CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 8 - Os Problemas de Transporte e da Designação

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

22 de outubro de 2018

Tópicos

Seção 1

O Problema de Transporte

O Problema de Transporte

O problema de transporte

- Aplicações que envolvem determinar como transportar mercadorias de maneira otimizada.
- Algumas de suas aplicações (por exemplo, cronograma de produção), na verdade, não tem nada a ver com transporte.

O problema de designação

- Como distribuir pessoas para realizar determinadas tarefas.
- O problema da designação pode ser visto como um tipo especial de problema de transporte.

O Problema de Transporte

- Aplicações de problemas de transporte e da designação tendem a exigir um número muito grande de restrições e variáveis.
- Uma característica fundamental desses problemas é que a maioria dos coeficientes a_{ij} nas restrições é zero e, o número relativamente pequeno de coeficientes não-zero aparece em um padrão distinto.
- Algoritmos otimizados especiais alcançam ganhos em nível de processamento explorando essa estrutura especial do problema.

O Problema de Transporte

Exemplo

- Um empresa produz ervilhas enlatadas em três fábricas (próximas a Bellingham, Washington; Eugene, Oregon; e Albert Lea, Minnesota)
- A produção é transportada por caminhão para quatro depósitos de distribuição no oeste dos Estados Unidos (Sacramento, Califórnia; Salt Lake City,Utah; Dakota do Sul; e Albuquerque, Novo México) (Figura 1)
- Objetivo: reduzir os custos de transporte tanto quanto possível.
- Estimativa do volume proveniente de cada fábrica de enlatados e destinada a cada depósito, bem como o custo de transporte por carreta para cada combinação fábrica-depósito (Figura 2),
- Há uma carga total a ser remetida de 300 carretas.
- Determinar qual plano de destinação dessas remessas às diversas combinações fábrica-depósito iria minimizar o custo total de remessa dessa mercadoria.

O Problema de Transporte

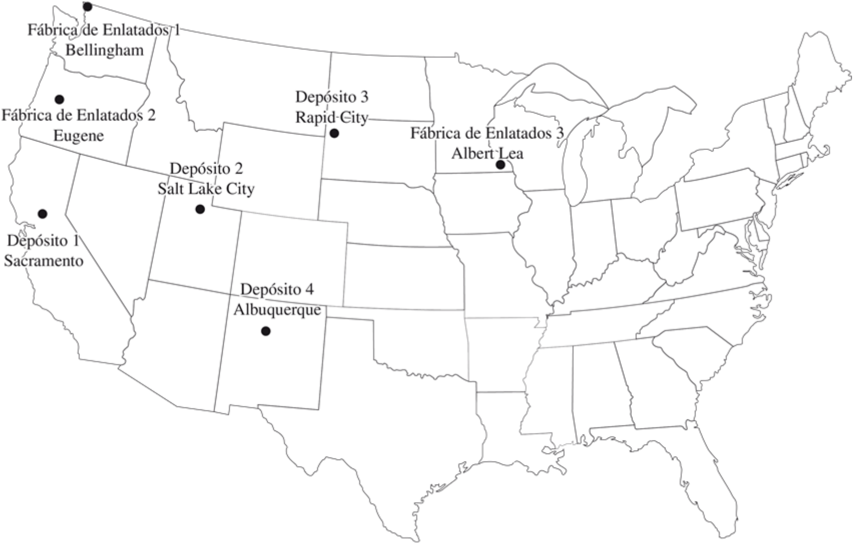

FIGURA 8.1 Localização das fábricas de enlatados e dos depósitos para o problema da P & T Co.

O Problema de Transporte

TABELA 8.2 Dados de embarque para a P & T Co.

	Custo de transporte (US$) por caminhão carregado				
	Depósito				
	1	2	3	4	Saída
Fábrica 1	464	513	654	867	75
Fábrica 2	352	416	690	791	125
Fábrica 3	995	682	388	685	100
Destinação	80	65	70	85	

Figura 2: Dados de embarque

O Problema de Transporte

- Ignorando o layout geográfico das fábricas e dos depósitos, representamos o mesmo em rede de maneira simples (Figura 3).
  - Alinhando todas as fábricas de enlatados em uma coluna à esquerda e todos os depósitos em uma coluna à direita.
  - As setas mostram as possíveis rotas para o transporte das mercadorias.
  - O número próximo a cada seta é o custo de transporte por caminhão carregado para aquela rota.
  - O número entre chaves que aparece próximo a cada localidade indica a quantidade de carretas a ser despachada daquela localidade (de modo que a destinação em cada depósito seja dada na forma de um número negativo)

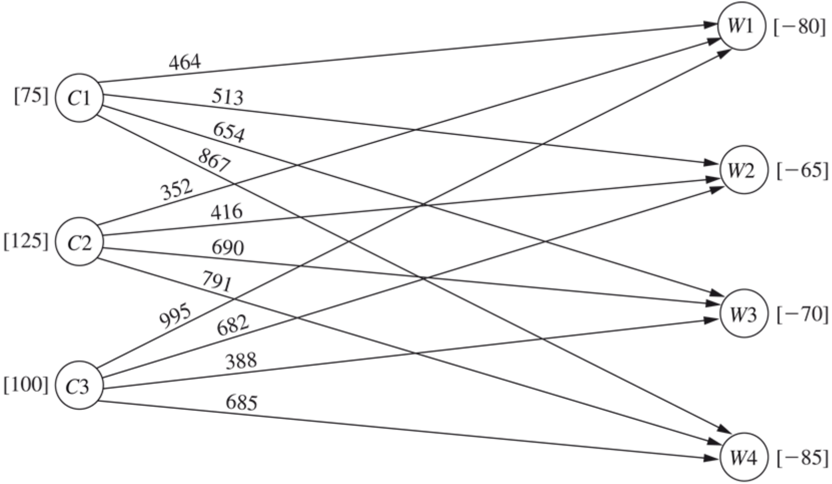

FIGURA 8.2 Representação em rede do problema da P & T Co.

Figura 3: Representação em rede do problema

O Problema de Transporte

- O problema é um problema de programação linear do tipo problema de transporte.
- Para formular o modelo, façamos que Z represente o custo total de transporte e que $x_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4)$ seja o número de carretas a ser despachado da fábrica i para o depósito j.
- O objetivo é escolher os valores dessas 12 variáveis de decisão (os x_{ij}) de modo a:

O Problema de Transporte

$$\text{Minimizar} \quad Z = 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34},$$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 75 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 125 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 100 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 80 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 65 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 70 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 85
\end{aligned}$$

y

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4).$$

O Problema de Transporte

■ TABELA 8.3 Coeficientes de restrição para a P & T Co.

