

CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 9 - 9. Modelos de Otimização de Redes

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal
Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

6 de novembro de 2018

1 Modelos de Otimização de Redes

- Exemplo Protótipo
- Terminologia das redes
- O problema do caminho mais curto
- O problema da árvore de expansão mínima
 - Algoritmo
- O problema do fluxo máximo
 - Algoritmo de caminhos aumentados

Seção 1

Modelos de Otimização de Redes

- São tipos especiais de problemas de programação linear.
 - Problema de transporte;
 - Problema de designação;

Tipos de problemas de redes

- Problema do caminho mais curto;
- Problema da árvore de expansão mínima;
- Problema do fluxo máximo;
- Problema do fluxo mínimo;
- Modelo de rede do projeto (maneira mais econômica de se conduzir um projeto de modo que ele possa ser completado dentro do prazo).

Subseção 1

Exemplo Protótipo

Modelos de Otimização de Redes

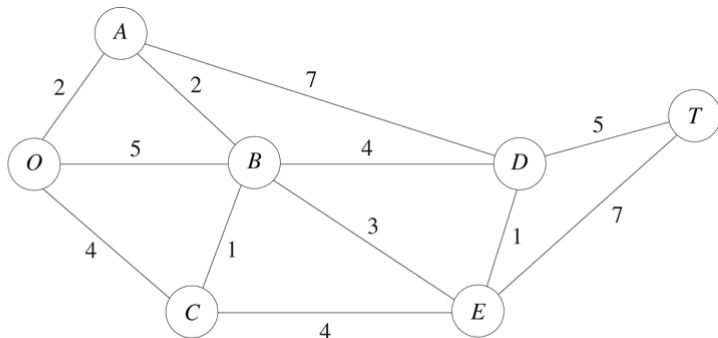
Exemplo Protótipo

- O Servada Park é um parque aberto a visitação e excursões (limitadas);
- Possível trafegar apenas em pequenos carros elétricos e jipes dirigidos pelos guardas florestais (Figura 1);
- O local O é a entrada do parque; outras letras designam os locais de postos de guardas florestais e os números fornecem as distâncias em milhas pelas estradinhas.

Problemas

- Qual é a rota da entrada do parque até o posto T tem a menor distância total para a operação dos carrinhos (problema do caminho mais curto);
- Deseja-se determinar onde instalar linhas telefônicas sob as vias para estabelecer comunicação telefônica entre todos os postos de forma a atender um número total mínimo de milhas (problema da árvore de expansão mínima);
- Quais rotas escolher para as diversas viagens de modo a maximizar o número de viagens que poderiam ser feitas diariamente sem violar os limites de cada uma das estradas (problema do fluxo máximo).

Exemplo Protótipo



■ FIGURA 9.1 O sistema de pequenas estradas para o Seervada Park.

Figura 1: O sistema de pequenas estradas para o Seervada Park

Subseção 2

Terminologia das redes

Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes

- Uma **rede** é formada por um conjunto de pontos e de retas conectando certos pares de pontos.
 - Os pontos são chamados **nós** (ou vértices). A rede da Figura (1) tem sete nós designados por sete círculos.
 - As retas são chamadas **arcos** (ou ligações ou bordas ou ramificações). A rede na Figura (1) tem 12 arcos correspondentes a 12 estradas no sistema viário do parque.
- **Arco direcionado**: o fluxo através de um arco é permitido apenas em uma direção (por exemplo, uma via de mão única).
 - A direção é indicada adicionando-se uma seta na extremidade da reta representando o arco.
 - Nó de partida sempre está antes do nó de destino. Se um arco é direcionado do nó A para o nó B: $A \rightarrow B$ ou AB.
- **Arco não-direcionado** (ou ligação): o fluxo através desse arco é permitido em ambas as direções;

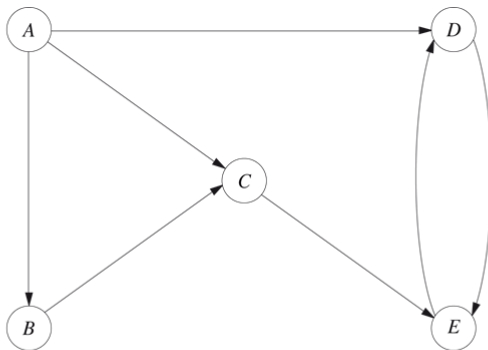
Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes

- **Rede direcionada:** rede que possui apenas arcos direcionados;
- **Rede não-direcionada:** rede que possui apenas arcos não-direcionados;
- **Um caminho** é uma sequência entre dois nós de arcos distintos conectando esses nós.
 - Um caminhos conectando os nós O e T na Figura (1) é a sequência de arcos OB-BD-DT ($O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$), ou vice-versa.
 - Um **caminho direcionado** do nó i para o nó j é uma sequência de arcos conectados cuja direção será no sentido do nó j, de modo que o fluxo do nó i para o nó j ao longo desse caminho seja viável.
 - Um **caminho não-direcionado** do nó i para o nó j é uma sequência de arcos conectados cuja direção (se existir alguma) pode ser tanto no sentido como afastando-se do nó j.

Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes



■ FIGURA 9.2 A rede de distribuição da Cia. de Distribuição Ilimitada, apresentada pela primeira vez na Figura 3.13, ilustra uma rede direcionada.

