

CEC00121 - Tóp. Esp. em Pesquisa Operacional I

Capítulo 16 - Cadeias de Markov

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelfcampos@id.uff.br

22 de junho de 2019

1 Cadeias de Markov

- Processos Estocásticos
 - Exemplo Envolvendo Clima
 - Exemplo Envolvendo Estoques
- Cadeias de Markov
 - Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov
- Equações de Chapman-Kolmogorov
- Classificação de estados de uma cadeia de Markov
 - Estados recorrentes e estados transientes
 - Periodicidade
- Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov
 - Probabilidades de estado estável
 - Custo médio esperado por unidade de tempo
- Estados Absorventes

Seção 1

Cadeias de Markov

- Modelos probabilísticos para processos que evoluem ao longo do tempo de uma forma probabilística: **processos estocásticos**.
- As cadeias de Markov possuem a propriedade especial de que as probabilidades que envolvem como o processo evolui no futuro **dependem** apenas do estado **atual** do processo e são **independentes** de eventos no **passado**.

Subseção 1

Processos Estocásticos

Processo estocástico

Definido como um conjunto indexado de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, em que o índice t percorre dado conjunto T . Admite-se que T seja o conjunto de inteiros não-negativos e X_t represente uma característica mensurável de interesse no instante t . Por exemplo, X_t poderia representar o nível de estoque de determinado produto no final da semana t .

Processo estocástico em tempo discreto com um espaço de estado finito

- O estado atual do sistema pode cair em qualquer uma das $M + 1$ categorias mutuamente exclusivas denominadas **estados**.
- Esses estados são identificados como $0, 1, \dots, M$.
- A variável aleatória X_t representa o **estado do sistema** no instante t , de modo que seus únicos valores possíveis sejam $0, 1, \dots, M$.
- O sistema é observado em pontos determinados do tempo, identificados por $t = 0, 1, 2, \dots$
- O processo estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots$ fornece uma representação matemática de como o estado do sistema físico evolui ao longo do tempo.

Exemplo Envolvendo Clima

Exemplo Envolvendo o Clima

- O tempo na cidade de Centerville pode mudar rapidamente de um dia para o outro.
- As chances de termos tempo seco (sem chuvas) amanhã são ligeiramente maiores, caso esteja seco hoje do que se chover hoje.
 - A probabilidade de termos tempo seco amanhã é de 0,8, caso hoje esteja seco;
 - A probabilidade de termos tempo seco é de 0,6 amanhã, caso chova.
 - As **probabilidades não mudam** se as informações sobre o tempo *antes de hoje* também forem levadas em consideração.

Exemplo Envolvendo o Clima

- A evolução do tempo em Centerville é um processo estocástico.
- O dia inicial é chamado dia 0;
- O tempo observado em cada dia t , para $t = 0, 1, 2, \dots$ pode ser:
 - Estado 0 = Dia t é seco, ou
 - Estado 1 = Dia t com chuva.
 - Para $t = 0, 1, 2, \dots$ a variável aleatória X_t assume os valores:

$$x_t = \begin{cases} 0 & \text{se o dia } t \text{ estiver seco} \\ 1 & \text{se no dia } t \text{ estiver chovendo} \end{cases}$$

- O processo estocástico $X_t = X_0, X_1, X_2, \dots$ fornece uma representação matemática de como o estado do tempo em Centerville evolui ao longo do tempo.

Exemplo Envolvendo Estoques

Exemplo Envolvendo Estoques

- A loja de câmeras de Dave estoca determinado modelo de câmera que pode ser encomendado semanalmente.
- A demanda é representada por $D_1, D_2, \dots$ (o número de unidades que seriam vendidas, caso o estoque não estivesse esgotado) durante a primeira semana, a segunda semana, $\dots$, respectivamente
- A variável aleatória D_t (para $t = 1, 2, \dots$) é o número de câmeras que seriam vendidas na semana t , caso o estoque não estivesse esgotado.
- Esse número inclui vendas perdidas quando o estoque estiver esgotado.