	Coeficiente de:												
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
A =	1	1	1	1									Restrições das Fábricas
					1	1	1	1					
									1	1	1	1	
	1				1				1				Restrições dos Depósitos
		1				1				1			
			1				1				1		
				1				1				1	

Figura 4: Coeficientes de restrição para a fábrica de ervilhas

- É a estrutura especial no padrão desses coeficientes que distingue esse problema como um problema de transporte, não o contexto.

- O problema de transporte genérico se refere a distribuir qualquer *commodity* de qualquer grupo de centros de fornecimento, chamado **origens**, a qualquer grupo de centros de recepção, denominados **destinos**, de modo a minimizar o custo total de distribuição.
- A correspondência em termos de terminologia entre o exemplo e o problema genérico é sintetizada na Figura (5).

TABELA 8.4 Terminologia para o problema de transporte

Exemplo-protótipo	Problema genérico
Carretas de ervilhas enlatadas	Unidades de uma commodity
Três fábricas de enlatados	m origens
Quatro depósitos	n destinos
Produção da fábrica i	Oferta s_i da origem i
Destinação para o depósito j	Demanda d_j no destino j
Custo de transporte por carreta da fábrica i para o depósito j	Custo c_{ij} por unidade distribuída da origem i para o destino j

Figura 5: Terminologia para o problema de transporte

- Cada origem possui determinada oferta de unidades a serem distribuídas aos destinos
- Cada destino tem certa demanda pelas unidades a serem recebidas das origens.

Hipótese das exigências:

Cada origem tem uma oferta fixa de unidades, em que toda essa oferta (s_i, $i = 1, 2, \cdots, m$)deve ser distribuída aos destinos. De forma similar, cada destino tem uma demanda fixa por unidades, nas quais toda essa demanda (d_j, $j = 1, 2, \cdots, n$) deve ser recebida das origens.

- Na hipótese anterior não há nenhuma margem de ação nas quantidades a serem enviadas ou recebidas. Isso significa que deve haver um **equilíbrio** entre a oferta total de todas as origens e a demanda total de todos os destinos.

Propriedade das soluções viáveis:

Um problema de transporte terá soluções viáveis se e somente se

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \tag{1}$$

- Em alguns problemas reais, as ofertas, na verdade, representam quantidades máximas (e não quantidades fixas) a serem distribuídas.
- Em outros casos, as demandas representam quantidades máximas (e não quantidades fixas) a serem recebidas.
    - Violam a hipótese das exigências.
    - Reformular o problema de modo que ele atenda às hipóteses: introdução de um destino "fantasma "ou de uma origem "fantasma"para absorver a folga entre as quantidades reais e as quantidades máximas que estão sendo distribuídas.

Hipótese do custo

O custo de distribuição de unidades de qualquer origem em particular para qualquer destino em particular é diretamente proporcional ao número de unidades distribuídas. O custo é simplesmente o custo unitário de distribuição c_{ij} da origem i ao destino j vezes o número de unidades distribuídas.

- Os únicos dados (parâmetros) necessários para um problema de transporte são as origens, demandas e custos unitários.
- Todos esses parâmetros podem ser sintetizados convenientemente em uma única tabela de parâmetros (Figura 6).

O Problema de Transporte

Modelo do Problema de Transporte

TABELA 8.5 Tabela de parâmetros para o problema de transporte

		Custo por unidade distribuída				
		Destino				
		1	2	...	n	Oferta
Origem	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	...	...	...		$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m
Demanda		d_1	d_2	...	d_n	

Figura 6: Tabela de parâmetros para o problema de transporte

Modelo

Qualquer problema (que envolva transporte ou não) se ajusta a um problema de transporte caso possa ser descrito completamente em termos de uma tabela de parâmetros como a Figura (6) e satisfaça tanto a hipótese das exigências quanto a hipótese do custo. O objetivo é minimizar o custo total de distribuição das unidades. Todos os parâmetros do modelo estão inclusos nessa tabela de parâmetros.

Propriedade das soluções inteiras

Para problemas de transporte em que todos s_i e d_j são valores inteiros, todas as variáveis básicas (alocações) em toda solução(BV) viável (inclusive uma solução ótima) também são valores inteiros.

Subseção 1

Origem e Destino Fantasma

- Problemas que não se ajustam completamente a um modelo de transporte e violam a hipótese das exigências;
    - Reformular o problema para se adaptar ao modelo pela introdução de um destino "fantasma"ou uma origem "fantasma".

Destino "Fantasma"

Destino “Fantasma”

- Uma empresa constrói aviões comerciais;
- O último estágio no processo de produção é produzir os motores a jato e depois instalá-los na estrutura completa da aeronave;
- A empresa deve entregar um número de aeronaves em um futuro próximo e a produção de motores a jato para esses aviões agora tem de ser programada para os próximos quatro meses.
- Para atender às datas contratadas para entrega, a empresa deve fornecer motores para instalação nas quantidades indicadas na segunda coluna da Figura (7).

TABELA 8.7 Dados de programação de produção da Cia. Aérea Setentrional

Mês	Instalações programadas	Produção máxima	Custo* unitário de produção	Custo* unitário de armazenamento
1	10	25	1,08	0,015
2	15	35	1,11	0,015
3	25	30	1,10	0,015
4	20	10	1,13	

* Custo expresso em milhões de dólares.

Figura 7: Dados de programação de produção da Empresa

Destino “Fantasma”

- O número acumulativo de motores produzidos no final dos meses 1, 2, 3 e 4 deve ser, respectivamente, de pelo menos 10, 25, 50 e 70.
- A disponibilidade de produção da estrutura varia de acordo com outros trabalhos de produção.
- A Figura (7) apresenta a capacidade máxima de produção e o custo por mês.
  - É possível produzir parte dos motores com um mês ou mais de antecedência para aproveitar os custos mais baixos.
  - Os motores produzidos com antecedência deve ser armazenados até a instalação programada com um custo de armazenamento de R$ 15.000 por mês.
- Objetivos: Programar o número de motores em cada um dos quatro meses de modo a minimizar os custos de produção e de armazenamento.