Figura 2: A rede de distribuição da Cia. de Distribuição Ilimitada

- **Ciclo:** um caminho que começa e termina no mesmo nó.
 - DE-ED é um ciclo direcionado na Figura 2
 - AB-BC-AC não é um ciclo direcionado, uma vez que a direção do arco AC se opõe à direção dos arcos AB e BC.
 - AB-BC-AC é um ciclo não-direcionado, pois $A \rightarrow B \rightarrow A$ é um caminho não-direcionado.
 - DE-ED é um ciclo (direcionado) na Figura (2) porque DE e ED são arcos distintos.
 - Na Figura (1) OB-BO não pode ser qualificado como um ciclo: que OB e BO são dois nomes para o mesmo arco (ligação).

Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes

- Dois nós são ditos **conectados** caso a rede contenha pelo menos um caminho não-direcionado entre eles.
 - O caminho não precisa ser direcionado mesmo se a rede for direcionada.)
- Uma **rede conectada** é uma rede na qual todo par de nós é conectado.
 - As redes nas Figuras (1) e (2) são conectadas;
 - A última rede não seria conectada caso os arcos AD e CE fossem eliminados

Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes

- **Capacidade do arco:** quantidade máxima de fluxo que pode ser transportada em um arco direcionado;
- **Nó de suprimento** (ou nó de origem ou origem) o fluxo saindo do nó excede o fluxo entrando no nó;
- **Nó de demanda** (ou nó escoador ou escoadouro): o fluxo que entra no nó excede o fluxo que sai do nó.
- **Nó de transbordo** (ou nó intermediário): o fluxo que entra seja igual ao fluxo que sai.

Modelos de Otimização de Redes

Terminologia das redes

■ TABELA 9.1 Componentes de redes típicas

Nós	Arcos	Fluxo
Intersecções	Vias	Veículos
Aeroportos	Rotas aéreas	Aeronave
Pontos de comutação	Fios, canais	Mensagens
Estações de bombeamento	Tubulação	Fluidos
Centros de trabalho	Rotas de tratamentos de materiais	Tarefa

Figura 3: Componentes de redes típicas

Subseção 3

O problema do caminho mais curto

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

- **Objetivo:** é encontrar o caminho mais curto (o caminho com a distância total mínima) da origem ao destino.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

Algoritmo para o Problema do Caminho mais Curto

Objetivo da n -ésima iteração: **Encontrar o n -ésimo nó mais próximo da origem** (a ser repetido para $n = 1, 2, \dots$ até o n -ésimo nó mais próximo ser o destino).

Entrada para a n -ésima iteração: $n - 1$ nós mais próximos da origem (resolvido nas iterações anteriores), inclusive sua distância da origem e caminho mais curtos. Esses nós, além da origem, serão chamados nós solucionados; os demais serão os nós não solucionados.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

Algoritmo para o Problema do Caminho mais Curto

Candidatos ao n-ésimo nó mais próximo: Cada **nó solucionado** que é **conectado diretamente** por uma ligação a um ou mais **nós não solucionados** fornece um **candidato** - o nó não solucionado com a ligação de conexão mais curta. Empates fornecem candidatos adicionais.

Cálculo do n-ésimo nó mais próximo: Para cada nó assim solucionado e seu candidato, **acrescente a distância entre eles e a distância do caminho mais curto da origem até esse nó solucionado**. O candidato com a menor distância total é o n-ésimo nó mais próximo (empates fornecem nós solucionados adicionais) e seu caminho mais curto é aquele gerando essa distância.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

Aplicando Este Algoritmo ao Problema do Caminho mais Curto do Seervada Park

- **Objetivo:** encontrar o caminho mais curto da entrada do parque (nó O) até a vista panorâmica (nó T) por meio do sistema viário exposto na Figura (1).

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

■ TABELA 9.2 Aplicação do algoritmo do caminho mais curto ao problema do Seervada Park

n	Nós solucionados diretamente conectados a nós não solucionados	Nó não solucionado com conexão mais próxima	Distância total envolvida	n-ésimo nó mais	Distância mínima	Última conexão
1	O	A	2	A	2	OA
2, 3	O	C	4	C	4	OC
	A	B	$2 + 2 = 4$	B	4	AB
4	A	D	$2 + 7 = 9$	E	7	BE
	B	E	$4 + 3 = 7$			
	C	E	$4 + 4 = 8$			
5	A	D	$2 + 7 = 9$	D	8	BD ED
	B	D	$4 + 4 = 8$			
	E	D	$7 + 1 = 8$			
6	D	T	$8 + 5 = 13$	T	13	DT
	E	T	$7 + 7 = 14$			

Figura 4: Aplicando o algoritmo do caminho mais curto ao problema do Seervada Park

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

- o caminho mais curto do destino até a origem pode ser rastreado pela última coluna da Figura (4) como $T \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$ ou então $T \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$.
- As duas alternativas para o caminho mais curto da origem ao destino foram identificadas como $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ e $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ com uma distância total de 13 milhas em ambos os caminhos.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

- As conexões (ou arcos) podem representar atividades de algum outro tipo:
 - Minimizar a distância total percorrida, como no exemplo do Seervada Park.
 - Minimizar o custo total de uma sequência de atividades. A “distância” das ligações podem ser, por exemplo, os custos das atividades, em cujo caso o objetivo seria determinar qual sequência de atividades minimiza o custo total.
 - Minimizar o tempo total de uma sequência de atividades.
- Se você deseje encontrar o melhor percurso para ir de uma cidade a outra através de uma série de cidades intermediárias. Você terá então a opção de definir o melhor percurso como aquele que minimiza a distância total percorrida ou que minimiza o custo total realizado ou que minimiza o tempo total necessário.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

