex inicial e final na forma matricial, ilustrado pelo problema da Wyndor Glass Co.

Tabela inicial

Linha 0: $\mathbf{t} = [-3, -5 \mid 0, 0, 0 \mid 0] = [-\mathbf{c} \mid \mathbf{0} \mid 0].$

Demais linhas:
$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right] = [\mathbf{A} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{b}].$$

Combinadas:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Tabela final

Linha 0: $\mathbf{t}^* = [0, 0 \mid 0, \frac{3}{2}, 1 \mid 36] = [\mathbf{z}^* - \mathbf{c} \mid \mathbf{y}^* \mid Z^*].$

Demais linhas:
$$\mathbf{T}^* = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array} \right] = [\mathbf{A}^* \mid \mathbf{S}^* \mid \mathbf{b}^*].$$

Combinadas:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^* \\ \mathbf{T}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* - \mathbf{c} & \mathbf{y}^* & Z^* \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{S}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix}.$$

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

- “Elimine ”os asteriscos de z^* e y^* (Figura 4): referindo a qualquer tabela.
- Em qualquer iteração do método simplex para o problema primal, os números atuais na linha 0 serão representados:

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de:									Lado direito
			Z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	
Qualquer	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	W

Figura 5: Notação para as entradas na linha 0 de uma tabela simplex.

- $z = [z_1, z_2, \dots, z_n] \Rightarrow$ vetor que o método simplex adicionou ao vetor dos coeficientes iniciais $-c_i$;
- $y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \Rightarrow$ vetor que o método simplex adicionou aos coeficientes iniciais de $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

Inter-relacionamentos entre quantidades e os parâmetros

$$W = \mathbf{y}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}\mathbf{A}, \text{ portanto } z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i, \text{ para } j=1,2,\dots,n$$

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

No exemplo da Wyndor Glass Co.:

- A equação é $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ é a função objetivo para o problema dual (Figura 3)
- As equações $z_1 = y_1 + 3y_3$ e $z_2 = 2y_2 + 2y_3$ são os lados esquerdos das restrições funcionais para esse problema dual.
 - Subtraindo-se os lados direitos dessas restrições ($\geq$) $\Rightarrow (z_1 - c_1)$ e $(z_2 - c_2)$ podem ser interpretados como as variáveis excedentes para essas restrições funcionais.

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

Condição de Otimalidade

- O método simplex busca um conjunto de variáveis básicas e a solução BV de modo que todos os coeficientes na linha 0 sejam não-negativos.
- Em termos da Figura (5):

$$z_j - c_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

- Após substituirmos a expressão anterior por z_1
 - Pela condição para otimalidade, o método simplex pode ser interpretado como procurando valores para $y_1, y_2, \dots, y_m$ tais que:

$$W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

sujeta a

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

y

$$y_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Figura 6:

- Exceto pela falta de um objetivo para W , esse problema é precisamente o problema dual.

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

- As **únicas soluções viáveis** para esse novo problema são aquelas que **satisfazem a condição para otimalidade** para o problema primal;
 - Ela é a única solução viável para esse novo problema.
- O **valor ótimo de Z no problema primal é o valor viável mínimo de W** no novo problema, de modo que W deva ser minimizado.
- Acrescentar esse objetivo de minimizar W fornece o problema dual completo.

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

- O problema dual pode ser visto como uma reafirmação do objetivo do método simplex:
 - Uma solução para o problema dual que satisfaça o teste de otimalidade.
 - O y correspondente na linha 0 (coeficientes de variáveis de folga) da tabela atual deve ser inviável para o problema dual.
 - O y^* deve ser uma solução ótima para problema dual, pois ela é uma solução viável que atende à condição de valor viável mínimo de W .
- A solução ótima $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ fornece ao problema primal os preços-sombra;
- O valor ótimo $W = Z \Rightarrow$ Os valores ótimos da função objetivo são iguais para ambos os problemas.
 - **$cx \leq yb$**

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

Exemplo

- O problema dual completo (acrescido das variáveis de excesso):

Minimizar $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$,

sujeito a:

- $y_1 + 3y_2 - (z_1 + c_1) = 3$
- $2y_2 + 2y_3 - (z_2 - c_2) = 5$
- $y_i \geq 0, i = 1, 2$

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

Exemplo

- O lado esquerdo da Figura (7) mostra a linha 0 para as iterações quando o método simplex é aplicado ao exemplo da Wyndor Glass Co.
- A linha 0 é dividida em três partes:
 - 1 Os coeficientes das variáveis de decisão (x_1, x_2);
 - 2 Os coeficientes das variáveis de folga (x_3, x_4, x_5)
 - 3 O lado direito da equação (valor de Z).
- Os coeficientes das variáveis de folga fornecem os valores correspondentes das variáveis duais (y_1, y_2, y_3);
- Cada linha 0 identifica uma solução correspondente para o problema dual (veja as colunas para y_1, y_2 e y_3 na Figura (7))

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

■ TABELA 6.5 Linha 0 e solução dual correspondente para cada iteração no caso da Wyndor Glass Co.

Iteração	Problema primal	Problema dual					W
	Linha 0	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	
0	$[-3, \quad -5 \quad \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad \quad 0]$	0	0	0	-3	-5	0
1	$[-3, \quad 0 \quad \quad 0, \quad \frac{5}{2}, \quad 0 \quad \quad 30]$	0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
2	$[\quad 0, \quad 0 \quad \quad 0, \quad \frac{3}{2}, \quad 1 \quad \quad 36]$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

Figura 7:

A Essência da Teoria da Dualidade

Origem do Problema Dual

Exemplo

- Usando os números das colunas y_1, y_2 e y_3 , o valor das variáveis excedentes será:
 - $z_1 - c_1 = y_1 + 3y_3 - 3$
 - $z_2 - c_2 = 2y_2 + 2y_3 - 5$
- O valor negativo para cada uma das variáveis excedentes indica que a restrição correspondente é violada.
- Na linha 0 inicial:
 - A solução dual correspondente $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$ é **inviável** $\Rightarrow$ As variáveis de excesso são **negativas**.
- Após duas iterações, o teste de otimalidade é satisfeito para o problema primal:
 - Todas as **variáveis duais e excedentes são não-negativas**;
 - A solução dual $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0, \frac{3}{2}, 1)$ é ótima;
 - O valor ótimo $Z^* = 36 = W^*$.

Subseção 2

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Versão fraca da teoria da dualidade

Se $\mathbf{x}$ for uma solução viável para o problema primal e $\mathbf{y}$ uma solução viável para o problema dual, então

$$\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$$

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Versão fraca da teoria da dualidade

Se $\mathbf{x}$ for uma solução viável para o problema primal e $\mathbf{y}$ uma solução viável para o problema dual, então

$$\mathbf{cx} \leq \mathbf{yb}$$

Exemplo: o caso da Wyndor Glass Co.

- Uma solução viável (problema primal) é $x_1 = 3, x_2 = 3 \Rightarrow Z = \mathbf{cx} = 24$ ($Z = 3x_1 + 5x_2$);
- Uma solução viável para o problema dual é $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 2 \Rightarrow W = \mathbf{yb} = 52$ ($W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$).
 - Se tomarmos $y_1 = 0, y_2 = \frac{5}{2}$ e $y_3 = 0$ (2ª interação - Figura 6), a restrição $y_1 + 3y_3 \geq 3$ será violada.
- Para qualquer par de soluções viáveis essa desigualdade tem de ser satisfeita, pois o valor viável máximo de $Z = \mathbf{cx}$ é igual ao valor viável mínimo da função objetivo dual $W = \mathbf{yb}$.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Versão forte da teoria da dualidade

Se $\mathbf{x}^*$ for uma solução ótima para o problema primal e $\mathbf{y}^*$ uma solução ótima para o problema dual, então:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$$

- **A versão fraca** da teoria da dualidade descreve os inter-relacionamentos entre qualquer par de soluções para os problemas primal e dual nos quais **ambas as soluções são viáveis** para seus respectivos problemas.
- A cada iteração, o método simplex encontra um par de **soluções específico para os dois problemas em que a solução primal é viável, porém, a solução dual não é viável** (exceto na última iteração).