Destino “Fantasma”

- Formulando como um problema de transporte requer menos esforço em sua resolução.
- Descreva o problema em termos de origens e destinos.
  - Origem i = produção de motores a jato no mês i (i = 1, 2, 3, 4)
  - Destino j = instalação de motores a jato no mês j (j = 1, 2, 3, 4)
  - x_{ij} = número de motores produzido no mês i para instalação no mês j
  - c_{ij} = custo associado a cada unidade de x_{ij}

    $$\begin{cases} c_{ij} = \text{ Custo por unidade para produção e armazenamento se } \; i \leq j \\ c_{ij} = ? \;\; sei > j \end{cases}$$
  - s_i = ?
  - d_j = número de instalações programadas no mês j.

TABELA 8.8 Tabela de parâmetros incompleta para o caso da Cia. Aérea Setentrional

		Custo por unidade distribuída				
		Destino				
		1	2	3	4	Oferta
Origem	1	1,080	1,095	1,110	1,125	?
	2	?	1,110	1,125	1,140	?
	3	?	?	1,100	1,115	?
	4	?	?	?	1,130	?
Demanda		10	15	25	20	

Figura 8: Tabela de parâmetros incompleta

Destino "Fantasma"

- Se $i > j$, $x_{ij} = 0 \Rightarrow$ impossível fabricar motores em um mês para instalação em um mês anterior,
  - Atribuir algum valor para os custos não identificados.
  - Usar o método do "grande número ", atribuir um valor muito grande(representado por M) para as entradas de custo não identificadas na Figura (8) para forçar os valores correspondentes de x_{ij} a serem zero na solução final.

Destino “Fantasma”

- É necessário atribuir algum número fixo a cada entrada da coluna de oferta para se configurar um problema de transporte.
- As restrições de oferta existem na forma de limites superiores em relação à quantidade que pode ser ofertada:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 30,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 10,$$

Destino “Fantasma”

- Convertendo as desigualdades em equações de igualdade (modelo do problema de transporte)
- Usamos o dispositivo semelhante às variáveis de folga.
- As variáveis de folga alocaçam a um único destino “fantasma” a capacidade de produção não utilizada nos respectivos meses .
- Permite que a oferta seja a capacidade de produção total em dado mês.
- A demanda para o destino “fantasma” é a capacidade total não utilizada:
  $(25 + 35 + 30 + 10) - (10 + 15 + 25 + 20) = 30$

O Problema de Transporte

Origem e Destino Fantasma

TABELA 8.9 Tabela completa de parâmetros para o caso da Cia. Aérea Setentrional

		Custo por unidade distribuída					
		Destino					
		1	2	3	4	5(D)	Oferta
Origem	1	1,080	1,095	1,110	1,125	0	25
	2	M	1,110	1,125	1,140	0	35
	3	M	M	1,100	1,115	0	30
	4	M	M	M	1,130	0	10
Demanda		10	15	25	20	30	

Figura 9: Tabela de parâmetros

Destino "Fantasma"

- As entradas de custos associadas ao destino "fantasma "devem ser zero, pois não há nenhum custo envolvido por parte de uma alocação fictícia.
- Entradas com custos M seriam inadequadas para essa coluna, porque não queremos forçar os valores correspondentes de x_{ij} a serem zero. Esses valores precisam dar um total de 30.
- O destino "fantasma"está identificado como destino 5(D) na Figura (9).

Origem “Fantasma”

Origem "Fantasma"

- Uma agência que administra a distribuição de água em uma grande região geográfica árida deve adquirir e trazer água de uma região externa.
- As origens dessa água importada são os rios Colombo, Sacron e Calorie. O distrito revende então a água a usuários da região.
- O sprincipais clientes são os departamentos de água das cidades de Berdoo, Los Devils, San Go e Hollyglass.

Origem "Fantasma"

- Possível suprir qualquer cidade com água dos três rios, com exceção de Hollyglass com água do rio Calorie.
- O custo para fornecer água depende tanto da origem da água como da cidade que está sendo abastecida.
- A variável custo por pé-acre de água (em dezenas de dólares) para cada combinação de rio-cidade é dada na Figura (10);
- O preço por pé-acre cobrado pelo distrito é independente da origem da água e é o mesmo para todas as cidades.

TABELA 8.10 Dados de recursos hídricos para a Metro Water District

	Custo (dezenas de dólares) por pé-acre				
	Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglass	Oferta
Rio Colombo	16	13	22	17	50
Rio Sacron	14	13	19	15	60
Rio Calorie	19	20	23	–	50
Mínima necessária	30	70	0	10	(em unidades de 1 milhão de pés-acres)
Solicitada	50	70	30	∞	

Figura 10: Dados de recursos hídricos

Origem “Fantasma”

- Problema: alocar a água disponível durante o próximo verão.
- As quantidades disponíveis dos três rios, em unidades de 1 milhão de pés-acres, são dadas na coluna à direita da Tabela 8.1;
- O distrito se compromete a fornecer certa quantidade mínima para cada cidade (exceto San Go).
- Deseja-se alocar toda a água disponível dos três rios para as quatro cidades de maneira a atender pelo menos o mínimo de cada cidade e minimizar o custo total para o distrito.

Origem "Fantasma"

- Os rios são as origens e as cidades os destinos.
- Não está claro quais devem ser as demandas nos destinos.
- A quantidade a ser recebida em cada destino (exceto Los Devils) é uma variável de decisão com um limite inferior e também um limite superior.
- O limite superior é a quantidade solicitada, a menos que o solicitado exceda a oferta total remanescente após as necessidades mínimas das demais cidades terem sido atendidas, em cujo caso essa oferta remanescente se toma o limite superior.
    - Hollyglass tem um limite superior de $(50 + 60 + 50) - (30 + 70 + 0) = 60$

Origem "Fantasma"

- As quantidades de demanda têm de ser constantes (não variáveis de decisão limitadas).
  - Suponha que os limites superiores sejam as únicas restrições nas quantidades a serem alocadas às cidades.
  - As alocações solicitadas podem ser vistas como as quantidades de demanda para a formulação de um problema de transporte.