Exemplo 2

- Você precisa fazer uma viagem de carro para outra cidade que jamais havia estado anteriormente.
- Você está estudando um mapa para determinar a rota mais curta para seu destino.
- Dependendo de qual rota você escolher, há cinco outras cidades (chamemos estas A, B, C, D, E) que talvez você passe durante o caminho.
- O mapa mostra a milhagem ao longo de cada estrada que conecta diretamente duas cidades sem qualquer cidade entre elas.
- Esses números são sintetizados na Figura (5) a seguir, na qual um traço indica que não há nenhuma estrada conectando diretamente essas duas cidades sem passar por alguma outra cidade.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

Cidade	Distâncias em milhas entre cidades vizinhas					
	A	B	C	D	E	Destino
Origem	40	60	50	—	—	—
A		10	—	70	—	—
B			20	55	40	—
C				—	50	—
D					10	60
E						80

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

- 1 Formule esse problema como um problema do caminho mais curto desenhando uma rede em que nós representam cidades, ligações representam estradas e números indicam o comprimento de cada ligação em milhas.
- 2 Use o algoritmo descrito para resolver esse problema do caminho mais curto.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do caminho mais curto

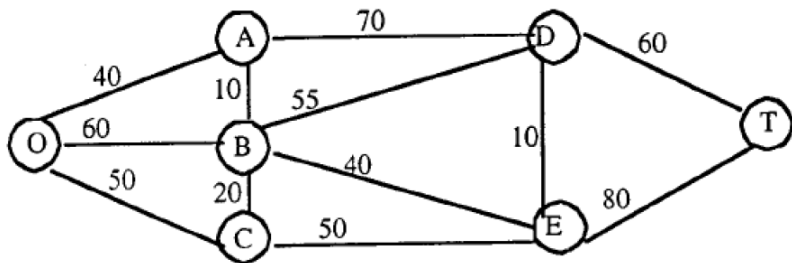


Figura 6: Fluxo de rede para o Exemplo 2

Subseção 4

O problema da árvore de expansão mínima

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

- Uma rede **conectada** e **não-direcionada**, com uma medida do **comprimento** positivo (distância, custo, tempo etc.) associada;
- Escolher um conjunto de ligações que possua o **comprimento total mais curto** entre todos os conjuntos de ligações que satisfaçam determinada propriedade.
- As ligações escolhidas devem fornecer um caminho entre **cada** par de nós.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

Resumo do problema

- 1 São fornecidos os nós de uma rede mas não as ligações. São fornecidos as ligações potenciais e o comprimento positivo para cada uma delas se inseridas na rede. Medidas alternativas para o comprimento de uma ligação são distância, custo e tempo.
- 2 Você deseja desenhar a rede inserindo ligações suficientes para satisfazer à necessidade de que haja um caminho entre cada par de nós.
- 3 O objetivo é satisfazer essa necessidade de maneira a minimizar o comprimento total das ligações inseridas na rede.

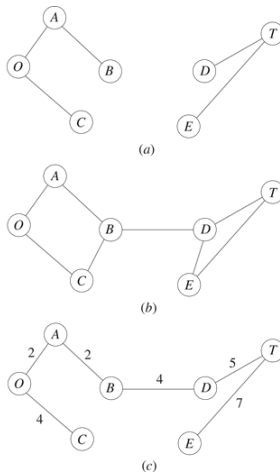
Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

- Uma rede com n nós requer apenas $(n - 1)$ ligações para fornecer um caminho entre cada par de nós.
- As $(n - 1)$ ligações precisam ser escolhidas de maneira que a rede resultante (com apenas as ligações escolhidas) forme uma árvore de expansão
 - Uma árvore de expansão é uma rede conectada de todos os n nós que não contém nenhum ciclo não-direcionado.
 - Cada uma das árvores de expansão tem exatamente $n - 1$ arcos (número mínimo de arcos necessário para ter uma rede conectada e o número máximo possível sem ter ciclos não-direcionados.)

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima



■ FIGURA 9.5 Ilustrações do conceito de árvore de expansão para o problema do Seervada Park:
(a) não é uma árvore de expansão; (b) não é uma árvore de expansão; (c) é uma árvore de expansão.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

- A Figura (7) ilustra o conceito de uma árvore de expansão para o problema do Seervada Park
 - A Figura (7a) **não** é uma árvore de expansão! Os nós O, A, B e C não estão conectados aos nós D, E e T. Essa rede é formada por duas árvores, uma para cada um desses dois conjuntos de nós.
 - A Figura (7b) **não** é uma árvore, porque há dois ciclos (O-A-B-C-O e D-T-E-D). Ele possui ligações demais. Pelo fato de o problema do Seervada Park ter $n = 7$ nós, a rede deve ter exatamente $n - 1 = 6$ ligações, sem nenhum ciclo, para ser qualificada como uma árvore de expansão.
 - A Figura (7c) representa uma árvore de expansão mínima.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

Aplicações

- 1 Projeto de redes de telecomunicações (redes de fibras ópticas, redes telefônicas, redes de TV a cabo etc.).
- 2 Projeto de uma rede de transportes de uso não-intensivo para minimizar o custo total de fornecimento de ligações (ferrovias, estradas etc.).
- 3 Projeto de uma rede de linhas de transmissão elétricas de alta tensão.
- 4 Projeto de uma rede de dutos para conectar uma série de locais.