Exemplo Envolvendo Estoques

- D_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma distribuição de Poisson com média igual a 1.
- X_0 = número de câmeras disponíveis no princípio, X_1 o número de câmeras disponíveis no final da semana 1, X_2 o número de câmeras disponíveis no final da semana 2, e assim por diante,
- A variável aleatória X_t (para $t = 0, 1, 2, \dots$):
 - X_t = número de câmeras disponíveis no final da semana t .
- Ex.: Se $X_0 = 3 \Rightarrow$ a semana 1 começa com três câmeras disponíveis.
- $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ é um processo estocástico no qual a variável aleatória X_t representa o estado do sistema no instante t ,
 - Estado no instante t = número de câmeras disponíveis no final da semana t .

Exemplo Envolvendo Estoques

- O dono da loja gostaria de saber mais sobre como o estado desse processo estocástico evolui ao longo do tempo usando a política de encomenda atual:
 - No final de cada semana t (sábado à noite), a loja faz um pedido que é entregue na abertura da loja na segunda-feira.
 - Se $X_t = 0 \Rightarrow$ encomendar três câmeras.
 - Se $X_t > 0 \Rightarrow$ não encomendar nenhuma câmera.

Exemplo Envolvendo Estoques

- O nível de estoque flutua entre um mínimo de nenhuma câmera e um máximo de três câmeras;
 - Estados possíveis = 0, 1, 2 ou 3 câmeras disponíveis.
- As variáveis aleatórias X_t são dependentes e poderiam ser avaliadas iterativamente por:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t = 0 \\ \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t > 0 \end{cases}$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$

Subseção 2

Cadeias de Markov

Propriedade markoviana

Um processo estocástico $\{X_t\}$ é dito ter a propriedade **markoviana** se $P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$, para $t = 0, 1, \dots$ e toda sequência $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$.

- Ou seja, a probabilidade condicional de qualquer “evento” futuro, dado quaisquer “eventos” passados e o estado presente $X_t = i$, é independente dos eventos passados e depende apenas do estado atual.

Um processo estocástico $\{X_t\}$ ($t = 0, 1, \dots$) é uma cadeia de Markov se possuir a propriedade markoviana.

- As probabilidades condicionais $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$ para uma cadeia de Markov são chamadas **probabilidades de transição** (uma etapa).
- As probabilidades de transição são, para cada i e j , **estacionárias** se $P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\}$, para todo $t = 1, 2, \dots$
- Isso implica a **probabilidade de transição em n etapas** para cada i, j e n ($n = 0, 1, 2, \dots$):
 - $P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\}$, para todo $t = 1, 2, \dots$

- Reescrevemos as probabilidades de transição estacionárias (para simplificar):
 - $p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$
 - $p_{ij}^n = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}$
- A probabilidade de transição em n etapas $p_{ij}^{(n)}$ é a probabilidade condicional de que o sistema estará no estado j após exatamente n etapas dado que ele inicia no estado i a qualquer instante t .
- Como as $p_{ij}^{(n)}$ são probabilidades condicionais:
 - $p_{ij}^{(n)} \geq 0$, para todo i e j , $n = 1, 2, \dots$
 - $\sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} = 1$ para todo i ; $n = 0, 1, 2, \dots$

- Podemos representar todas as probabilidades de transição em n etapas no formato de matriz

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & M \\ \left[\begin{array}{cccc} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \dots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \dots & p_{1M}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & & p_{MM}^{(n)} \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 1:

- A probabilidade de transição em determinada linha e coluna é a transição do estado de linha para o estado de coluna.
- Quando $n = 1$ eliminamos o super escrito n e referimos como a matriz de transição.
- As cadeias de Markov consideradas possuem as propriedades:
 - 1 Um número finito de estados.
 - 2 Probabilidades de transição estacionárias.

Exemplo de Aplicação

- A Merrill Lynch é uma empresa líder em serviços financeiros que fornece serviços de corretagem, investimento e serviços bancários para clientes de varejo e pequenas empresas, enquanto ajuda grandes corporações e instituições em todo o mundo a levantar capital.
- Uma das afiliadas da Merrill Lynch, Merrill Lynch (ML) Bank EUA, possui ativos de mais de 60.000 milhões de dólares obtidos do aceite de depósitos de clientes de varejo da Merrill Lynch que ela usa para financiar empréstimos e fazer investimentos.