Origem "Fantasma"

- Há uma demanda em excesso.
- Introduzir uma origem "fantasma" para "enviar" a capacidade de demanda não utilizada.
- A quantidade de oferta imaginária para essa origem "fantasma" seria a quantidade pela qual a soma das demandas excedesse a soma das ofertas reais. $(50 + 70 + 30 + 60) - (50 + 60 + 50) = 50$.

TABELA 8.11 Tabela de parâmetros sem as necessidades mínimas para o caso do Metro Water District

		Custo (dezenas de milhões de dólares) por pé-acre				
		Destino				
		Berdoro	Los Devils	San Go	Hollyglass	Oferta
Origem	Rio Colombo	16	13	22	17	50
	Rio Sacron	14	13	19	15	60
	Rio Calorie	19	20	23	M	50
	“Fantasma“	0	0	0	0	50
Demanda		50	70	30	60	

Figura 11: Tabela de parâmetros sem as necessidades mínimas

- Hollyglass
  - Um custo unitário imenso M é atribuído à combinação rio Calorie e Hollyglass: a água do rio Calorie não pode ser usada para abastecer Hollyglass.
  - Não requer nenhum ajuste porque sua demanda (60) excede a oferta da origem "fantasma "(50) em 10, de modo que a quantidade ofertada a Hollyglass das origens reais será de pelo menos o mínimo (10)
- Los Devils:
  - Toda sua demanda de 70 deve de ser atendida por origens reais: atribuir o custo elevado pelo "grande número"
- Berdoo:
  - Evitar que a origem "fantasma"contribua com mais que 20 para a demanda total de 50.
  - Dividir Berdoo em dois destinos: um tendo uma demanda de 30 com um custo unitário M e o outro tendo uma demanda de 20 com um custo unitário zero (Figura 12).

■ TABELA 8.12 **Tabela de parâmetros para o caso da Metro Water District**

			Custo (dezenas de milhões de dólares) por pé-acre					
			Destino					
			Berdoo (min.) 1	Berdoo (extra) 2	Los Devils 3	San Go 4	Hollyglass 5	Oferta
Origem	Rio Colombo	1	16	16	13	22	17	50
	Rio Sacron	2	14	14	13	19	15	60
	Rio Calorie	3	19	19	20	23	M	50
	"Fantasma"	4(D**)	M	0	M	0	0	50
Demanda			30	20	70	30	60	

Figura 12: Tabela de parâmetros após os ajustes necessários

Subseção 2

Método Simplex aperfeiçoado para o problema de transporte

Método Simplex para o problema de transporte

- Registramos as informações de c_{ij}, s_i, d_j para cada iteração em uma tabela simplex de transporte (Figura 13)

■ TABELA 8.15 Formato de uma tabela simplex de transporte

		Destino					
		1	**2**	$\cdots$	n	**Oferta**	u_i
Origem	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2	
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m	
Demanda		d_1	d_2	$\cdots$	d_n	$Z =$	
	v_j						

Informações adicionais a serem acrescidas a cada célula:

Se x_{ij} for uma variável básica	*Se x_{ij} for uma variável não básica*
c_{ij} x_{ij}	c_{ij} $c_{ij} - u_i - v_j$

Método Simplex para o problema de transporte[1]

Algoritmo de transporte

1. O problema deve estar balanceado e representado na forma tabular
2. Encontrar uma solução básica factível (SBF) inicial;
3. Teste de otimalidade
4. Determinar uma SBF adjacente melhor.

[1]Belfiore, Patrícia e Fávero, Luiz Paulo. **Pesquisa Operacional**, Capítulo 5. Programação em Redes

- A Karpet é uma empresa fabricante de autopeças, cujas sedes estão localizadas em Osasco, Sorocaba e São Sebastião.
- Seus clientes encontram-se em São Paulo, Rio de Janeiro e Curitiba
- Os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino, assim como a capacidade de cada fornecedor e a demanda de cada cliente, encontram-se na Figura (14)
- Objetivo: atender a demanda de cada consumidor final, dado as capacidades de fornecimento, de forma a minimizar o custo total de transporte.
- Resolver o problema de transporte

Método Simplex para o problema de transporte

		Custo unitário de transporte			
		Consumidor			Capacidade
		São Paulo	Rio de Janeiro	Curitiba	
Fornecedor	Osasco	12	22	30	100
	Sorocaba	18	24	32	140
	São Sebastião	22	15	34	160
Demanda		120	130	150	

Figura 14: Dados de transporte da empresa Karpet Ltda.

		Consumidor			
		1	2	3	Capacidade
Fornecedor	1	12 X_{11}	22 X_{12}	30 X_{13}	100
	2	18 X_{21}	24 X_{22}	32 X_{23}	140
	3	22 X_{31}	15 X_{32}	34 X_{33}	160
Demanda		120	130	150	

Figura 15: Representação do problema de transporte balanceado da empresa Karpet Ltda na forma tabular

Método Simplex para o problema de transporte

Solução Inicial

- O problema clássico de transporte considera um conjunto de m fornecedores e n consumidores.
- O problema de transporte balanceado contém $m + n$ restrições de igualdade
  - O fluxo total de entrada é igual ao fluxo total de saída.
  - Uma das restrições é redundante, de forma que o modelo contém $m + n - 1$ equações independentes e, $m + n - 1$ variáveis básicas.
- Para o problema de transporte da empresa Karpet Ltda, em que $m = 3$ e $n = 3$, temos cinco variáveis básicas.
- Podemos encontrar uma solução BV inicial pelo método do canto noroeste, método do custo mínimo ou aproximação de Vogel.

Subseção 3

Método do Canto Noroeste

Método Simplex para o problema de transporte

Solução Inicial: Método do Canto Noroeste

1. Selecione a célula localizada no canto superior esquerdo (noroeste), dentre as células não alocadas no Passo 2 e as células ainda não bloqueadas no Passo 3.
2. Aloque a maior quantidade possível a essa célula. A soma das células na mesma linha e na mesma coluna não deve ultrapassar a oferta ou demanda total
3. Bloqueie as células da linha ou coluna que atingiu o limite máximo de fornecimento ou demanda.
   - Se tanto a linha como a coluna atingirem o máximo, bloqueie apenas uma delas.
   - Essa condição garante que haverá variáveis básicas com valores nulos.
4. O algoritmo finaliza quando todas as células foram alocadas ou bloqueadas. Caso contrário, volte para o Passo 1.