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade das soluções complementares

A **cada iteração**, o método simplex identifica **simultaneamente** uma **solução** FPE **x** para o **problema primal** e uma solução complementar **y** para o problema **dual** (encontrado na linha 0, os coeficientes das variáveis de folga), em que

$$cx = yb$$

Se **x** não for ótima para o problema primal, então **y** não é viável para o problema dual.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade das soluções complementares

A **cada iteração**, o método simplex identifica **simultaneamente** uma **solução** FPE $\mathbf{x}$ para o **problema primal** e uma solução complementar $\mathbf{y}$ para o problema **dual** (encontrado na linha 0, os coeficientes das variáveis de folga), em que

$$\mathbf{cx} = \mathbf{yb}$$

Se $\mathbf{x}$ não for ótima para o problema primal, então $\mathbf{y}$ não é viável para o problema dual.

Exemplo: caso da Wyndor Glass Co

- Após uma iteração: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ e $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{2}$, $y_3 = 0$, com $\mathbf{cx} = 30 = \mathbf{yb}$. Esse $\mathbf{x}$ é viável para o problema primal, mas esse $\mathbf{y}$ não é viável para o problema dual (viola a restrição $y_1 + 3y_3 \geq 3$).

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade das soluções ótimas complementares

Na iteração **final**, o método simplex identifica simultaneamente uma **solução ótima x^*** para o problema **primal** e uma solução ótima complementar **y^*** para o problema **dual** (encontrada na linha 0, os coeficientes das variáveis de folga), em que

$$cx^* = y^*b$$

em que os y_i^* são os preços-sombra para o problema primal.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade das soluções ótimas complementares

Na iteração **final**, o método simplex identifica simultaneamente uma **solução ótima $\mathbf{x}^*$** para o problema **primal** e uma solução ótima complementar **$\mathbf{y}^*$** para o problema **dual** (encontrada na linha 0, os coeficientes das variáveis de folga), em que

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$$

em que os y_i^* são os preços-sombra para o problema primal.

Exemplo

Por exemplo, a iteração final leva a $x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$, $y_1^* = 0$, $y_2^* = \frac{3}{2}$ e $y_3^* = 1$, com $\mathbf{cx}^* = 36 = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade da simetria

Para qualquer problema primal e seu problema dual, todas as relações entre eles devem ser simétricas, pois o dual desse problema dual é esse problema primal.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Propriedade da simetria

Para qualquer problema primal e seu problema dual, todas as relações entre eles devem ser simétricas, pois o dual desse problema dual é esse problema primal.

Implicações

- Todas as propriedades anteriores são satisfeitas **independentemente** de qual dos dois problemas for **classificado como problema primal**.
- A **direção** da desigualdade para a versão fraca da teoria da dualidade **não requer** que o problema **primal** seja expresso ou reexpresso na forma de **maximização** e o problema **dual** na forma de **minimização**.
- **O método simplex pode ser aplicado a qualquer problema** e ele vai identificar simultaneamente as soluções complementares (em última instância uma solução ótima complementar) para o outro problema.

A Essência da Teoria da Dualidade

Resumo dos inter-relacionamentos primal-dual

Teorema (da dualidade)

Inter-relacionamentos possíveis (únicos) entre problemas primais e duais.

- ① *Se um problema tiver soluções **viáveis** e uma função **objetivo limitada** (e, portanto, tiver uma solução ótima), então o mesmo acontece para o outro problema e, assim, tanto a versão fraca quanto a forte da teoria da dualidade são aplicáveis.*
- ② *Se um problema tiver **soluções viáveis** e uma função **objetivo ilimitada** (e, portanto, nenhuma solução ótima), então o outro não terá soluções viáveis .*
- ③ *Se um problema **não tiver nenhuma solução viável**, então o outro também não terá nenhuma solução viável ou então uma função objetivo ilimitada.*

Subseção 3

Aplicações

A Essência da Teoria da Dualidade

Aplicações

Aplicações

- O problema dual pode ser resolvido diretamente pelo método simplex de modo a identificar uma solução ótima para o problema primal
 - O **número de restrições** funcionais afeta o processamento computacional do método simplex muito mais que o número de variáveis.
 - Se $m > n$, então o problema dual tem menos restrições funcionais (n) que o problema primal (m) $\Rightarrow$ aplicando o método simplex ao problema dual (em vez do primal) provavelmente irá reduzir o processamento necessário.
- A teoria da dualidade desempenha papel fundamental na análise de sensibilidade.

Seção 2

Interpretação Econômica da Dualidade

Subseção 1

Interpretação Econômica do problema primal

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

■ TABELA 6.6 Interpretação econômica do problema primal

Quantidade	Interpretação
x_j	Nível de atividade j ($j = 1, 2, \dots, n$)
c_j	Lucro unitário proveniente da atividade j
Z	Lucro total de todas as atividades
b_i	Quantidade do recurso i disponível ($i = 1, 2, \dots, m$)
a_{ij}	Quantidade do recurso i consumida para cada unidade de atividade j

Figura 8:

Pretende-se alocar os m recursos disponíveis às n atividades econômicas, de forma a maximizar o lucro total de todas as atividades, respeitando a quantidade disponível de cada recurso.

Subseção 2

Interpretação do problema dual

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- A empresa está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos.
- O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R\$12,00 e R\$60,00, respectivamente.
- As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem.
- O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo.
- O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo.
- O processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e triciclo produzido, respectivamente.

Interpretação Econômica da Dualidade

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente.
- A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal.

Recurso	Recurso para produzir 1 unidade		Disponibilidade
	Carrinho	Triciclo	
Usinagem (h)	0,25	0,5	36
Pintura (h)	0,1	0,75	22
Montagem (h)	0,1	0,4	15
Lucro unitário	12	60	

Figura 9: Principais informações do problema da empresa Venix Brinquedos

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- A formulação matemática do problema original da empresa Venix Brinquedos:

Maximizar $Z = 12x_1 + 60x_2$ (maximizar o lucro total)

Sujeito a:

$$0,25x_1 + 0,50x_2 \leq 36 \quad (\text{disponibilidade de usinagem})$$

$$0,10x_1 + 0,75x_2 \leq 22 \quad (\text{disponibilidade de pintura})$$

$$0,10x_1 + 0,40x_2 \leq 15 \quad (\text{disponibilidade de montagem})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Por exemplo, no processo de usinagem, para produzir uma unidade de carrinho e triciclo necessita-se de 15 minutos (0,25 hora) e 30 minutos (0,5 hora) de mão de obra especializada, respectivamente.
- Os recursos da empresa Venix Brinquedos são utilizados para a fabricação de dois tipos de produtos: carrinho e triciclo.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- O dual será:

Minimizar $W =$

$36y_1 + 22y_2 + 15y_3$ (minimizar o uso de recursos disponíveis)

Sujeito a:

$0,25y_1 + 0,10y_2 + 0,10y_3 \geq 12$ (restrição de carrinho)

$0,50y_1 + 0,75y_2 + 0,40y_3 \geq 60$ (restrição de triciclo)

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

- Para o problema dual, Imagine que os recursos da empresa, em vez de serem utilizados para produção interna, **serão vendidos para uma empresa compradora.**
- Para que **compense** para a empresa Venix Brinquedos **vender os seus recursos**, o preço **pago** pela empresa compradora deve ser, **no mínimo, igual ao lucro total gerado pelos seus produtos.**

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

Definindo as variáveis de decisão do problema dual:

- y_1 = **preço pago** pela empresa compradora pela utilização (ou **custo de oportunidade** de recursos pela perda, por parte da empresa vendedora) de uma hora de mão de obra especializada no processo de usinagem;
- y_2 = **preço pago** pela empresa compradora pela utilização (ou **custo de oportunidade** de recursos da empresa vendedora pela perda) de uma hora de mão de obra especializada no processo de pintura;
- y_3 = **preço pago** pela empresa compradora pela utilização (ou **custo de oportunidade** de recursos da empresa vendedora pela perda) de uma hora de mão de obra especializada no processo de montagem.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- A **função objetivo** do problema **dual** busca **minimizar a soma dos custos pagos** pela empresa compradora pela utilização (ou a soma dos custos de oportunidade da empresa vendedora pela perda) de todos os recursos:

$$\text{Minimizar } W = 36y_1 + 22y_2 + 15y_3$$

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- A **primeira restrição** garante que os custos pagos pela utilização dos recursos de usinagem, pintura e montagem necessários para a produção de uma unidade de **carrinho** não devem ser menores do que seu lucro unitário:

$$0,25y_1 + 0,10y_2 + 0,10y_3 \geq 12$$

- Em outras palavras, a empresa compradora deve oferecer, no mínimo, R\$12,00 para que compense para a empresa Venix Brinquedos vender os recursos necessários para produzir uma unidade de carrinho.
- Os custos de oportunidade da empresa vendedora pela perda de parte dos recursos de usinagem, pintura e montagem necessários para produzir uma unidade de carrinho é, no mínimo, igual ao seu lucro unitário.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- A **segunda** restrição garante que os custos pagos pela utilização dos recursos de usinagem, pintura e montagem necessários para a produção de uma unidade de **triciclo** não devem ser menores do que seu lucro unitário:

$$0,50y_1 + 0,75y_2 + 0,40y_3 \geq 60$$

- A empresa compradora deve oferecer, no mínimo, R\$60,00 para que compense para a empresa Venix Brinquedos vender os recursos necessários para produzir uma unidade de triciclo.
- Os custos de oportunidade da empresa vendedora pela perda de parte dos recursos de usinagem, pintura e montagem necessários para produzir uma unidade de triciclo é, no mínimo, o seu lucro unitário.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação Econômica do problema primal

Exemplo: Empresa Venix de brinquedos

- As variáveis de decisão do problema dual (preços sombra) devem ser não negativas, isto é, os preços pagos pela utilização dos recursos não podem ser negativos.

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

De forma geral

- W é o valor total de Z (lucro total) em uma dada iteração
- Se $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$,
 - Cada b_iy_i pode ser interpretado como a **contribuição atual ao lucro por ter b unidades do recurso i disponível para o problema primal**

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

De forma geral

- W é o valor total de Z (lucro total) em uma dada iteração
- Se $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$,
 - Cada b_iy_i pode ser interpretado como a **contribuição atual ao lucro por ter b unidades do recurso i disponível para o problema primal**

A **variável dual** y_i é interpretada como a **contribuição ao lucro por unidade de recurso i** ($i = 1, 2, \dots, m$), em que o conjunto atual de variáveis básicas é usado para obter a solução primal.

- Os valores y_i (ou y_i^* para a solução ótima) são simplesmente os preços sombra.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

Exemplo: Problema da Wyndor Glass Co

- Na iteração 2 do método simplex temos a solução ótima e os valores ótimos das variáveis duais (Figura 10) $y_1^* = 0$, $y_2^* = \frac{3}{2}$ e $y_3^* = 1 \Rightarrow$ são precisamente os preços-sombra
- Relembrando: os recursos para o problema da Wyndor são as capacidades de produção das três fábricas que estão sendo disponibilizados para dois produtos novos em consideração, de modo que b_i é o número de horas de tempo de produção por semana que estão sendo disponibilizado na Fábrica i para esses novos produtos, onde $i = 1, 2, 3$.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

- Os **preços-sombra** indicam que aumentar individualmente qualquer b_i em uma unidade aumentaria o valor ótimo da função objetivo (lucro semanal total em unidades de milhares de dólares) de y_i^*
 - y_i^* pode ser interpretado como a contribuição para o lucro por unidade de recurso i ao usar a solução ótima.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

- Os **preços-sombra** indicam que aumentar individualmente qualquer b_i em uma unidade aumentaria o valor ótimo da função objetivo (lucro semanal total em unidades de milhares de dólares) de y_i^*
 - y_i^* pode ser interpretado como a contribuição para o lucro por unidade de recurso i ao usar a solução ótima.

Interpretação do problema dual

Se cada unidade de atividade j no problema primal consumir a_{ij} unidades do recurso i :

- $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$: interpretado como a contribuição (atual) ao lucro do mix de recursos que seriam consumidos caso uma unidade de atividade j fosse usada ($j = 1, 2, \dots, n$).

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

Exemplo: o caso da Wyndor

- Uma unidade de atividade j corresponde a produzir um lote do produto j por semana, onde $j = 1, 2$.
- O mix de recursos consumidos para produzir um lote do produto 1 é de uma hora de tempo de produção na Fábrica 1 e de três horas na Fábrica 3.
- O mix correspondente por lote do produto 2 é de duas horas em cada uma das Fábricas 2 e 3.
 - $y_1 + 3y_3$ e $2y_2 + 2y_3$ são interpretados como as contribuições atuais para o lucro (em milhares de dólares por semana) dos respectivos mixes de recursos por lote produzidos por semana dos respectivos produtos.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

- c_j é interpretado como o lucro unitário da atividade j
- Cada restrição funcional no problema dual é interpretada como se segue:
 - $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j \Rightarrow$ a contribuição para o lucro do mix de recursos tem que ser pelo menos o quanto se eles fossem usados por uma unidade de atividade j ; caso contrário, não estaríamos fazendo o melhor uso desses recursos.

No caso da Wyndor

- Os lucros unitários são $c_1 = 3$ e $c_2 = 5$, de modo que as restrições funcionais duais com essa interpretação são $y_1 + 3y_3 \geq 3$ e $2y_2 + 2y_3 \geq 5$.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

Interpretação das restrições de não-negatividade

- $y_i \geq 0$ a contribuição para o lucro do recurso i ($i = 1, 2, \dots, m$) deve ser não-negativa, caso contrário, seria melhor não usar esse recurso.

Interpretação da função objetivo

- O objetivo Minimizar $W = \sum_{i=1}^m b_i y_i \Rightarrow$ minimiza o valor implícito total dos recursos consumidos (os recursos alocados podem ser maiores que os efetivamente consumidos) pelas atividades.
- Para o problema da Wyndor, o valor implícito total (em milhares de dólares por semana) dos recursos consumidos pelos dois produtos é $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

Interpretação da função objetivo

Relembrando: As variáveis básicas (as únicas variáveis cujos valores podem ser não-zero) sempre possuem um coeficiente zero na linha 0.

- Referindo-se à Figura (5):

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \text{se } x_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

$$y_i = 0 \quad \text{se } x_{n+1} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

Interpretação: Equação (3)

- Toda vez que uma atividade j operar em um nível estritamente positivo ($x_j > 0$), o valor marginal dos recursos que ela consome tem de ser igual (e não exceder) ao lucro unitário proveniente dessa atividade.

Interpretação: Equação (4)

- Se o valor marginal do recurso i é zero ($y_i = 0$): ele não é exaurido pelas atividades ($x_{n+i} > 0$).
- Tal recurso é um “recurso livre”
- O preço de recursos que são fornecidos em excesso devem ir a zero pela lei da oferta e da demanda.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do problema dual

■ TABELA 6.5 Linha 0 e solução dual correspondente para cada iteração no caso da Wyndor Glass Co.

Iteração	Problema primal	Problema dual					W
	Linha 0	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	
0	$[-3, \quad -5 \quad \quad 0, \quad 0, \quad 0 \quad \quad 0]$	0	0	0	-3	-5	0
1	$[-3, \quad 0 \quad \quad 0, \quad \frac{5}{2}, \quad 0 \quad \quad 30]$	0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
2	$[\quad 0, \quad 0 \quad \quad 0, \quad \frac{3}{2}, \quad 1 \quad \quad 36]$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

- Tomando a linha 2, a solução dual: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{2}$ e $y_3 = 1$;
- Variáveis excedentes: $(z_1 - c_1) = 0$ e $(z_2 - c_2) = 0$.
- Então: $y_1^* + 3y_3^* = c_1 = 3$ e $2y_2^* + 2y_3^* = c_2 = 5$.
- Valor dos recursos consumidos por lote produtos fabricados = lucros unitários.