Algoritmo

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

Algoritmo

- 1 Selecione qualquer **nó arbitrariamente** e depois o conecte ao nó distinto mais próximo.
- 2 Identifique o **nó sem conexão que esteja mais próximo** a um nó conectado e, em seguida, conecte esses dois nós. **Repita** essa etapa até que todos os nós tenham sido conectados.
- 3 Desempate: Os empates para o nó distinto mais próximo (passo 1) ou o nó não conectado mais próximo (passo 2) podem ser desfeitos de forma **arbitrária**. Empates são sinal de que podem existir (mas não necessariamente) **soluções ótimas múltiplas**.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

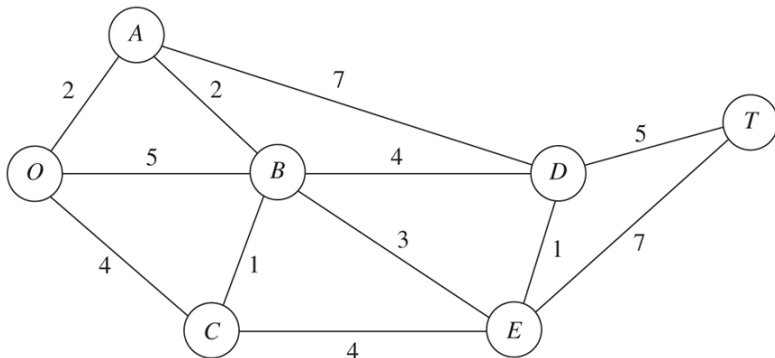


Figura 8: Nós e distâncias para o problema são sintetizados acima, em que as linhas finas representam, no momento, ligações potenciais.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

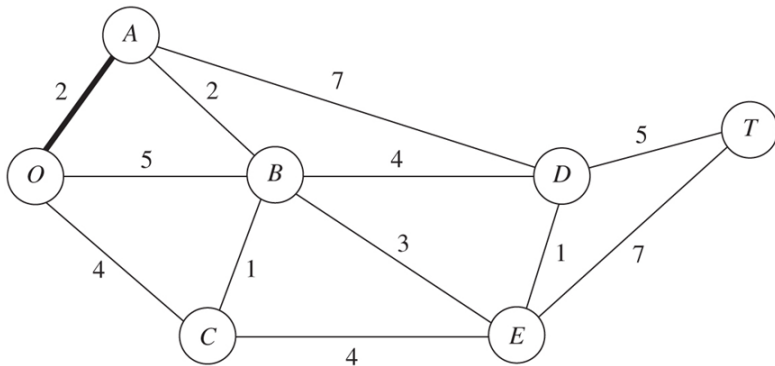


Figura 9: Selecione arbitrariamente o nó O para começar. O nó não conectado mais próximo ao nó O é o nó A. Conecte o nó A ao nó O.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

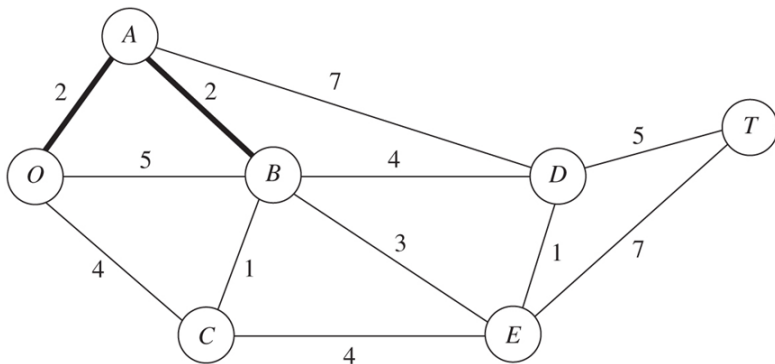


Figura 10: O nó não conectado mais próximo ao nó O ou ao nó A é o nó B (mais próximo de A).

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

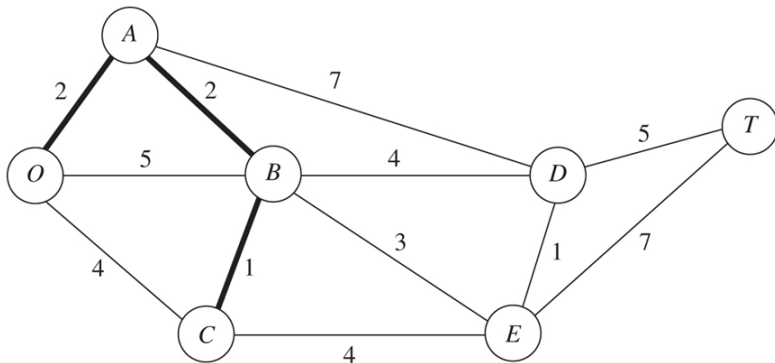


Figura 11: O nó não conectado mais próximo aos nós O, A ou B é o nó C (mais próximo de B). Conecte o nó C ao nó B.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