Método Simplex para o problema de transporte

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	12	22	30	100
	2	18	24	32	140
	3	22	15	34	160
Demanda		120	130	150	

Figura 16: Método do canto noroeste

	Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor 1	12 / **100**	22 / **0**	30 / **0**	100
Fornecedor 2	18 / **20**	24 / **120**	32 / **0**	140
Fornecedor 3	22 / **0**	15 / **10**	34 / **150**	160
Demanda	120	130	150	

Figura 17: Resultado final do método do canto noroeste

Subseção 4

Método do Custo Mínimo

Solução Inicial: Método do Custo Mínimo

1. Selecione a célula disponível com menor custo possível.
2. Aloque a maior quantidade possível a essa célula, de forma que a soma das células na mesma linha e na mesma coluna não ultrapasse o limite total.
3. Bloqueie as células correspondentes à linha ou coluna que atingiu o limite máximo.
   - No caso de utilização do limite máximo, tanto na linha como na coluna, bloqueie apenas uma delas
4. O algoritmo finaliza quando todas as células foram alocadas ou bloqueadas. Caso contrário, volte para o Passo 1

Método Simplex para o problema de transporte

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	12	22	30	100
	2	18	24	32	140
	3	22	15	34	160
Demanda		120	130	150	

Figura 18: Método do custo mínimo

Método Simplex para o problema de transporte

Consumidor

Fornecedor	1	2	3	Capacidade
1	12 / **100**	22 / **0**	30 / **0**	100
2	18 / **20**	24 / **0**	32 / **120**	140
3	22 / **0**	15 / **130**	34 / **30**	160
Demanda	120	130	150	

Figura 19: Resultado final do método do custo mínimo

$$\text{Custo} = 12 \cdot 100 + 18 \cdot 20 + 32 \cdot 120 + 15 \cdot 130 + 34 \cdot 30 = 8.370,00$$

Subseção 5

Teste de otimalidade

Método Simplex para o problema de transporte

- Método dos multiplicadores: associa-se a cada linha i e a cada coluna j os multiplicadores u_i e v_j, respectivamente (Figura 12).
- Resolver as equações $u_i + v_j = c_{ij}$, para cada variável básica x_{ij}
  - O modelo contém m + n – 1 equações independentes ⇒ m + n – 1 variáveis básicas. Para resolver o sistema de equações com m + n incógnitas deve-se atribuir, arbitrariamente o valor zero a um dos multiplicadores, por exemplo, $u_1 = 0$.
- A solução atual (problema de minimização) é ótima se, e somente se $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$, para cada variável não básica x_{ij}
- Enquanto existir pelo menos uma variável não básica com custo reduzido positivo, há uma solução básica factível (SBF) adjacente melhor.

Método Simplex para o problema de transporte

	1	2	3	
1	$\boxed{12}$ **100**	$\boxed{22}$ **0**	$\boxed{30}$ **0**	100
2	$\boxed{18}$ **20**	$\boxed{24}$ **120**	$\boxed{32}$ **0**	140
3	$\boxed{22}$ **0**	$\boxed{15}$ **10**	$\boxed{34}$ **150**	160
	120	130	150	

Figura 20: Resultado final do método do canto noroeste

Teste de Otimalidade

Para cada variável básica x_{ij}, descrever a equação $u_i + v_j = c_{ij}$

Método Simplex para o problema de transporte

	1	2	3	
1	12 / **100**	22 / **0**	30 / **0**	100
2	18 / **20**	24 / **120**	32 / **0**	140
3	22 / **0**	15 / **10**	34 / **150**	160
	120	130	150	

Figura 20: Resultado final do método do canto noroeste

Teste de Otimalidade

Para cada variável básica x_{ij}, descrever a equação $u_i + v_j = c_{ij}$

- para x_{11} : $u_1 + v_1 = 12$
- para x_{21} : $u_2 + v_1 = 18$
- para x_{22} : $u_2 + v_2 = 24$
- para x_{32} : $u_3 + v_2 = 15$
- para x_{33} : $u_3 + v_3 = 34$

Fazendo $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_2 = 18$, $u_3 = -3$ e $v_3 = 37$

Método Simplex para o problema de transporte

Teste de otimalidade

Com $u_1 = 0$, $v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_2 = 18$, $u_3 = -3$ e $v_3 = 37$, determinamos os custos reduzidos das variáveis não básicas por meio da fórmula $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

Método Simplex para o problema de transporte

Teste de otimalidade

Com $u_1 = 0$, $v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_2 = 18$, $u_3 = -3$ e $v_3 = 37$, determinamos os custos reduzidos das variáveis não básicas por meio da fórmula $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

- $\overline{c}_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 18 - 22 = -4$
- $\overline{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 37 - 30 = 7$
- $\overline{c}_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 + 37 - 32 = 11$
- $\overline{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -3 + 12 - 22 = -13$
- Como os **custos reduzidos** das **variáveis não básicas** x_{13} e x_{23} são **positivos**, há uma solução básica factível (SBF) adjacente melhor.
  - A variável não básica que vai entrar na base é x_{23}, pois tem o maior custo reduzido.

Método Simplex para o problema de transporte

Determinar uma SBF adjacente melhor

- Construir um ciclo para determinar a variável que sairá da base e para calcular a nova solução básica.
  - Iniciar e finalizar em x_{23};
  - Formado por uma sequência de segmentos horizontais e verticais conectados entre si;
  - Cada esquina deve estar associada a uma variável básica, com exceção da variável x_{23} (Figura 21).

Método Simplex para o problema de transporte

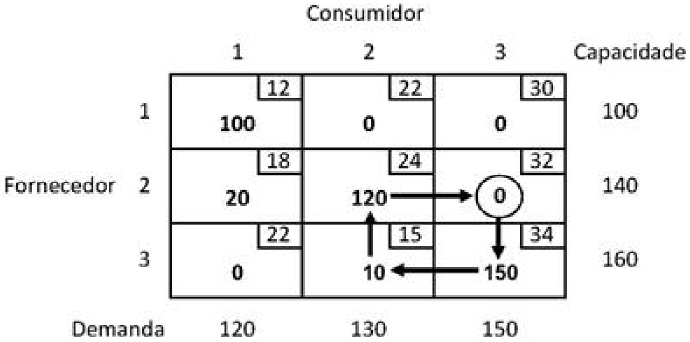

Figura 21: Construção do ciclo fechado na primeira iteração

Método Simplex para o problema de transporte

- Determinar a variável que sairá da base.
  - Dentre as esquinas vizinhas à variável não básica x_{23} (horizontal ou verticalmente), escolhe-se a variável básica que possui o menor valor: x_{22}, $(120 < 150)$. A restrição de capacidade do fornecedor 2 deve ser respeitada.
- Recalcula-se a nova solução básica.
  - Atribui-se o valor de 120 da variável básica de saída x_{22} à nova variável básica x_{23}.
  - A variável x_{22} que sai da base assume o valor zero.
  - Restaurando o balanceamento do ciclo fechado: $x_{22} = 130$ e $x_{33} = 30$ (Figura 22).