Subseção 3

Interpretação do Método Simplex

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

- A interpretação do problema dual fornece uma interpretação econômica do que o método simplex faz no problema primal.
- O objetivo do método simplex é descobrir como usar os recursos disponíveis da forma viável mais rentável.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

Interpretação do Método Simplex

- Se uma variável original x_j for não-básica de maneira, a atividade j não será usada.
- A contribuição atual dos recursos que seriam necessários para empreender cada atividade j :

$$\sum_{i=1}^m a_{aij} y_i \quad (5)$$

pode ser **menor** ou **maior** que ou então **igual** ao lucro unitário c_j obtido da atividade

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

Interpretação do Método Simplex

Considerando a linha 0:

- $\sum_{i=1}^m a_{aij} y_i < 0 \Rightarrow z_i - c_j < 0 \Rightarrow$ esses recursos podem ser usados de modo mais lucrativo iniciando-se essa atividade
- $\sum_{i=1}^m a_{aij} y_i > 0 \Rightarrow z_i - c_j > 0 \Rightarrow$ esses recursos já estão sendo alocados em algum outro lugar de modo mais lucrativo, de maneira que eles não devam ser redirecionados para a atividade j
- $\sum_{i=1}^m a_{aij} y_i = 0 \Rightarrow z_i - c_j = 0 \Rightarrow$ não haveria nenhuma mudança em termos de lucratividade iniciando-se a atividade j .

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

Interpretação do Método Simplex

Se uma variável de folga x_{n+i} for não-básica de modo que a alocação total b_i de recursos i esteja sendo usada:

- y_i é a contribuição atual para o lucro gerado por esse recurso em uma base marginal.
- Se $y_i < 0 \Rightarrow$ o lucro pode ser aumentado cortando-se o uso desse recurso (isto é, aumentando-se x_{n+i});
- Se $y_i > 0$ esse recurso deve continuar sendo usado plenamente.
- Se $y_i = 0$ decisões sobre esse recurso não afetarão a lucratividade.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

- O que o método simplex examina todas as variáveis não-básicas na solução BV atual
- Determina quais delas podem fornecer um **emprego mais rentável dos recursos** pelo aumento delas.
- Se nenhuma puder fazer isso;
- Nenhuma transferência ou redução viável no uso atual dos recursos pode aumentar o lucro
- A solução atual é ótima.

Interpretação Econômica da Dualidade

Interpretação do Método Simplex

Interpretação do Método Simplex

Se uma ou mais variáveis não básicas podem aumentar o lucro:

- O método simplex seleciona a variável;
- Aumenta efetivamente essa variável (a variável básica que entra) o máximo que puder até que os valores marginais dos recursos mudem.
- Repete o procedimento até que nenhuma realocação dos recursos possam aumentar o lucro.

Seção 3

Adaptações para Outras Formas Primais

Adaptações para Outras Formas Primais

- Para que o problema primal possa ser facilmente transformado em outro dual, o mesmo deve estar na forma canônica.

Forma canônica do problema de maximização

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Forma canônica do problema de minimização

Minimizar $W = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Subseção 1

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Efetuar as operações elementares a partir de uma formulação geral

- 1 Uma restrição de desigualdade $\leq$ pode ser transformada em outra $\geq$, multiplicando ambos os lados por (-1) :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ é equivalente a}$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq b_i$$

- 2 Uma restrição de igualdade pode ser transformada em duas restrições de desigualdade:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \text{ é equivalente a}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Efetuar as operações elementares a partir de uma formulação geral

- 1 Uma variável x_j que não tem restrição de sinal, chamada de variável livre, pode ser expressa como a diferença de duas variáveis não negativas:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2, \quad x_j^1, x_j^2 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Exemplo

- Determine o dual do seguinte problema de minimização:

Minimizar $W = 20x_1 + 12x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + 4x_2 \geq 48$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

- 1 Transformar o problema para a forma canônica, multiplicando ambos os lados da segunda restrição por (-1) , de forma que a desigualdade possa ser escrita com sinal $\geq$:

Minimizar $W = 20x_1 + 12x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + 4x_2 \geq 48$$
$$-x_1 + 3x_2 \geq -10$$
$$3x_1 + x_2 \geq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

- 1 Transformar o problema para a forma canônica, multiplicando ambos os lados da segunda restrição por (-1) , de forma que a desigualdade possa ser escrita com sinal $\geq$:

$$\text{Minimizar } W = 20x_1 + 12x_2$$

$$\begin{aligned}\text{Sujeito a: } 2x_1 + 4x_2 &\geq 48 \\ -x_1 + 3x_2 &\geq -10 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

- 2 E o problema dual será:

$$\text{Maximizar } Z = 48y_1 - 10y_2 + 24y_3$$

$$\begin{aligned}\text{Sujeito a: } 2y_1 - y_2 + 3y_3 &\leq 20 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq -12 \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- 1 Determine o dual do seguinte problema de minimização:

Minimizar $W = 4x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \geq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 = 40$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- 1 A restrição de igualdade deve ser transformada em duas restrições de desigualdade:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 40$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 40$$

- 2 As restrições de desigualdade do tipo $\leq$ devem ser transformadas em outra do tipo $\geq$

$$-2x_1 - 3x_2 \geq -40$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -30$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- 1 O modelo completo de minimização, na forma canônica, pode ser escrito como:

Minimizar $W = 4x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \geq 20$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 40$$

$$-2x_1 - 3x_2 \geq -40$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- ① O problema dual na forma canônica, é:

$$\text{Maximizar } Z = 20y_1 + 40y_2^1 - 40y_2^2 - 30y_3$$

Sujeito a:

$$2y_1 + 2y_2^1 - 2y_2^2 - y_3 \leq 4$$

$$y_1 + 3y_2^1 - 3y_2^2 - 2y_3 \leq 5$$

$$y_1, y_2^1, y_2^2, y_3 \geq 0$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- 1 Definindo a variável y_2 como a diferença entre duas variáveis, isto é, $y_2 = y_2^1 - y_2^2$, a mesma passa a ser uma variável livre, sem restrição de sinal.

- 2 O problema pode se reduzir a:

$$\text{Maximizar } Z = 20y_1 + 40y_2 - 30y_3$$

Sujeito a:

$$2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 4$$

$$y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 5$$

$$y_1, y_3 \geq 0, y_2 \text{ livre}$$

Adaptações para Outras Formas Primais

Transformações para a Forma Padrão ou Canônica

Restrições de Igualdade

- Quando uma ou mais restrições do problema primal estão na forma de **igualdade**, a **variável dual** correspondente é uma variável **livre** ou irrestrita em sinal.
- Analogamente, se o problema **primal** possui pelo menos uma variável **livre**, a equação correspondente no problema **dual** está na forma de **igualdade**.

Seção 4

Relações Primal-Dual

Propriedade das soluções básicas complementares

Cada solução básica no problema primal tem uma solução básica complementar no problema dual, em que **os valores de suas funções objetivo correspondentes (Z e W) são iguais**. A solução básica dual complementar ($y, z - c$) é encontrada na linha 0 da tabela simplex para a solução básica primal, como indicado na Figura (10)

■ TABELA 6.4 Notação para as entradas na linha 0 de uma tabela simplex

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de:									Lado direito
			Z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	
Qualquer	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$	y_1	y_2	...	y_m	W

Figura 10: Notação para as entradas na linha 0 de uma tabela simplex

Subseção 1

Soluções Básicas Complementares

Relações Primal-Dual

Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.7 Associação entre variáveis nos problemas primal e dual

	Variável primal	Variável dual associada
Um problema qualquer	(Variável de decisão) x_j (Variável de folga) x_{n+i}	$z_j - c_j$ (variável de excesso) $j = 1, 2, \dots, n$ y_i (variável de decisão) $i = 1, 2, \dots, m$
Problema da Wyndor	Variáveis de decisão: x_1 x_2 Variáveis de folga: x_3 x_4 x_5	$z_1 - c_1$ (variáveis de excesso) $z_2 - c_2$ y_1 (variáveis de decisão) y_2 y_3

Figura 11: Associação entre variáveis nos problemas primal e dual

Relações Primal-Dual

Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.8 Relação de complementaridade da folga para as soluções básicas complementares

Variável primal	Variável dual associada	
Básica	Não básica	(m variáveis)
Não básica	Básica	(n variáveis)

Figura 12: Relação de complementaridade de folga para as soluções básicas complementares

Propriedade da complementaridade da folga

Dada a associação entre variáveis (Figura 11), as variáveis na solução básica primal e na solução básica dual complementar satisfazem a relação de complementaridade da folga (Figura 12). Além disso, essa relação é simétrica de modo que essas duas soluções básicas são complementares entre si.