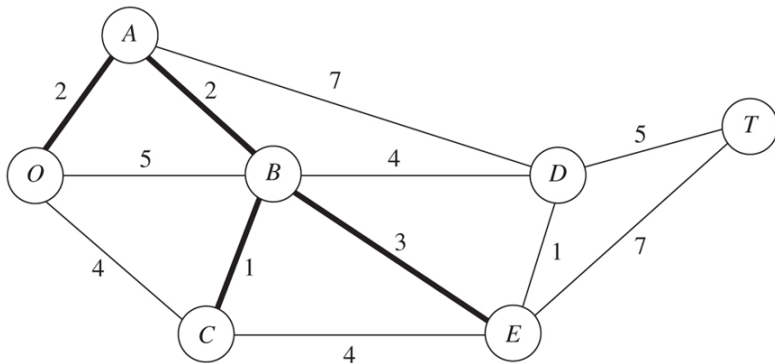


Figura 12: O nó não conectado mais próximo aos nós O, A, B ou C é o nó E (mais próximo de B). Conecte o nó E ao nó B.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

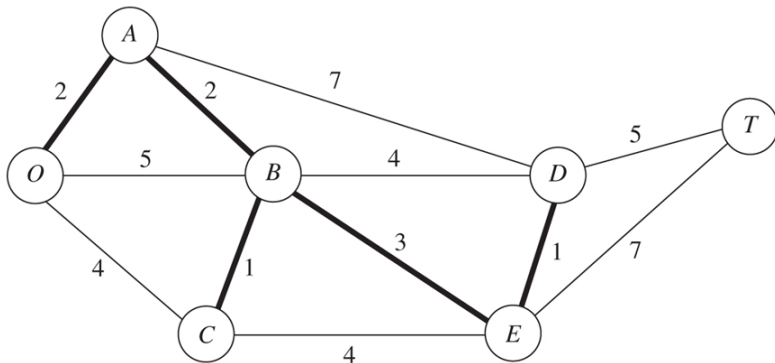


Figura 13: O nó não conectado mais próximo aos nós O, A, B, C ou E é o nó D (mais próximo de E). Conecte o nó D ao nó E.

Modelos de Otimização de Redes

O problema da árvore de expansão mínima

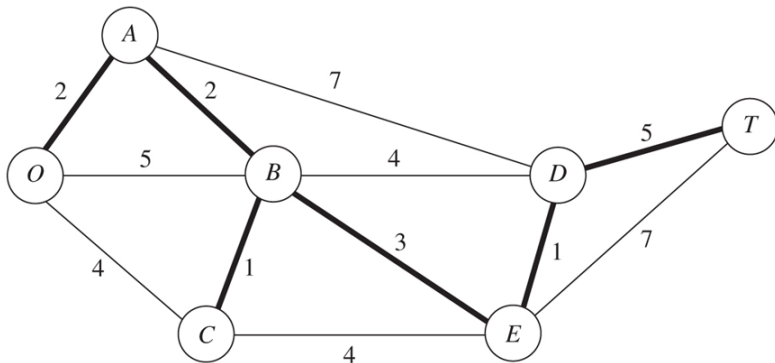


Figura 14: O único nó não conectado remanescente é o nó T. Ele se encontra mais próximo de D. Conecte o nó T ao nó D.

Subseção 5

O problema do fluxo máximo

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Exemplo: Seervada Park

- **Maximizar** o número de viagens diárias
 - Cada veículo retornará pelo mesmo trajeto que ele fez na viagem de ida de modo que a análise se concentrará apenas nas viagens de ida.
- Há **limites máximos** ao número de viagens de carrinhos que podem ser feitas diariamente por questões ecológicas (Figura 15).

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

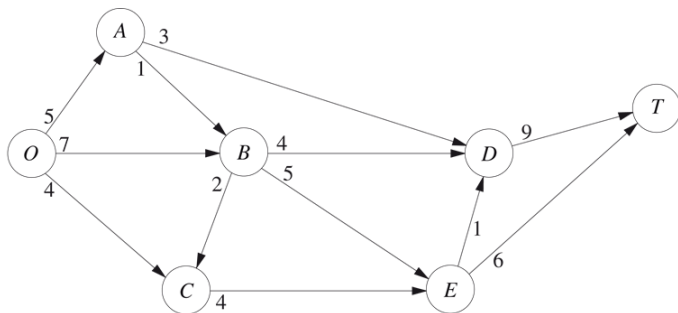


FIGURA 9.6 O problema do fluxo máximo do Seervada Park.

Figura 15: O problema do fluxo máximo no Seervada Park.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Exemplo: Seervada Park

- O número na base da seta na Figura (15) fornece o limite máximo no número de viagens permitidas por dia.
 - Uma solução viável é usar sete veículos por dia, com cinco utilizando a rota $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$, 1 a rota $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ e 1 a rota $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$.
 - Essa solução bloqueia o emprego de qualquer rota começando com $O \rightarrow C$ (pois as capacidades de $E \rightarrow T$ e de $E \rightarrow D$ são plenamente utilizadas), é fácil encontrar soluções viáveis melhores.
- Muitas combinações de rotas precisam ser consideradas para se encontrar aquela(s) que maximiza(m) o número de viagens diárias.
- Esse tipo de problema é chamado problema do fluxo máximo.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