Exemplo de aplicação

- Em 2000, o ML Bank USA começou a conceder linhas de crédito rotativo para seus clientes corporativos. Em poucos anos, o banco desenvolveu uma carteira de cerca de 13 bilhões de dólares em compromissos de linhas de crédito com mais de 100 instituições.
- Foi solicitado a um grupo de PO do Merrill Lynch que orientasse a gerência dessa crescente carteira por meio do uso de técnicas de PO para avaliar o risco de liquidez.
- Foi utilizada uma cadeia de Markov que descrevia a evolução da classificação creditícia de cada cliente ao longo do tempo.
- Os estados da cadeia de Markov são as possíveis classificações creditícias que são atribuídas por agências de classificação de risco, como a Standard and Poor's e Moody's

Exemplo de aplicação

- A probabilidade de transição do estado i para o estado j da matriz de transição de uma dada empresa é definida como a probabilidade de que a agência altere a classificação da empresa do estado i para j de um mês para outro baseado nos padrões históricos de empresas similares.
- Essa aplicação da pesquisa operacional (incluindo as cadeias de Markov) permitiu ao ML Bank USA liberar cerca de 4 bilhões de dólares de liquidez para uso de terceiros, bem como expandir suas carteiras de crédito em 60% em menos de dois anos.

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- X_t é o número de câmeras em estoque no final da semana t (antes de se fazer mais pedidos):
 - X_t representa o estado do sistema no instante t (o final da semana t).
- Dado o estado atual $X_t = i$, X_{t+1} depende apenas de D_{t+1} (a demanda na semana $t + 1$) e de X_t ;
- O processo estocástico $\{X_t\}$ ($t = 0, 1, \dots$) possui a propriedade markoviana:
 - X_{t+1} é independente de qualquer histórico passado do sistema de estoques anterior ao instante $t \Rightarrow$ É uma cadeia de Markov.

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- Como obter as probabilidades de transição (a probabilidades do nível de estoque) ou os elementos da matriz de transição (em uma etapa)?

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 3 & p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}$$

Figura 2:

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

Dado que D_{t+1} (demanda por câmeras em $t + 1$) tenha uma distribuição de Poisson^a com média igual a 1

$$P\{D_{t+1} = n\} = \frac{(1)^n e^{-1}}{n!}$$

- $P\{D_{t+1} = 0\} = e^{-1} = 0,368$
- $P\{D_{t+1} = 1\} = e^{-1} = 0,368$
- $P\{D_{t+1} = 2\} = \frac{1}{2}e^{-1} = 0,184$
- $P\{D_{t+1} \geq 3\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 2\} = 1 - (0,368 + 0,368 + 0,184) = 0,080$

^aA distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrerem num certo período de tempo. Assume-se que esses eventos são independentes.

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- Lembrando que:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \text{máx}\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t = 0 \\ \text{máx}\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t > 0 \end{cases}$$

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- Se $X_t = 0 \Rightarrow$ encomendar 3 câmeras $\Rightarrow$ começa a semana com estoque igual a 3.
- Qual a probabilidade de no final da semana X_{t+1} o estoque ser igual a 0 (p_{00}), 1 (p_{01}), 2 (p_{02}) ou 3(p_{03})?
 - $p_{00} \Rightarrow P\{D_{t+1} \geq 3\} = 0,080$
 - $p_{01} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 2\} = 0,184$
 - $p_{02} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 1\} = 0,368$
 - $p_{03} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 0\} = 0,368$

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- Se $X_t > 0 \Rightarrow$ não encomendar $\Rightarrow$ a semana com estoque igual a $X_t \leq X_{t+1}$.
- $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$
- Qual a probabilidade de no final da semana o estoque (X_{t+1}), ser igual a 0, 1, 2 ou 3?
 - $p_{11} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 0\} = 0,080$
 - $p_{10} \Rightarrow P\{D_{t+1} \geq 1\} = 1 - P\{D_{t+1} = 0\} = 0,632$
 - $p_{22} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 0\} = 0,368$
 - $p_{21} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 1\} = 0,368$
 - $p_{20} \Rightarrow P\{D_{t+1} \geq 2\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 1\} = 0,264$
 - $p_{30} \Rightarrow P\{D_{t+1} \geq 3\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 2\} = 0,080$
 - $p_{31} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 2\} = 0,184$
 - $p_{32} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 1\} = 0,368$
 - $p_{33} \Rightarrow P\{D_{t+1} = 0\} = 0,368$

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{array} \right] \end{array}$$