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co.

- Todas as oito soluções básicas (cinco viáveis e três inviáveis) são mostradas na Figura 13;
- O problema dual também deve ter oito soluções básicas, cada complementaridade para uma dessas soluções primais (Figura 13);
- As três soluções BV obtidas pelo método simplex para o problema primal são a primeira, quinta e sexta soluções primais;
- As soluções básicas complementares para o problema dual podem ser lidas diretamente da linha 0 (conforme Figura 9) iniciando com os coeficientes das variáveis de folga e depois as variáveis originais.
- As demais soluções básicas duais também poderiam ser identificadas dessa maneira construindo a linha 0 para cada uma das demais soluções básicas primais.

Relações Primal-Dual

Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.9 Soluções básicas complementares para o exemplo da Wyndor Glass Co.

Nº	Problema primal		$Z = W$	Problema dual	
	Solução básica	Viável?		Viável?	Solução básica
1	(0, 0, 4, 12, 18)	Sim	0	Não	(0, 0, 0, -3, -5)
2	(4, 0, 0, 12, 6)	Sim	12	Não	(3, 0, 0, 0, -5)
3	(6, 0, -2, 12, 0)	Não	18	Não	(0, 0, 1, 0, -3)
4	(4, 3, 0, 6, 0)	Sim	27	Não	$\left(-\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$
5	(0, 6, 4, 0, 6)	Sim	30	Não	$\left(0, \frac{5}{2}, 0, -3, 0\right)$
6	(2, 6, 2, 0, 0)	Sim	36	Sim	$\left(0, \frac{3}{2}, 1, 0, 0\right)$
7	(4, 6, 0, 0, -6)	Não	42	Sim	$\left(3, \frac{5}{2}, 0, 0, 0\right)$
8	(0, 9, 4, -6, 0)	Não	45	Sim	$\left(0, 0, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

Figura 13: Soluções básicas complementares para o exemplo da Wyndor Glass Co.

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co.

- Considere a penúltima solução básica primal da Figura (13) $(4, 6, 0, 0, -6)$:
 - x_1 , x_2 e x_5 são variáveis básicas, visto que essas variáveis não são iguais a 0.
 - As variáveis básicas duais associadas (ver Figura 11) são $(z_1 - c_1)$, $(z_2 - c_2)$ e y_3 ;
 - Essas variáveis duais são variáveis não-básicas na solução básica complementar (Figura 12), de maneira que:

$$z_1 - c_1 = 0, \quad z_2 - c_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

Relações Primal-Dual

Soluções Básicas Complementares

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co.

- A forma aumenta das restrições funcionais no problema dual:

$$y_1 + 3y_3 - (z_1 - c_1) = 3;$$

$$2y_2 + 2y_3 - (z_2 - c_2) = 5,$$

- Reduz a

$$y_1 + 0 - (z_1 - c_1) = 3 \Rightarrow y_1 = 3;$$

$$2y_2 + 0 - (z_2 - c_2) = 5 \Rightarrow y_2 = \frac{5}{2},$$

- Combinando esses valores com os valores de 0 para as variáveis não-básicas, temos a solução básica $(3, \frac{5}{2}, 0, 0, 0)$ (Figura 13).
- Note que essa solução dual é viável para o problema dual, pois todas as cinco variáveis satisfazem as restrições de não-negatividade

Subseção 2

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

- Toda vez que uma solução for viável, a outra não será.
 - Exceção: No ponto ótimo
 - É possível que nenhuma das soluções seja viável, como aconteceu com o terceiro par
- A primeira das cinco soluções duais não pode ser viável, pois $W < 36$
 - O objetivo do problema dual é o de minimizar W .
- As últimas duas soluções primais não podem ser viáveis porque $Z > 36$.

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

Propriedade das soluções básicas ótimas complementares

Cada solução básica ótima no problema primal tem uma solução básica ótima complementar no problema dual, no qual os valores de suas respectivas funções objetivo (Z e W) são iguais. A solução dual ótima complementar $(y^*, z^* - c)$ é encontrada na linha 0 da tabela simplex para a **solução primal ótima**, (ver Figura 10).

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

- A solução dual $(y^*, z^* - c)$ deve ser viável para o problema dual:
 - A condição para otimalidade para o problema primal requer que todas essas variáveis duais (inclusive as variáveis excedentes) sejam não negativas.
- Se a solução é viável, ela deve ser ótima para o problema dual pela versão fraca da teoria da dualidade ($W = Z$, de modo que $y^* b = cx^*$ em que x^* é ótima para o problema primal).

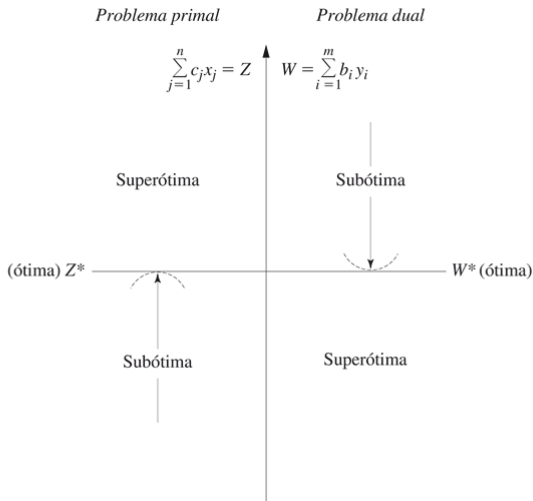
Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

- As soluções básicas podem ser classificadas quanto a:
 - **Viabilidade:** todas as variáveis (inclusive as variáveis de folga) na solução aumentada são não-negativas
 - **Otimidade:** todos os coeficientes na linha 0 (todas as variáveis na solução básica complementar) são não-negativos

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares



■ FIGURA 6.1 Intervalo de possíveis valores de $Z = W$ para certos tipos de soluções básicas complementares.

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.10 Classificação de soluções básicas

		Satisfaz a condição de otimalidade?	
		Sim	Não
Viável?	Sim	Ótima	Subótima
	Não	Superótima	Não é viável nem superótima

Figura 15: Classificação de Soluções Ótimas

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.10 Classificação de soluções básicas

		Satisfaz a condição de otimalidade?	
		Sim	Não
Viável?	Sim	Ótima	Subótima
	Não	Superótima	Não é viável nem superótima

Figura 15: Classificação de Soluções Ótimas

- As soluções básicas primais 1, 2, 4 e 5 são **subótimas**; 6 é **ótima**; 7 e 8 são **superótimas** e; 3 não é nem viável nem superótima (Figura 13).
- As relações gerais entre as soluções básicas complementares são sintetizadas na Figura (16).