- ❶ Todo o fluxo através de uma rede direcionada e conectada origina-se de um nó, denominado **origem** e termina em outro nó, chamado **escoadouro**.
 - A origem e o escoadouro no problema do Seervada Park são, respectivamente, a entrada do parque no nó O e a vista panorâmica no nó T.
- ❷ Todos os nós restantes são nós de transbordo.
 - No caso do Seervada Park: nós A, B, C, D e E.
- ❸ O fluxo através de um arco é permitido **apenas** na **direção** indicada pela seta, em que a quantidade máxima de fluxo é dada pela capacidade daquele arco.
- ❹ O objetivo é **maximizar** a **quantidade total de fluxo** da origem para o escoadouro.
 - Essa quantidade é medida como a quantidade que **sai da origem** ou a quantidade que **chega ao escoadouro**.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Aplicações

- 1 Maximizar o fluxo através da rede de distribuição de uma empresa partindo de suas fábricas para chegar aos seus clientes.
- 2 Maximizar o fluxo através da rede de suprimento de uma empresa partindo de seus fornecedores para chegar a suas fábricas.
- 3 Maximizar o fluxo de petróleo através de um sistema de tubulações.
- 4 Maximizar o fluxo de água através de um sistema de aquedutos.
- 5 Maximizar o fluxo de veículos através de uma rede de transporte.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Aplicações

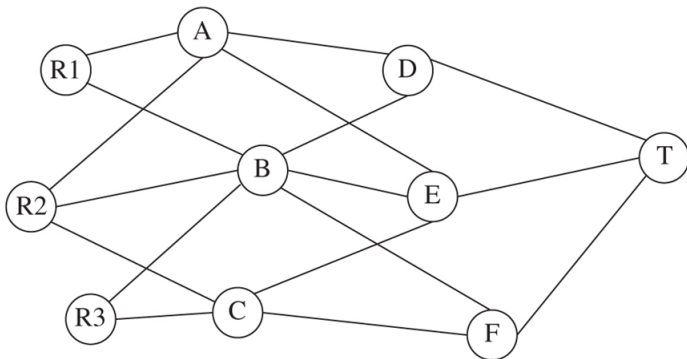
- No problema do fluxo máximo deve-se ter somente uma **única origem** e um **único escoadouro**.
- Em alguns problemas, o fluxo através da rede pode se originar em mais de um nó e também pode terminar em mais de um nó
 - A rede de distribuição de uma empresa tem, comumente, diversas fábricas e vários clientes.
 - Incluir uma origem “fantasma”, um escoadouro “fantasma” e alguns arcos novos.
 - A origem “fantasma” é tratada como um nó do qual se origina todo o fluxo que.
 - Insere-se um novo arco que conduz da origem “fantasma” a esse nó (cada uma das Fábricas), no qual a capacidade desse arco é igual ao fluxo máximo que pode se originar desse nó (Fábrica).
 - O escoadouro simulado é tratado como o nó que absorve todo o fluxo que, de fato, termina em alguns dos demais nós.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Exercício: Origem Fantasma

O diagrama representa um sistema de aquedutos que se origina em três rios (nós R1, R2 e R3) e termina em uma cidade importante (nó T), onde os demais nós são pontos de junção nesse sistema.



Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Exercício: Origem Fantasma

Usando unidades de milhares de pés-acre, as tabelas à esquerda abaixo do diagrama mostram a quantidade máxima de água que pode ser bombeada diariamente por meio de cada aqueduto.

De Para	A	B	C
R1	130	115	—
R2	70	90	110
R3	—	140	120

De Para	D	E	F
A	110	85	—
B	130	95	85
C	—	130	160

De Para	T
D	220
E	330
F	240

Figura 17: Capacidade máxima do sistema de aquedutos.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Exercício: Origem Fantasma

- O gerente da companhia de águas da cidade quer estabelecer um plano de fluxo que vai maximizar o fluxo de água para a cidade.
 - 1 Formule esse problema como um problema do fluxo máximo identificando uma origem, um escoadouro e os nós transbordo e depois desenhe a rede completa que mostra a capacidade de cada arco.
 - 2 Modifique a rede do item (a), conforme necessário, para formular esse problema como um problema do fluxo máximo com uma única origem e/ou destino.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