Figura 3: Matriz de transição completa para o exemplo de estoques

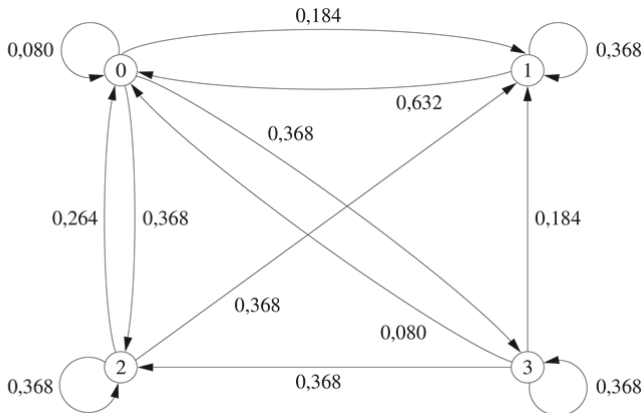
Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov

- As informações dadas pela matriz de transição (Figura 3) podem ser representadas com o **diagrama de transição de estados** (Figura 4)
- Os quatro estados possíveis para o número de câmeras disponíveis no final da semana são representados pelos quatro nós (círculos) no diagrama.
- As setas indicam as possíveis transições de um estado para outro ou, algumas vezes, de um estado retomando a si mesmo, quando a loja de câmeras vai do final de uma semana até o final da semana seguinte.
- O número próximo a cada seta dá a probabilidade de essa transição particular ocorrer em seguida quando a loja de câmeras se encontra no estado na base da seta.

Cadeias de Markov

Formulando o Exemplo Envolvendo Estoques como uma Cadeia de Markov



■ FIGURA 16.2 O diagrama de transição de estados para o exemplo que envolve estoques.

Figura 4: Diagrama de transição de estados

Subseção 3

Equações de Chapman-Kolmogorov

- A matriz de probabilidades de transição em n etapas P^n pode ser obtida calculando-se a n -ésima potência da matriz de transição em uma etapa P :
 - $P^{(n)} = PP^{(n-1)} = P^{(n-1)}P = PP^{n-1} = P^{n-1}P = P^{(n)}$
- Então, $P^{(2)} = PP = P^2$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- Podemos calcular P^2 . Nessa matriz encontraremos a probabilidade do estoque dois períodos à frente ($t+2$): $X_{t+2} = n$ ($n = 0, 1, 2, 3$) se o estoque em t era X_t

Equações de Chapman-Kolmogov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix}.$$

Figura 5:

Equações de Chapman-Kolmogov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- $p_{10}^{(2)} = 0,283$: dado que haja uma câmera no estoque no final de semana, a probabilidade é 0,283 de que não haverá nenhuma câmera no estoque daqui a duas semanas;
- $p_{23}^{(2)} = 0,097$: dado que haja duas câmeras em estoque no final de semana, a probabilidade é de 0,097 de que haverá três câmeras em estoque daqui a duas semanas.

Equações de Chapman-Kolmogorov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- Podemos calcular $P^{(4)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(4)} &= \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^{(2)} \cdot \mathbf{P}^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Figura 6:

Equações de Chapman-Kolmogorov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- Pela Figura (6):
 - $p_{10}^4 = 0,282$: dado que sobre uma câmera em estoque no final da semana, a probabilidade é de 0,282 de que não haverá nenhuma câmera em estoque daqui a quatro semanas;
 - $p_{23} = 0,171$: dado que sobre duas câmeras em estoque no final da semana, a probabilidade é de 0,171 de que haverá três câmeras em estoque daqui a quatro semanas.

Equações de Chapman-Kolmogorov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- A probabilidade de transição para o número de câmeras em estoque daqui a oito semanas contadas a partir de agora pode ser obtida da mesma forma pela matriz de transição em oito etapas $P^{(8)}$:

Equações de Chapman-Kolmogov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

$$\mathbf{P}^{(8)} = \mathbf{P}^8 = \mathbf{P}^{(4)} \cdot \mathbf{P}^{(4)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 7:

Equações de Chapman-Kolmogov

Matrizes de Transição em n Etapas para o Exemplo Envolvendo Estoques

- A matriz $P^{(8)}$ (Figura 7) tem a característica de que suas linhas possuem valores idênticos.
- As probabilidades em qualquer linha são as probabilidades de **estado estável** para essa cadeia de Markov.
 - As probabilidades de o estado do sistema, após um tempo suficiente ter decorrido, se **estabilizam** e o **estado inicial não é mais relevante**.
- **Nem** toda cadeia de Markov convergirá para um estado estável
 - Dependerá das características de seus estados e da matriz de transição.