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

■ TABELA 6.11 Relações entre soluções básicas complementares

Solução básica primal	Solução básica dual complementar	As duas soluções básicas	
		Primal viável?	Dual viável?
Subótima	Superótima	Sim	Não
Ótima	Ótima	Sim	Sim
Superótima	Subótima	Não	Sim
Não é viável nem superótima.	Não é viável nem superótima.	Não	Não

Figura 16: Relações entre Soluções Básicas Complementares

Relações Primal-Dual

Relações entre as Soluções Básicas Complementares

- A terceira e quarta colunas da Figura (16) introduzem dois termos comuns que são usados para descrever um par de soluções básicas complementares.
 - Soluções são chamadas **viáveis primais** se a **solução básica primal for viável**;
 - Soluções viáveis duais: a solução básica dual complementar é viável para o problema dual.
- O método simplex lida com soluções viáveis primais e se esforça para alcançar também a viabilidade dual. Quando isso é alcançado, as duas soluções básicas complementares são ótimas para seus respectivos problemas.
- Esses inter-relacionamentos são utilizados na análise de sensibilidade.

Seção 5

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

- A análise de sensibilidade envolve, basicamente, investigar o efeito sobre a solução ótima de realizar-se mudanças nos valores dos parâmetros de modelo a_{ij} , b_i e c_j ;
- Modificar os valores de parâmetros no problema primal também modifica os valores correspondentes no problema dual;
- Você pode escolher qual problema usar para investigar cada mudança.

Subseção 1

Mudanças nos Coeficientes de uma Variável Não-básica

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Mudanças nos Coeficientes de uma Variável Não-básica

- Mudanças no modelo original nos coeficientes de uma variável que era **não-básica na solução ótima** original.
- Qual será o efeito dessas modificações sobre essa solução? Ela ainda continua viável? Ela ainda continua ótima?

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Mudanças nos Coeficientes de uma Variável Não-básica

- Mudanças no modelo original nos coeficientes de uma variável que era **não-básica na solução ótima** original.
- Qual será o efeito dessas modificações sobre essa solução? Ela ainda continua viável? Ela ainda continua ótima?
- Como a variável envolvida é **não-básica** (valor zero), modificar seus coeficientes **não** poderá **afetar a viabilidade da solução**.
 - Será que ela ainda é ótima?
- Isso é equivalente a determinar se a solução básica complementar para o problema dual ainda é viável após terem sido feitas essas modificações (Figuras 15 e 16).
- Essas alterações afetam o problema dual modificando apenas uma restrição:
 - Essa pergunta poderá ser respondida simplesmente verificando se essa solução básica complementar ainda satisfaz essa restrição revisada.

Subseção 2

Introdução de uma Nova Variável

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

- As atividades podem ser selecionadas de um grupo maior de atividades possíveis;
 - As atividades remanescentes não foram incluídas no modelo original (pareciam menos atrativas).
 - Outras atividades vieram à tona até o modelo original ser formulado e resolvido.
- Uma atividade desconsiderada é suficientemente interessante para se iniciar.
- Acrescentar uma dessas atividades ao modelo modificaria a solução ótima original?

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

- Acrescentar outra atividade implica introduzir no modelo uma nova variável, com os respectivos coeficientes das restrições funcionais e função objetivo.
 - A única mudança no problema dual é adicionar uma nova restrição!
- A **solução ótima original**, juntamente com a nova variável (não-básica) igual a zero, ainda **seria ótima** para o problema primal?
 - De forma equivalente: A solução básica complementar para o **problema dual ainda é viável** (ver Figura 13 e 16)?
 - Apenas **verifique** se essa **solução básica complementar satisfaz a nova restrição para o problema dual**.

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co

- Suponha que desejamos analisar a inclusão de um terceiro produto na linha de produtos:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_{nova}$,

sujeito a: $x_1 + 2x_{nova} \leq 4$

$2x_2 + 3x_{nova} \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 + x_{nova} \leq 18$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_{nova} \geq 0$

em que x_{nova} represente a taxa de produção para esse novo produto

- A solução ótima original para esse problema sem x_{nova} era $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$.
 - Essa solução, com $x_{nova} = 0$ ainda é ótima?

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co

- Para responder: verificar a viabilidade da solução básica complementar para o problema dual.
 - A inclusão de uma nova variável no modelo primal acrescenta uma nova restrição no problema dual!

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } W &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3, \\ \text{sujeito a: } & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co

- A solução dual era (linha inferior da Figura (7) ou na sexta linha Figura 13):

$$(y_1, y_2, y_3, z_1 - c_1, z_2 - c_2) = (0, \frac{3}{2}, 1, 0, 0)$$

O Papel da Teoria da Dualidade na Análise de Sensibilidade

Introdução de uma Nova Variável

Exemplo: O problema da Wyndor Glass Co

- Já que essa solução era ótima para o problema dual original, ela satisfaz as restrições duais originais!

- Ela satisfaz a nova restrição dual?

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4$$

- Substituindo temos:

$$2(0) + 3\left(\frac{3}{4}\right) + (1) \geq 4$$

- A desigualdade é satisfeita;
 - A solução dual ainda é viável (portanto ótima).
 - A solução primal original $(2, 6, 2, 0, 0)$, juntamente com $x_{nova} = 0$ ainda é ótima;
 - O terceiro e novo produto não deve ser adicionado à linha de produtos.

Seção 6

A Essência da Análise de Sensibilidade

A Essência da Análise de Sensibilidade ¹

- O modelo de programação linear assume que todos os parâmetros do modelo são determinísticos (conhecidos com certeza):
 - Coeficientes da função objetivo c_j ;
 - Coeficientes das variáveis nas restrições a_{ij}
 - Os termos independentes b_i ;
- A estimação desses parâmetros pode ser baseada em previsões futuras: mudanças podem ocorrer até que a solução final seja implementada no mundo real.
 - Alterações nas quantidades de recursos disponíveis;
 - Introdução de um novo produto;
 - Variação do preço de um produto;
 - Aumento ou diminuição dos custos de produção, entre outros.

¹Conteúdo extraído de Patrícia Belfiore e Luiz Paulo Fávero, Pesquisa Operacional, Capítulo 4. Análise de Sensibilidade e Dualidade em Programação Linear

Subseção 1

Alteração em Coeficientes da Função Objetivo

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

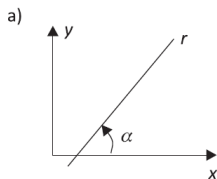
- Objetivo: determinar o intervalo de valores que cada coeficiente da função objetivo pode assumir, mantendo os demais coeficientes constantes, sem afetar a solução básica do modelo (a solução básica permanece ótima).
 - A análise baseia-se na comparação entre os coeficientes angulares das restrições ativas (tratadas como restrições de igualdade) com o coeficiente angular da função objetivo.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

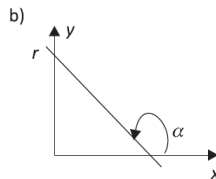
Inclinação e Coeficiente Angular da Reta

- α : ângulo formado entre a reta e o eixo x , no sentido anti-horário, chamado inclinação da reta.
- O coeficiente angular ou declividade m determina a direção da reta, isto é, a tangente trigonométrica da inclinação α : $m = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

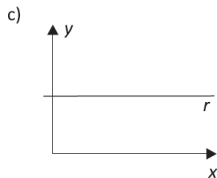
Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)



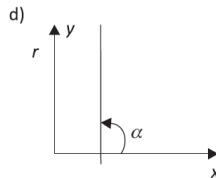
$$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$$



$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow m = 0$$



$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 90^\circ \Rightarrow \text{não existe } m$$

Figura 17: Relação entre inclinação da reta (α) e coeficiente angular (m).