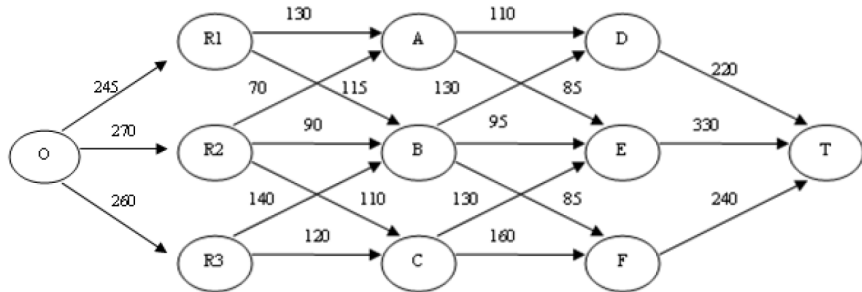


Figura 19: Rede completa e modificada para o problema do fluxo máximo

Algoritmo de caminhos aumentados

Modelos de Otimização de Redes

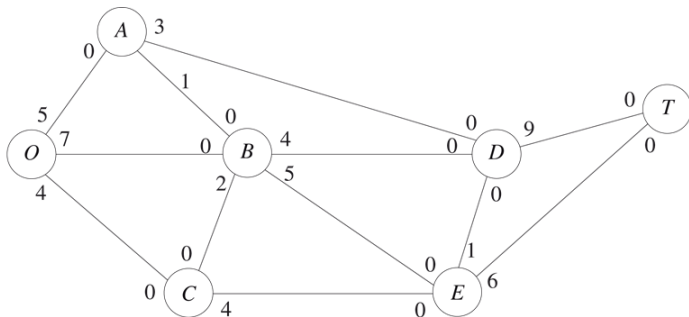
O problema do fluxo máximo

- Após alguns fluxos terem sido designados aos arcos, a **rede residual** mostra as capacidades dos arcos remanescentes (chamadas **capacidades residuais**) para designar fluxos adicionais.
 - O arco $O \rightarrow B$ da Figura (15) possui igual a 7.
 - Suponha agora que os fluxos designados incluam um fluxo igual a 5 através desse arco.
 - Capacidade residual de $7 - 5 = 2$ para qualquer designação de fluxo através de $O \rightarrow B$.
 - O número em um arco próximo a um nó fornece a capacidade residual para o fluxo que vai desse nó para outro.
 - Capacidade residual 2 para o fluxo O para B e o 5 como capacidade residual para designar algum fluxo de B para O



Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo



■ FIGURA 9.7 A rede inicial para o problema do fluxo máximo do Seervada Park.

Figura 20: A rede inicial para o problema do fluxo máximo do Seervada Park

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

- Um **caminho aumentado** é um caminho direcionado da origem para o escoadouro na rede residual de forma que *todo* arco nesse caminho tenha capacidade residual estritamente positiva.
- O **mínimo** dessas capacidades residuais é chamado **capacidade residual do caminho aumentado**.
 - Representa a quantidade de fluxo que pode ser adicionada de maneira viável ao caminho todo.
 - Cada caminho aumentado fornece uma oportunidade de se aumentar ainda mais o fluxo através da rede original.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Algoritmo do Caminho Aumentado para o Problema do Fluxo Máximo

- 1 Identifique um caminho aumentado encontrando algum caminho direcionado da origem para o escoadouro na rede residual tal que cada arco desse caminho tenha capacidade residual estritamente positiva. Se não existir nenhum caminho aumentado, os fluxos de rede já constituem um padrão de fluxo ótimo.
- 2 Identifique a capacidade residual c^* desse caminho aumentado encontrando o mínimo das capacidades residuais dos arcos nesse caminho. Aumente o fluxo nesse caminho de c^* .
- 3 Diminua de c^* a capacidade residual de cada arco nesse caminho aumentado. Aumente de c^* a capacidade residual de cada arco na direção oposta nesse caminho aumentado. Retorne ao passo 1.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

Aplicando Este Algoritmo ao Problema do Fluxo Máximo do Seervada Park

- Começando com a rede residual inicial fornecida na Figura (21):

Iteração 1 Um dos vários caminhos aumentados é $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$, que possui uma capacidade residual de mín $\{7, 5, 6\} = 5$. Designando-se um fluxo igual a 5 a esse caminho, a rede residual resultante está representada na Figura (22):

O problema do fluxo máximo



Figura 21: A rede inicial para o problema do fluxo máximo do Seervada Park

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

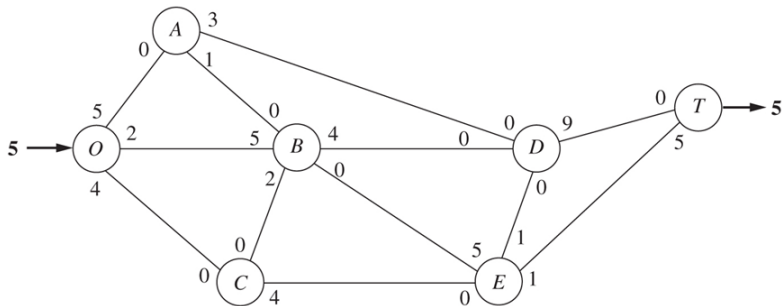


Figura 22: **Iteração 2:** Designe um fluxo igual a 3 ao caminho aumentado $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

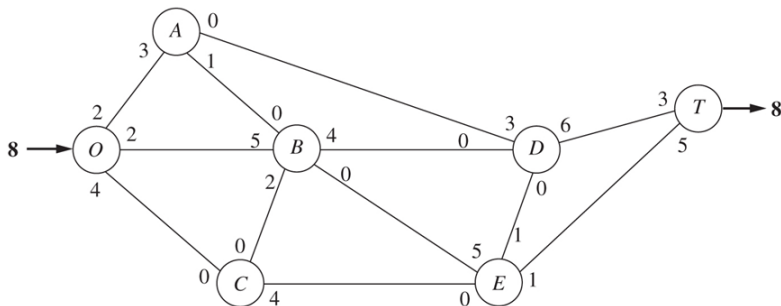


Figura 23: **Iteração 3:** Designe um fluxo igual a 1 ao caminho aumentado $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$. **Iteração 4:** Designe um fluxo igual a 2 ao caminho aumentado $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