Subseção 4

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estado acessível

- O estado j é dito **acessível** a partir do estado i se $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$
 - É possível para o sistema eventualmente entrar no estado j quando ele começa no estado i .
- No exemplo dos estoques, $p_{ij} > 0 \quad \forall \quad i, j \Rightarrow$ todos os estados são acessíveis de qualquer outro estado.
- Uma *condição suficiente* para todos os estados serem acessíveis é que existe um valor de n para todo $p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall \quad i, j$.

Estados

- Se o estado j for acessível a partir do estado i e o estado i for acessível do estado j , então se diz que os estados i e j se **comunicam**.
 - 1 Qualquer estado se comunica consigo mesmo (porque $p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i | 1X_0 = i\} = 1$).
 - 2 Se o estado i se comunica com o estado j , então o estado j se comunica com o estado i .
 - 3 Se o estado i se comunica com o estado j e o estado j se comunica com o estado k , então o estado i se comunica com o estado k .

Classes

- Os estados podem ser subdivididos em uma ou mais **classes** distintas.
 - Aqueles estados que se comunicam entre si se encontram na mesma classe.
 - Uma classe pode ser formada por um único estado.
 - Se existir **apenas uma classe**, isto é, todos os estados se comunicarem, a cadeia de Markov é dita **irredutível**.
 - No exemplo dos estoques, a cadeia de Markov é irredutível.

Estados recorrentes e estados transientes

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estados recorrentes e estados transientes

Estado transiente

Um estado é dito estado **transiente** se, após entrar nesse estado, existe a possibilidade de o processo jamais retomar a esse estado novamente. Portanto, o estado i é transiente se e somente se existir um estado j ($j \neq i$) que seja acessível do estado i , mas não o contrário, isto é, o estado i não é acessível a partir do estado j .

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estados recorrentes e estados transientes

Estado recorrente

Um estado é dito ser um estado **recorrente** se, após adentrar aquele estado, o processo com certeza for retomar a esse estado novamente (ver Figura 4). Portanto, um estado é recorrente se e somente se ele não for transiente

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estados recorrentes e estados transientes

Estado absorvente

Diz-se que um estado é absorvente caso, após adentrar esse estado, o processo jamais deixará esse estado novamente. Portanto, o estado i é um estado absorvente se e somente se $p_{ii} = 1$.

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estados recorrentes e estados transientes

Exemplo

Suponha uma cadeia de Markov tenha a seguinte matriz de transição (Figura 8). Classifique os estados.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$$

Figura 8:

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Estados recorrentes e estados transientes

Exemplo

Estado 0 e 1 : recorrentes. Se o processo iniciar em qualquer um desses estados, ele jamais deixará esses dois estados;

Estado 2 : absorvente (e, portanto, recorrente). Se o processo entrar no estado 2 (linha 3) ele jamais o deixará.

Estado 3 : transiente. Se o processo se encontrar no estado 3 há uma probabilidade real de que ele jamais vá retornar.

Estado 4 : transiente. Se o processo iniciar no estado 4 ele sai imediatamente e jamais conseguirá retornar.

Periodicidade

Classificação de estados de uma cadeia de Markov

Periodicidade

Período

O **período** do estado i é definido como o inteiro t ($t > 1$) tal que $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todos os valores de n diferentes de $t, 2t, 3t, \dots$ e t é o maior inteiro com essa propriedade.

- Se o estado i em uma classe tiver período t , **todos** os estados nessa classe terão período t .

Aperiódico

Se houver dois números consecutivos s e $s + 1$ tais que o processo possa se encontrar no estado i nos instantes s e $s + 1$, um estado é dito como tendo período 1 e é denominado estado **aperiódico**.

Subseção 5

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

- No exemplo dos estoques notamos que se n for suficientemente grande ($n = 8$), todas as linhas da matriz têm valores idênticos
 - A probabilidade de o sistema se encontrar em cada estado j não dependa mais do estado inicial do sistema.
- Existe uma probabilidade limitada de que o sistema se encontrará em cada estado j após um grande número de transições e essa probabilidade é **independente** do estado inicial.