		Consumidor 1	Consumidor 2	Consumidor 3	Capacidade
Fornecedor	1	12 **100**	22 **0**	30 **0**	100
	2	18 **20**	24 **0**	32 **120**	140
	3	22 **0**	15 **130**	34 **30**	160
Demanda		120	130	150	

Figura 22: Solução básica adjacente obtida na primeira iteração

Método Simplex para o problema de transporte

Teste de otimalidade

Para cada variável básica x_{ij},
descrever a equação $u_i + v_j = c_{ij}$:

- Para $x_{11} : u_1 + v_1 = 12$
- Para $x_{21} : u_2 + v_1 = 18$
- Para $x_{23} : u_2 + v_3 = 32$
- Para $x_{32} : u_3 + v_2 = 15$
- Para $x_{33} : u_3 + v_3 = 34$
  Fazendo $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 12$,
  $u_2 = 6,\ v_3 = 26,\ u_3 = 8$ e
  $v_2 = 7$.

Teste de otimalidade

Para cada variável básica x_{ij}, descrever a equação $u_i + v_j = c_{ij}$:

- Para x_{11} : $u_1 + v_1 = 12$
- Para x_{21} : $u_2 + v_1 = 18$
- Para x_{23} : $u_2 + v_3 = 32$
- Para x_{32} : $u_3 + v_2 = 15$
- Para x_{33} : $u_3 + v_3 = 34$
  Fazendo $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 12$, $u_2 = 6$, $v_3 = 26$, $u_3 = 8$ e $v_2 = 7$.

Os custos reduzidos das variáveis não básicas:

- $c_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 7 - 22 = -15$
- $c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 26 - 30 = -4$
- $c_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 6 + 7 - 24 = -11$
- $c_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 8 + 12 - 22 = -2$

Método Simplex para o problema de transporte

- Os custos reduzidos de todas as variáveis não básicas são não positivos $\Rightarrow$ a solução atual é ótima.
- Solução básica: $x_{11} = 100$, $x_{21} = 20$, $x_{23} = 120$, $x_{32} = 130$ e $x_{33} = 30$ com $Z = 8.370$.
- Variáveis não básicas: $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{22} = 0$ e $x_{31} = 0$.
- Essa solução é semelhante à solução inicial obtida pelo método do custo mínimo.

Seção 2

O problema da designação

O problema da designação

- Os designados são indicados para a realização de tarefas.
  - Os designados podem ser empregados que precisem receber designações de trabalho.
  - Os designados podem ser máquinas, veículos ou fábricas, ou mesmo períodos a serem destinados a tarefas.
  - Máquinas sendo destinadas a locais: as tarefas envolvem manter uma máquina.
  - Designação de certos produtos a serem produzidos em determinadas fábrica.

O problema da designação

Hipóteses

- O problema da designação deve satisfazer as hipóteses.
  1. O número de designados $n =$ número de tarefas
  2. Cada designado realiza exatamente uma tarefa.
  3. Cada tarefa é realizada exatamente por um designado.
  4. Há um custo para o designado $i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ ao executar a tarefa $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
  5. Objetivo: determinar como todas as n designações que minimizem o custo total.
- É possível reformular um problema que não satisfaça às hipóteses 1 a 3 incluindo designados "fantasmas" ou tarefas "fantasmas".

O problema da designação

Exemplo

- A Job Company adquiriu três novas máquinas de tipos diferentes.
- Há quatro locais disponíveis na oficina em que uma máquina poderia ser instalada.
- O objetivo: destinar as máquinas novas aos locais disponíveis para minimizar o custo total de manipulação de materiais (Figura 23).
- O local 2 não é considerado adequado para a máquina 2.

O problema da designação

■ TABELA 8.24 Dados de custo de manipulação de materiais (US$) para o caso da Job Shop Co.

		Local			
		1	2	3	4
Máquina	1	13	16	12	11
	2	15	—	13	20
	3	5	7	10	6

■ TABELA 8.25 Designado da planilha de custo para o caso do problema Job Shop Co.

		Tarefa (Local)			
		1	2	3	4
Designado (Máquina)	1	13	16	12	11
	2	15	M	13	20
	3	5	7	10	6
	4(D)	0	0	0	0

Exemplo

- O problema tem 3 designados e 4 tarefas.
  - Introduzir uma máquina “fantasma ”para o local extra.
  - Agregar um custo M extremamente grande à destinação da máquina 2 ao local 2 para impedir essa destinação. solução ótima.

- O modelo matemático para o problema da designação usa as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o designado i realiza a tarefa j} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.
Cada x_{ij} é uma variável binária (ela possui valor 0 ou 1).

Modelo matemático

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

e

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

(x_{ij} binário, para todo i e j)

O problema da designação

Modelo para o Problema da Designação

- O primeiro conjunto de restrições funcionais: cada designado deve realizar exatamente uma tarefa;
- Segundo conjunto: cada tarefa é realizada exatamente por um designado.
- Se eliminarmos a restrição que x_{ij} seja binário, o modelo é um tipo especial de problema de programação linear
  - Pode ser tratado como um modelo do problema de transporte;
  - As origens são os designados e os destinos são as tarefas
  - Número de origens m $=$ número de destinos n
  - Toda oferta $s_i = 1$;
  - Toda demanda $d_1 = 1$.