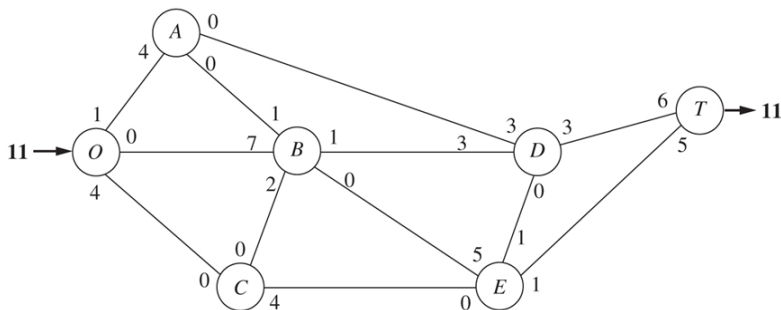


Figura 24: **Iteração 5:** Designe um fluxo igual a 1 ao caminho aumentado $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$. **Iteração 6:** Designe um fluxo igual a 1 ao caminho aumentado $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow A$.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

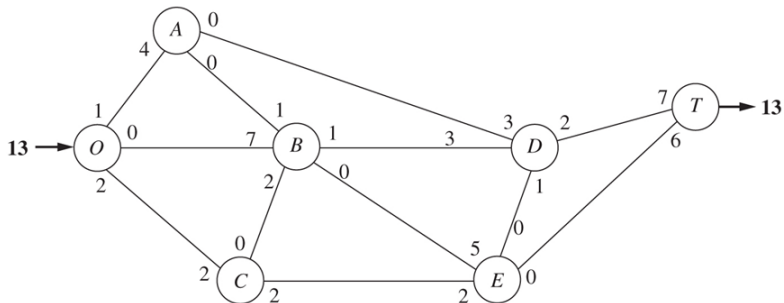


Figura 25: **Iteração 7:** Designe um fluxo igual a 1 ao caminho aumentado $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo

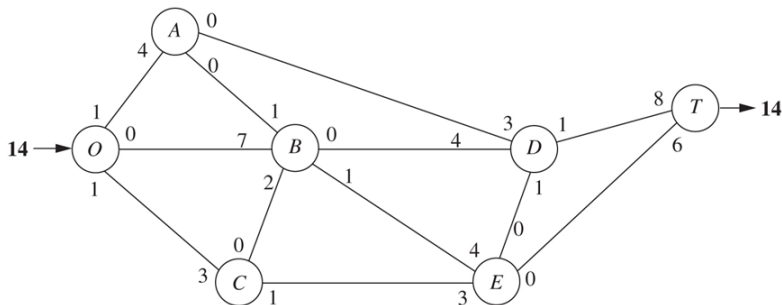
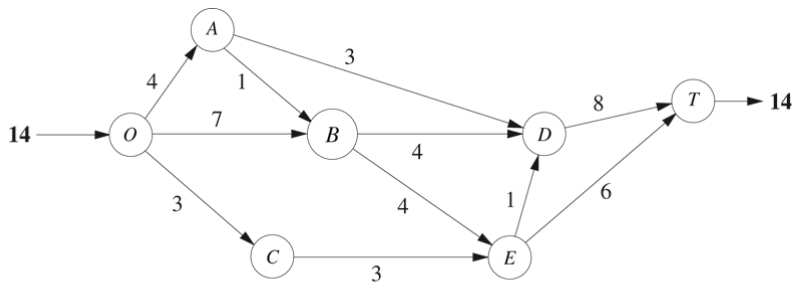


Figura 26: Não há mais nenhum caminho aumentado. O padrão de fluxo atual é ótimo.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo



■ FIGURA 9.8 Solução ótima para o problema do fluxo máximo do Seervada Park.

Figura 27: Solução ótima para o problema do fluxo máximo do Seervada Park.

Modelos de Otimização de Redes

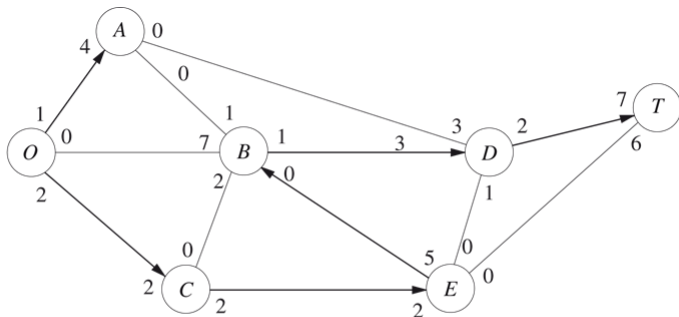
O problema do fluxo máximo

Encontrando um caminho aumentado

- Comece determinando todos os nós que possam ser atingidos a partir da origem ao longo de um arco com capacidade residual estritamente positiva.
- Para cada um desses nós que foram atingidos, determine todos os novos nós (aqueles que ainda não foram alcançados) que podem ser alcançados a partir desse nó ao longo de um arco com capacidade residual estritamente positiva.
- Esse procedimento espalha em todas as direções e **sempre** identificará um caminho aumentado caso ele exista.
- O procedimento é ilustrado na Figura (28) para a rede residual resultante da iteração 6 (Figura 24) no exemplo precedente.

Modelos de Otimização de Redes

O problema do fluxo máximo



■ FIGURA 9.9 Procedimento para encontrar um caminho aumentado para a iteração 7 do problema do fluxo máximo do Seervada Park.

Figura 28: Procedimento para encontrar um caminho aumentado para a [Iteração 7](#) do problema do fluxo máximo do Seervada Park..

Obrigado !