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Equação Reduzida da Reta e Coeficiente Angular

- O coeficiente angular também pode ser determinado a partir da equação reduzida da reta.
- A equação geral de uma reta pode ser representada por:
 $ax + by + c = 0$
- Isola-se a variável y :
 $y = -\frac{a \cdot x}{b} - \frac{c}{b} \Rightarrow mx + n$, em que m é o coeficiente angular da reta e n o coeficiente linear da reta.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Coeficiente Angular da Função Objetivo a Partir de sua Equação Reduzida

- Considerando a equação geral de uma função objetivo com duas variáveis de decisão (x_1 e x_2): $z = c_1x_1 + c_2x_2$
- A forma reduzida:
$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2}$$
em que $-c_1/c_2$ é o coeficiente angular ou declividade da função objetivo.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Intervalo de valores para c_1 ou c_2 que não alteram a solução básica original do modelo

- Efetue o cálculo do coeficiente angular de cada restrição **ativa** do modelo (tratada como restrição de igualdade) e do coeficiente angular da função objetivo
 - Equação reduzida da reta;
 - Dois pontos da reta.
- Determinar o intervalo de valores para c_1 ou c_2 que não alteram a solução básica original do modelo.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 1

- A empresa Romes Calçados está interessada em planejar sua produção de chinelos e tamancos para o próximo verão.
- Os produtos passam pelo processo de corte, montagem e acabamento.
- A Figura (18) mostra o total de horas de mão de obra (horas-homem) necessárias para produzir uma unidade de cada componente em cada processo de fabricação e tempo total disponível por semana, em horas-homem.
- O lucro unitário por chinelo e tamanco fabricado é de R\$15,00 e R\$20,00, respectivamente.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Setor	Tempo (horas-homem) para processar 1 unidade		Tempo disponível (horas-homem/ semana)
	chinelo	tamanco	
corte	5	4	240
montagem	4	8	360
acabamento	0	7,5	300

Figura 18: Tempo necessário para fabricar uma unidade de cada componente em cada processo de fabricação e tempo total disponível por semana (horas-homem).

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 1

- Variáveis de decisão:
 - x_1 quantidade de chinelos a serem produzidos semanalmente
 - x_2 quantidade de tamancos a serem produzidos semanalmente.

- Formulação matemática:

Maximizar $z = 15x_1 + 20x_2$

sujeito a: $5x_1 + 4x_2 \leq 240$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 360$$

$$4x_1 + 8x_2 \leq 300$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 1

- Solução ótima do modelo:

$x_1 = 20$ (chinelos por semana) e $x_2 = 35$ (tamancos por semana) com $z = 1.000$ (lucro líquido semanal de R\$1.000,00).

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Equação	Coeficientes									constante
	z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	
0	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0

Figura 19: Solução gráfica.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 1

- As duas primeiras restrições do modelo são consideradas ativas (Figura 19).
 - Calcular o coeficiente angular da primeira e da segunda restrições, tratadas como equações de igualdade.
 - A primeira equação na forma resumida:
$$x_2 = -5/4x_1 + 60$$
 - Coeficiente angular $m = -5/4$
 - A forma reduzida da segunda equação:
$$x_2 = -1/2x_1 + 45$$
 - Coeficiente angular $m = -1/2$

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 1

- As duas primeiras restrições do modelo são consideradas ativas (Figura 19).
 - Calcular o coeficiente angular da primeira e da segunda restrições, tratadas como equações de igualdade.
 - A primeira equação na forma resumida:
$$x_2 = -5/4x_1 + 60$$
 - Coeficiente angular $m = -5/4$
 - A forma reduzida da segunda equação:
$$x_2 = -1/2x_1 + 45$$
 - Coeficiente angular $m = -1/2$
- O valor da solução básica original permanece constante enquanto:
$$-\frac{5}{4} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow 0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 1,25$$

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 2: Problema da empresa Romes Calçados

- 1 Suponha um aumento nos lucros unitários do chinelo e tamanco para R\$20,00 e R\$25,00, respectivamente, em função de reduções de custos de produção. Verifique se a solução básica permanece ótima. Em caso positivo, qual o novo valor de z ?
- 2 Quais as possíveis variações em c_1 e c_1 que manteriam a solução básica do modelo original? (Apenas um parâmetro muda por vez, enquanto o outro permanece constante).
- 3 Houve um aumento no custo do couro, o principal insumo para a fabricação do tamanco, diminuindo seu lucro unitário para R\$18,00. Para que a solução básica do modelo original permaneça inalterada, o lucro unitário de chinelos deverá satisfazer qual intervalo?

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 2: Questão 1

- Nova equação da função objetivo: $z = 20x_1 + 25x_2$
- Fazendo $\frac{c_1}{c_2} = \frac{20}{25} = 0,8$
- A condição $0,5 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 1,25$ continua satisfeita $\Rightarrow$ Solução ótima permanece válida $\Rightarrow (x_1 = 20, x_2 = 35)$
- O novo valor de z será $z = 20 \cdot 20 + 25 \cdot 35 = 1.275$

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 2: Questão 2 - variação possível para c_2

- Substituindo $c_1 = 15$ (valor original de c_1) na condição $0,5 \leq c_1/c_2 \leq 1,25$:
$$\begin{cases} 0,5c_2 \leq 15 \Rightarrow c_2 \leq 30 \\ 1,25c_2 \geq 15 \Rightarrow c_2 \geq 12 \end{cases} \Rightarrow 12 \leq c_2 \leq 30$$
- Portanto, enquanto c_2 satisfizer o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 20, x_2 = 35$) permanecerá inalterada.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 2: Questão 2 - variação possível para c_1

- Substituindo $c_2 = 20$ (valor original de c_2) na condição $0,5 \leq c_1/c_2 \leq 1,25$:
$$\begin{cases} 0,5 \cdot 20 \leq c_1 \Rightarrow 10 \leq c_1 \Rightarrow c_1 \geq 10 \\ 1,25 \cdot 20 \geq c_1 \Rightarrow c_1 \leq 25 \end{cases} \Rightarrow 10 \leq c_1 \leq 25$$
- Portanto, enquanto c_1 satisfizer o intervalo especificado, a solução básica ótima do modelo original ($x_1 = 20, x_2 = 35$) permanecerá inalterada.

Alteração em um dos Coeficientes da Função Objetivo (Solução Gráfica)

Exemplo 2: Questão 3

- Substituindo $c_2 = 18$ na condição $0,5 \leq c_1/c_2 \leq 1,25$:
 - $0,5 \cdot 18 \leq c_1 \leq 1,25 \cdot 18 \Rightarrow 9 \leq c_1 \leq 22,5$
- Enquanto c_1 satisfizer o intervalo especificado, para um valor de $c_2 = 18$, a solução básica permanece ótima.

Subseção 2

Alteração em Constantes do Lado Direito

Alteração na constante do lado direito da restrição

- A análise de sensibilidade de alterações no valor de uma das constantes do lado direito da restrição (disponibilidade de recursos) é baseada no conceito de preço sombra (*shadow price*)
 - **Preço Sombra (P_i):** é o acréscimo (ou decréscimo) no valor da função objetivo caso seja adicionada (ou retirada) uma unidade na quantidade atual de recursos disponíveis da i -ésima restrição b_i .

$$P_i = \frac{\Delta z_{+1}}{\Delta b_{+1}} = \frac{\Delta z_{-1}}{\Delta b_{-1}} = \frac{z_{+1} - z_0}{+1} = \frac{z_{-1} - z_0}{-1} \quad (6)$$

- Interpretação do preço sombra
 - O preço justo a ser pago pela utilização de uma unidade do recurso i ;
 - O custo de oportunidade da perda de uma unidade do recurso i .
- O preço sombra é o nome dado às variáveis de decisão do problema dual

Alteração na constante do lado direito da restrição

- Neste caso, o objetivo da análise de sensibilidade é determinar o intervalo de valores para b_i de forma que o **preço sombra permanece constante** (acréscimo máximo permissível de p unidades em b_i^0 ou decréscimo permissível de q unidades em b_i^0):

$$b_i^0 - q \leq b_i \leq b_i^0 + p \quad (7)$$

- O intervalo deve a satisfazer:

$$P_i = \frac{\Delta z_{+p}}{\Delta b_{i,+p}} = \frac{\Delta z_{-q}}{\Delta b_{i,-q}} = \frac{z_{+p} - z_0}{p} = \frac{z_{-q} - z_0}{q} \quad (8)$$

Alteração na constante do lado direito da restrição

em que

- Δz_{+p} = acréscimo no valor da função objetivo z caso sejam adicionadas p unidades de recursos em b_i^0 .
- Δz_{-q} = decréscimo no valor da função objetivo z caso sejam retiradas q unidades de recursos em b_i^0 .
- z_0 = valor inicial da função objetivo.
- z_{+p} = novo valor da função objetivo após serem adicionadas p unidades em b_i^0 .
- z_{-q} = novo valor da função objetivo após serem retiradas q unidades em b_i^0 .
- $\Delta b_{i,+p}$ = acréscimo de p unidades em b_i^0 .
- $\Delta b_{i,-q}$ = decréscimo de q unidades em b_i^0 .