- Na resolução, normalmente formula-se o problema preenchendo uma tabela de custos (como na Figura 23);
  - Identifica-se os designados e tarefas
- Se os designados serão destinados para mais de uma tarefa.
  - Dividi-se cada um desses designados em novos designados separados (porém idênticos)
  - Cada um dos novos designados será indicado exatamente para uma tarefa.
- Se uma tarefa tiver de ser realizada por vários designados:
  - A tarefa será dividida em novas tarefas separadas (porém idênticas);
  - Cada nova tarefa deve ser realizada exatamente por um designado

O problema da designação

Exemplo - Destinando Produtos a Fábricas

- A Cia Produtos Melhores iniciará a produção de **quatro produtos** usando **três fábricas**
- A capacidade produtiva disponível das fábricas pode ser mensurada pelo número de unidades de qualquer produto que possa ser produzido diariamente (Figura 24);
  - A linha inferior fornece a taxa de produção diária necessária para atender a vendas projetadas.
  - Cada fábrica é capaz de produzir qualquer um desses produtos, exceto que a Fábrica 2 não pode fabricar o produto 3.
- Há duas de opções disponíveis:

  Opção 1 Permite a divisão de produtos. Um mesmo produto pode ser fabricado em mais de uma fábrica.

  Opção 2 Impede a divisão de produtos.

TABELA 8.27 Dados para o problema da Cia. Produtos Melhores

		Custo unitário (US$) por produto				Capacidade disponível
		1	2	3	4	
Fábrica	1	41	27	28	24	75
	2	40	29	–	23	75
	3	37	30	27	21	45
Taxa de produção		20	30	30	40	

Figura 24: Dados para o problema da Cia. Produtos Melhores

■ TABELA 8.28 Tabela de parâmetros para a formulação do problema de transporte da opção 1 para o problema da Cia. Produtos Melhores

		Custo por unidade distribuída					
		Destino (produto)					Oferta
		1	2	3	4	5(*D*)	
Origem (Fábrica)	1	41	27	28	24	0	75
	2	40	29	*M*	23	0	75
	3	37	30	27	21	0	45
Demanda		20	30	30	40	75	

Figura 25: Tabela de parâmetros para a formulação do problema de transporte da Opção 1

Opção 1

- A Figura 24 deve convertida para um problema de transporte.
- As fábricas são as origens e os produtos os destinos (ou vice-versa);
- Para adequar ao modelo de transporte:
  - A Fábrica 2 não poder fabricar o produto 3,: atribuir um custo unitário enorme igual a M.
  - A capacidade total $(75 + 75 + 45 = 195)$ excede a produção total $(20 + 30 + 30 + 40 = 120) \Rightarrow$, destino "fantasma"com demanda igual a 75 para equilibrar (Figura 25).
- Solução ótima:
  - $x_{12} = 30$, $x_{13} = 30$, $x_{15} = 15$, $x_{24} = 15$, $x_{25} = 60$, $x_{31} = 20$ e $x_{34} = 25$,
  - Fábrica 1 produz todos os produtos do tipo 2 e 3
  - Fábrica 2 produz 37,5% do produto 4
  - Fábrica 3 produz 62,5% do produto 4 e toda a produção do produto 1
  - O custo total é Z = US$ 3.260 por dia.

Opção 2

- Fabricar os produtos pode ser interpretado como as tarefas para um problema da designação, em que as fábricas são os designados.
- Deve-se destinar pelo menos um dos produtos a cada uma das fábricas.
    - Há mais produtos (quatro) do que fábricas (três);
    - Serão destinados dois produtos a uma das fábricas;
    - A Fábrica 3 tem capacidade em excesso suficiente apenas para produzir um produto (ver Figura (24)),
    - A Fábrica 1 ou a Fábrica 2 devem ficar com o produto extra.

Opção 2

- Para destinar um produto extra no problema de designação:
  - As Fábricas 1 e 2 são divididas em dois designados (Figura 26).
- O número de designados (agora cinco) deve ser igual ao número de tarefas (agora quatro):
  - Incluir uma "tarefa-fantasma"(como 5(D) na Figura 26)
  - Fornece o segundo produto fictício para a Fábrica 1 ou então para a Fábrica 2, seja qual for a que receber apenas um produto real.
- As entradas de custos para a "tarefa-fantasma"são iguais a zero.
- Incluído um custo M na última linha: deve-se destinar à Fábrica 3 um produto real
- M também é usado para impedir a destinação inviável do produto 3 para a Fábrica 2.

TABELA 8.29 Tabela de custos para a formulação do problema da designação da Opção 2 para o problema da Cia. Produtos Melhores

		Tarefa (produto)				
		1	2	3	4	5(*D*)
Origem (Fábrica)	1*a*	820	810	840	960	0
	1*b*	820	810	840	960	0
	2*a*	800	870	*M*	920	0
	2*b*	800	870	*M*	920	0
	3	740	900	810	840	*M*

Figura 26: Tabela de parâmetros para a formulação do problema de designação da Opção 2

Opção 2

- As entradas de custos restantes na Figura (26) não são os custos unitários mostrados nas Figuras (24) e (25);
- O custo c_{ij} é o custo total associado ao designado i realizando a tarefa j:
  - c_{ij} = o custo unitário (por dia) para a Fábrica i produzir o produto j vezes o número de unidades produzidas (por dia);
  - Esses dois parâmetros estão apresentados, separadamente, na Figura (24):
    - Custo da Fábrica 1 produzindo uma unidade do produto 1 = US\$ 41,00
    - Produção (diária) necessária do produto 1 = 20 unidades
    - Custo (diário) total da designação da fábrica 1 para o produto 1 $= 20 * 41 = 820$

Opção 2

- A solução ótima para esse problema de designação é:
  - A Fábrica 1 produz os produtos 2 e 3;
  - A Fábrica 2 produz o produto 1;
  - A Fábrica 3 produz o produto 4.
  - O custo total é $Z = \$3.290$ por dia.

- As alocações são diferentes para as duas soluções;
- Os custos diários totais são semelhantes: US$ 3.260 para a Opção 1 contra US$ 3.290 para a Opção 2
- Há custos ocultos associados à divisão de produto (custo de configuração, distribuição e administração) que não estão incluídos na função objetivo para a Opção 1.
- Nesse caso, após avaliar as desvantagens da divisão de produtos, a gerência decidiu optar pela solução da Opção 2.

Seção 3

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro

- Algoritmo húngaro: especializado para problemas de designação;
- Converter a tabela de custos original em uma série de tabelas de custos equivalentes até que uma solução ótima se tome óbvia.
- Formada somente por elementos positivos ou zero em que todas as designações podem ser colocadas nas posições dos elementos zero.
- Adicionar ou subtrair qualquer constante de todos os elementos de uma linha ou coluna da tabela de custos

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro

- Subtraia o menor número em cada coluna de todos os números daquela linha.
- Se a tabela de custos tiver qualquer coluna sem um elemento zero:
  - Subtrair o menor número em cada uma das colunas de todos os números da coluna.