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Para qualquer cadeia de Markov ergódica^a irreduzível^b, o $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe e é independente de i e $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$, em que os π_j satisfazem única e exclusivamente as **equações de estado estável**:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij} \quad \forall \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

^aOs estados recorrentes que forem aperiódicos são denominados estados ergódicos

^bUma cadeia de Markov é dita irreduzível se existir apenas uma classe, isto é, todos os estados se comunicam.

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

- O termo probabilidade de estado estável significa que a probabilidade de encontrar o processo em certo estado j após um grande número de transições, tende a ser o valor π_j , independente da distribuição probabilística do estado inicial.
- É importante notar que a probabilidade de estado estável **não implica** que o processo se acomode em determinado estado.
 - O processo continua a realizar transições de estado em estado e, a qualquer etapa n , a probabilidade de transição do estado i para o estado j ainda será p_{ij} .

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Aplicação para o Exemplo do clima

- O exemplo do clima possui apenas dois estados (seco e com chuva), de modo que as equações de estado estável ficam:

$$\pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10}$$

$$\pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11}$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

- Tomando os valores para o problema na forma de uma matriz de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} \text{Estado} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \text{Estado} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 9:

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

- As equações de estado estável ficam:

$$\pi_0 = 0,8\pi_0 + 0,6\pi_1, \Rightarrow 0,2\pi_0 = 0,6\pi_1$$

$$\pi_1 = 0,2\pi_0 + 0,4\pi_1, \Rightarrow 0,6\pi_1 = 0,2\pi_0$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

- Note que as duas primeiras equações são redundantes e reduzem-se a $\pi_0 = 3\pi_1$.
- Combinando esse resultado com a terceira equação:

$$\pi_0 = 0,25, \quad \pi_1 = 0,75$$

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Aplicação ao exemplo dos estoques

- As equações de estado estável podem ser expressas como:

$$\pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30}$$

$$\pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31}$$

$$\pi_2 = \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32}$$

$$\pi_3 = \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33}$$

$$\pi_0 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Aplicação ao exemplo dos estoques

- Substituindo os valores para p_{ij} (ver Figura 3) nessas equações:

$$\pi_0 = 0,080\pi_0 + 0,632\pi_1 + 0,264\pi_2 + 0,080\pi_3$$

$$\pi_1 = 0,184\pi_0 + 0,368\pi_1 + 0,368\pi_2 + 0,184\pi_3$$

$$\pi_2 = 0,368\pi_0 + 0,368\pi_2 + 0,368\pi_3$$

$$\pi_3 = 0,368\pi_0 + 0,368\pi_3$$

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Probabilidades de estado estável

Aplicação ao exemplo dos estoques:

- Resolvendo simultaneamente:

$$\pi_0 = 0,286, \quad \pi_1 = 0,285, \quad \pi_2 = 0,263, \quad \pi_3 = 0,166$$

- Esse é essencialmente o resultado encontrado para $P^{(8)}$ (ver Figura 7)
- Após várias semanas a probabilidade de encontrar nenhuma, uma, duas e três câmeras em estoque tende a 0,286, 0,285, 0,263 e 0,166, respectivamente.

Custo médio esperado por unidade de tempo

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Custo médio esperado por unidade de tempo

- Suponha que um custo (ou outra função de penalidade) $C(X_t)$ seja imposta quando o processo se encontrar no estado X_t no instante t , para $t = 0, 1, 2, \dots$, em que $C(X_t)$ é uma variável aleatória que assume qualquer um dos valores $C(0), C(1), \dots, C(M)$ e que a função $C(\cdot)$ é independente de t .
- O custo médio esperado por unidade de tempo é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right] = \sum_{j=0}^M \pi_j C(j)$$

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Custo médio esperado por unidade de tempo

Aplicação ao Exemplo dos Estoques

- Considere o exemplo dos estoques em que a solução para π_j foi calculado anteriormente.
- Suponha que a loja de câmeras aloque despesas de armazenagem para cada câmera que permaneça na prateleira no final da semana:

$$C(x_t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_t = 0 \\ 2 & \text{se } x_t = 1 \\ 8 & \text{se } x_t = 2 \\ 19 & \text{se } x_t = 3 \end{cases}$$