Alteração na constante do lado direito da restrição

- O cálculo do preço sombra é válido somente para as restrições ativas (que definem a solução ótima do modelo).
- Variações em b_i para regiões não ativas, dentro da região de factibilidade, não influenciarão a solução ótima do modelo
 - O preço sombra para restrições não ativas é zero.

Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

Objetivo

- Determinar o intervalo de valores em que b_1 pode variar ($b_1^0 - q \leq b_1 \leq b_1^0 + p$) sombra permanece constante.

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

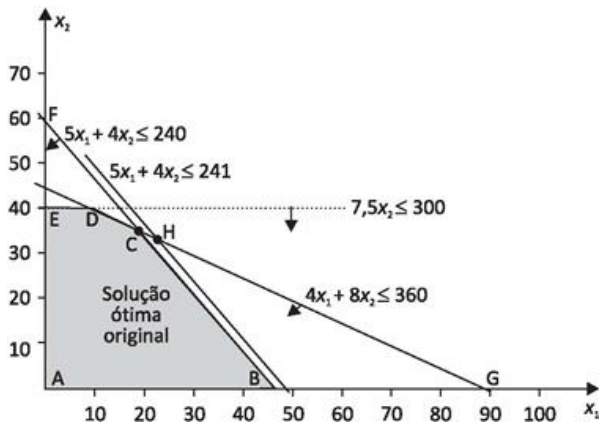


Figura 20: Análise de sensibilidade após adição de uma hora-homem na disponibilidade de recursos do setor de corte

Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

- A a solução ótima do modelo original é determinada pela interseção das retas $5x_1 + 4x_2 = 240$ e $4x_1 + 8x_2 = 360$ (Figura 20).
- Se tivermos uma nova restrição $5x_1 + 4x_2 = 241$ abrando o lado direito:
 - A nova reta será paralela à restrição original
- À medida que o valor de b_1 aumenta, a reta se desloca na direção do ponto extremo G, sempre paralela à restrição original.
- À medida que o valor de b_1 diminui, a reta se desloca em direção ao ponto extremo D.
- Enquanto a interseção das equações $5x_1 + 4x_2 = b_1$ e $4x_1 + 8x_2 = 360$ ocorrer dentro da região de factibilidade (segmento DG), o preço sombra permanecerá constante.
- Os pontos extremos D e G representam os limites inferiores e superiores para b_1 ;

Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

Limite inferior para b_1

- Substituir as coordenadas do ponto D ($x_1 = 10$, $x_2 = 40$) em $5x_1 + 4x_2$.
 - Limite inferior para b_1 (ponto D): $5 \cdot 10 + 4 \cdot 40 = 210$

Limite superior para b_1

- Substituir as coordenadas do ponto G ($x_1 = 90$, $x_2 = 0$) em $5x_1 + 4x_2$.
 - Limite superior de b_1 (ponto G): $5 \cdot 90 + 4 \cdot 0 = 450$

Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

- Enquanto o valor de b_1 estiver dentro do intervalo $210 \leq b_1 \leq 450$, o seu preço sombra permanecerá constante.
- função do decréscimo e o acréscimo máximo permissível para $b_1^0 = 240$ (seu valor original):

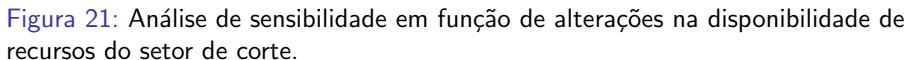
$$b_1^0 - 30 \leq b_1 \leq b_1^0 + 210 \quad (9)$$

Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

- Tome o preço sombra $y_1 = 1,667$
- Se o tempo disponível para corte aumentar em 210 horas:
 - Variação do lucro: $y_1 \cdot 210 = 1,667 \cdot 210 = 350$
 - A função objetivo crescerá R\$350,00.
- Se decrescer para em 30 horas, o custo de oportunidade pela perda dessas 30 horas-homem no tempo total disponível para o setor de corte:
 - Variação do lucro: $y_1 \cdot 30 = 1,667 \cdot 30 = 50$
 - A função objetivo decresceria R\$50,00.
- Para qualquer valor de b_1 fora desse intervalo, é necessário recalcular a nova solução ótima, já que a região factível é alterada.

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1



Alteração na constante do lado direito da restrição

Decréscimo e Acréscimo Máximo Permissível para b_1

- O polígono AEDB representa a região de factibilidade para um valor de $b_1 = 210$ (limite inferior para b_1).
- O polígono AEDG representa a região de factibilidade para um valor de $b_1 = 450$ (limite superior para b_1).

Subseção 3

Custo Reduzido

- Os coeficientes iniciais das variáveis de folga $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ na linha 0 são nulos, já que as mesmas correspondem às variáveis básicas da solução inicial (Figura 22).

Equação	Coeficientes									constante
	z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	
0	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0

Figura 22: Entradas na linha 0 inicial de uma tabela simplex

Custo Reduzido

- O valor de $z_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ representa o quanto foi adicionado ao coeficiente inicial da variável x_i na linha 0 da forma tabular original $(-c_i)$ em uma iteração q qualquer.
- O valor de $z_i - c_i$ é chamado de custo reduzido da variável original x_i na iteração q .
- O coeficiente $y_j, (j = 1, 2, \dots, m)$ representa o quanto foi adicionado ao coeficiente inicial da variável de folga x_{n+j} na linha 0.

Iteração	Variável básica	Eq.	Coeficiente de:								Lado direito	
			Z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$		x_{n+m}
Qualquer	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	W

Figura 23: Entradas na linha 0 inicial de uma tabela simplex

- O coeficiente de determinada variável na linha 0 da forma tabular, seja ela básica ou não básica, obtido em qualquer iteração q do método Simplex, é chamado de custo reduzido.
- O **custo reduzido** de determinada variável **não básica** x_i pode ser interpretado como o valor que seu coeficiente original c_i deve melhorar na função objetivo **antes** da solução básica atual tornar-se subótima e de x_i tornar-se uma variável básica.
- Para um problema de maximização, o custo reduzido da variável não básica x_i na forma tabular ótima ($z_i^* - c_i^*$) corresponde ao incremento máximo no valor de seu coeficiente original na função objetivo que manterá a solução básica atual ótima e a variável x_i não básica.
- Qualquer incremento maior do que ($z_i^* - c_i^*$) tornará a solução básica atual subótima e x_i entrará na base.

Exemplo

- Considere o problema de maximização:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Por meio de uma análise de sensibilidade do problema foi obtido o custo reduzido de cada variável tendo como base a solução ótima do modelo conforme mostra a Tabela (1)

Tabela 1: Solução ótima e custo reduzido de cada variável

Variável	Solução ótima	Custo reduzido
x_1	0	1
x_2	20	0

- Interprete os resultados apresentados na tabela.

- A solução básica do modelo é $x_1 = 0$ e $x_2 = 20$.
- Verifica-se que o custo reduzido da variável x_2 é nulo, já que a mesma é uma variável básica.
- O custo reduzido da variável x_1 representa o incremento máximo (problema de maximização) no valor de c_1 que mantém a solução básica atual ótima e a variável x_1 não básica.
 - Se o coeficiente de x_1 na função objetivo passar de 3 para 4, a solução básica atual permanecerá ótima, de forma que a variável x_1 continuará sendo não básica.
 - Se o coeficiente de x_1 for maior do que 4, a solução atual se tornará subótima e a variável x_1 será básica na nova solução ótima.
- Se o problema de maximização (minimização) for resolvido pelo Solver do Excel, o custo reduzido de x_1 aparecerá com sinal negativo (positivo) no relatório de sensibilidade.