Exemplo para a Job Shop Co.

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro: Job Shop Co

- Considere a tabela de custos para o problema da Job Shop Co. (Figura 23)
- Objetivo: obter elementos zero localizados de forma suficientemente estratégica para levar a um conjunto completo de designações.
- Redução de linhas: subtrair 11 de cada um dos elementos da linha 1

Algoritmo Especial para o problema da designação

	1	2	3	4
1	2	5	1	0
2	15	M	13	20
3	5	7	10	6
4(D)	0	0	0	0

Figura 27:

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro: Job Shop Co

- Subtrair 13 de cada um dos elementos da linha 2
- Subtrair 5 de cada um dos elementos da linha 3

Algoritmo Especial para o problema da designação

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 1 & \boxed{0} \\
2 & 2 & M & \boxed{0} & 7 \\
3 & \boxed{0} & 2 & 5 & 1 \\
4(D) & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 28:

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro: Job Shop Co

- A tabela (Figura 28)de custos tem todos os elementos zero necessários para um conjunto completo de designações
- Cada um dos quatro quadrados indicam as quatro designações
- Essas quatro designações constituam uma solução ótima.
- O custo total para a solução ótima $Z = 29$
  - É simplesmente a soma dos números que foram subtraídos das linhas 1, 2 e 3.

Cia. Produtos Melhores - Opção 2

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- Formulação do problema de designação da Opção 2 para o caso da Cia. Produtos Melhores (Figura 24).
- A tabela de custos do problema já contêm elementos zero em cada uma das linhas, exceto na última.
  - Subtrair o elemento mínimo em cada coluna de cada uma das entradas naquela coluna.

Algoritmo Especial para o problema da designação

	1	2	3	4	5(D)
1a	80	0	30	120	0
1b	80	0	30	120	0
2a	60	60	M	80	0
2b	60	60	M	80	0
3	0	90	0	0	M

Figura 29:

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- Todas as linhas e colunas possuem pelo menos um elemento zero
- Um conjunto completo de designações com elementos zero não é possível desta vez.
- O número máximo de designações que pode ser feito em posições de elemento zero é apenas 3.

Algoritmo húnguro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- Criar posições adicionais com elementos zero sem criar qualquer elemento negativo.
- Adicionar ou subtrair uma constante de uma combinação de linhas e colunas.
- Traça-se uma série de retas sobre as linhas e colunas de modo a cobrir todos os zeros.
- Use o número mínimo de retas (Figura 30).

	1	2	3	4	5(D)
1a	80	0	30	120	0
1b	80	0	30	120	0
2a	60	60	M	80	0
2b	60	60	M	80	0
3	0	90	0	0	M

Figura 30:

Algoritmo Especial para o problema da designação

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- O elemento mínimo não cruzado é 30 nas duas posições superiores da coluna 3.
- Subtraia 30 de cada um dos elementos descobertos na tabela (Figura 30),
- Adicione o menor valor (30) aos números que se encontram nas interseções de traços.

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	0	0	90	0
1b	50	0	0	90	0
2a	30	60	M	50	0
2b	30	60	M	50	0
3	0	120	0	0	M

Figura 31:

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- As colunas 1 e 4 nessa nova tabela de possui somente um único elemento zero e ambos se encontram na mesma linha (linha 3).
- É possível fazer quatro designações a posições de elementos zero, mas ainda não cinco.
- Repetimos o procedimento anterior, no qual quatro retas (o mesmo número do número máximo de designações) agora são o mínimo necessário para cobrir todos os zeros.

Algoritmo Especial para o problema da designação

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	0	0	90	0
1b	50	0	0	90	0
2a	30	60	M	50	0
2b	30	60	M	50	0
3	0	120	0	0	M

Figura 32:

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- Elemento mínimo não coberto por uma reta é 30
- Subtrair 30 de cada um dos elementos descobertos e adicionamos 30 a cada um dos elementos duplamente cobertos (ignorar os elementos com M)

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	$\boxed{0}$	0	90	30
1b	50	0	$\boxed{0}$	90	30
2a	$\boxed{0}$	30	M	20	0
2b	0	30	M	20	$\boxed{0}$
3	0	120	0	$\boxed{0}$	M

Figura 33:

Algoritmo húngaro: Cia. Produtos Melhores - Opção 2

- Há várias maneiras de se realizar um conjunto completo de designações para posições de elemento zero (várias soluções ótimas), inclusive aquela mostrada pelos cinco quadrados.
- O custo total resultante pode ser localizado na Figura (26): $Z = 810 + 840 + 800 + 0 + 840 = 3.290$

Algoritmo Especial para o problema da designação

Passos do Algoritmo Húngaro

1. Subtraia o menor número em cada linha de cada um dos números da linha. Introduza os resultados em uma nova tabela.
2. Subtraia o menor número em cada coluna da nova tabela de cada um dos números da coluna. Introduza os resultados em outra tabela.
3. Teste se é possível fazer uma designação ótima.Caso contrário, prossiga.
4. Se o número de retas for menor que o número de linhas, modifique a tabela da seguinte maneira:
   a. Subtraia o menor número descoberto de cada um dos números descobertos da tabela.
   b. Adicione o menor número descoberto aos números que se encontram nas interseções de retas.
   c. Números que foram cruzados mas não se encontram nas interseções de retas são transferidos sem alteração para a próxima tabela.

Algoritmo Especial para o problema da designação

Passos do Algoritmo Húngaro

5. Repita os passos 3 e 4 até se tomar possível um conjunto ótimo de designações.
5. Faça as designações uma de cada vez nas posições contendo elementos zero.
   - Comece com linhas ou colunas que tenham apenas um zero.
   - Risque tanto a linha quanto a coluna envolvidas após cada designação ter sido feita.
   - Prossiga nas linhas e colunas que ainda não foram riscadas para selecionar a próxima designação, preferencialmente dada àquela linha ou coluna que contenha apenas um zero que não foi riscado.
   - Continue até todas as linhas e colunas terem exatamente uma designação e, portanto, terem sido cruzadas.