Propriedades a longo prazo das cadeias de Markov

Custo médio esperado por unidade de tempo

Aplicação ao Exemplo dos Estoques

- O custo de armazenagem duradouro esperado por semana pode ser então obtido:

$$\sum_{j=0}^M \pi_j C(j) = 0,286(0) + 0,285(2) + 0,263(8) + 0,166(18) = 5,662$$

Subseção 6

Estados Absorventes

Estados Absorventes

- Um estado k é denominado estado **absorvente** se $P_{kk} = 1$,
 - Assim que a cadeia visitar k ela permaneça ali para sempre.
- Se k for um estado absorvente e o processo iniciar no estado i , a probabilidade de alguma vez ir para o estado k é conhecida como probabilidade de absorção/assimilação no estado k , dado que o sistema partiu do estado i e representada por f_{ik} .
- As probabilidades de absorção podem ser obtidas solucionando um sistema de equações lineares que considere todas as possibilidades para a primeira transição e, então, dada a primeira transição, considere a probabilidade condicional de absorção pelo estado k .

Estados Absorventes

- Se o estado k for um estado absorvente, então o conjunto de probabilidades de absorção f_{ik} satisfaz o sistema de equações:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^M p_{ij} f_{jk}, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, M,$$

sujeito às condições:

$f_{kk} = 1$, $f_{ik} = 0$, se o estado i for recorrente e $i \neq k$

Exemplo de Avaliação de Crédito

- Considere uma loja de departamentos que classifique o saldo da conta de um cliente como totalmente pago (estado 0), com 1 a 30 dias em atraso (estado 1), com 31 a 60 dias em atraso (estado 2) ou dívida incobrável (insolvente) (estado 3).
- As contas são verificadas mensalmente para determinar o estado de cada cliente.

Exemplo de Avaliação de Crédito

- Se os clientes pagam apenas parte de suas contas e o saldo devedor estiver em atraso dentro de um período de 30 dias (**estado 1**), a loja interpreta o cliente como permanecendo no estado 1.
- Caso o saldo se encontra entre 31 e 60 dias em atraso, a loja interpreta o cliente como passando para o **estado 2**.
- Clientes que estão com mais de 60 dias em atraso são colocados na categoria dívida incobrável (**estado 3**) e, depois, as contas são enviadas para uma agência de cobrança.
- Após examinar dados ao longo dos últimos anos em uma progressão mês a mês de clientes individuais de estado para estado, a loja criou a matriz de transição apresentada na Figura (10)

Estados Absorventes

Estado	0: Dívida totalmente paga	1: 1 A 30 dias em atraso	2: 31 a 60 dias em atraso	3: Dívida Incobrável
0: dívida totalmente paga	1	0	0	0
1: 1 a 30 dias em atraso	0,7	0,2	0,1	0
2: 31 a 60 dias em atraso	0,5	0,1	0,2	0,2
3: dívida incobrável	0	0	0	1

Figura 10: Matriz de transição dos clientes por estado

Exemplo de Avaliação de Crédito

- Cada cliente acaba terminando no estado 0 ou 3
- A loja está interessada em determinar a probabilidade de que um cliente acabe se tomando insolvente (uma dívida incobrável) dado que:
 - A conta pertence ao estado de 1 a 30 dias em atraso ;
 - A conta pertence ao estado 31 a 60 dias em atraso.
- Temos então as equações:

$$f_{13} = p_{10}f_{03} + p_{11}f_{13} + p_{12}f_{23} + p_{13}f_{33}$$

$$f_{23} = p_{20}f_{03} + p_{21}f_{13} + p_{22}f_{23} + p_{23}f_{33}$$

Exemplo de Avaliação de Crédito

- Como $f_{03} = 0$ e $f_{33} = 1$:
$$(1 - p_{11})f_{13} = p_{13} + p_{12}f_{23}$$
$$(1 - p_{22})f_{23} = p_{23} + p_{21}f_{13}$$
- Substituindo os valores da matriz de transição: $0,8f_{13} = 0,1f_{23}$
 $0,8f_{23} = 0,2 + 0,1f_{13}$
- e a solução é
 $f_{13} = 0,032$ e $f_{23} = 0,254$
- Aproximadamente 3% dos clientes cujas contas se encontram entre 1 e 30 dias de atraso acabam se tornando insolventes (dívidas incobráveis), ao passo que 25% dos clientes cujas contas se encontram com 31 a 60 dias de atraso acabam se tornando insolventes (dívidas incobráveis).