CEC0003 - Matemática para Economia

Cálculo com várias variáveis

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

27 de junho de 2020

Tópicos

1. Função com várias variávies
   - O espaço R^3
   - Domínio, imagem e função
   - Representação gráfica de uma função com duas variáveis
   - Aplicação à Economia

Section 1

Função com várias variávies

Subsection 1

O espaço R^3

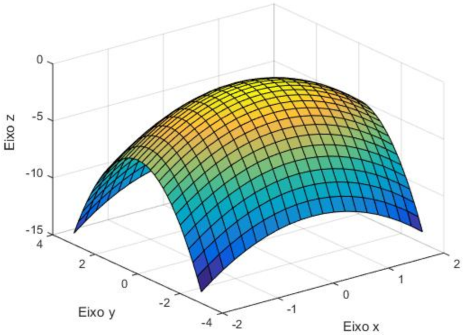

Figura 1: Gráfico da função $z = -x^2 - y^2 - 1$;

- O R^3 é o conjunto de ternas ordenadas (x, y, z) de números reais;

eixo x	eixo das abscissas;
eixo y	eixo das ordenadas;
eixo z	eixos das cotas;
plano xy	plano que contém os eixos x e y;
plano xz	plano que contém os eixos x e z;
plano yz	plano que contém os eixos y e z;

- Na vida real encontramos quantidades que dependem de duas ou mais variáveis.

Exemplo

- Uma companhia que produz três produtos x, y e z calculou que eles geram um lucro de R$3,00, R$ 4,00 e R$5,00 por unidade, respectivamente. O lucro total da empresa será dado pela função:

$$P(x, y, z) = 3x + 4y + 5z \tag{1}$$

Exemplo

- Suponha que desejamos calcular o retorno (R_t) de uma ação. Para isso considere o dividendo Div_t e o preço da ação no momento atual (t) e no momento da compra anterior $(t-1)$:

$$R_t = \frac{Div_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2}$$

Subsection 2

Domínio, imagem e função

Definição

Uma função real $z = f(x, y)$ de duas variáveis f consiste em:

1. Um conjunto A de pares ordenados de números reais (x, y), chamado <u>domínio</u> da função, que compreende todos os valores de A;
2. O conjunto de todos os números possíveis de z, chamado de imagem;
3. Uma regra que associa a cada par ordenado no domínio de f um único número real, denotado por $z = f(x, y)$.

Exemplo

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemplo

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **Solução**: $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $g(v, w) = \frac{2}{v - w}$

Exemplo

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **Solução**: $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $g(v, w) = \frac{2}{v-w}$ **Solução**: $Dom(g) = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | v \neq w\}$
3. $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Exemplo

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ **Solução**: $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $g(v,w) = \frac{2}{v-w}$ **Solução**: $Dom(g) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^2 | v \neq w\}$
3. $h(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ **Solução**: $Dom(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

Subsection 3

Representação gráfica de uma função com duas variáveis

- O gráfico de uma função com 2 variáveis independentes e uma variável dependente, totaliza 3 variáveis
- Podemos simplificar a visualização do gráfico por meio de curvas de nível.
- As curvas de nível de uma função $f(x, y)$ são as curvas obtidas da equação $f(x, y) = k$, em que "k "é uma constante do conjunto imagem de f e é uma representação gráfica de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f igual a "k ".

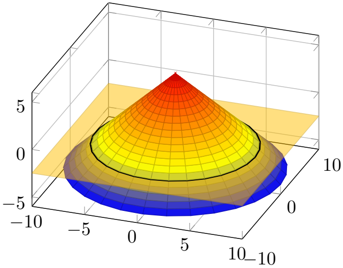

Figura 2: Gráfico para uma função e cortes em $z = f(x, y) = k$

Agora é sua vez!

- Acesse o url `https://www.geogebra.org/m/jy7znQM5`
- Digite uma função com duas variáveis independentes em "c: "
- Troque o valor "k "

Exemplo

- Esboce o mapa de contorno da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemplo

- Esboce o mapa de contorno da função $f(x, y) = x^2 + y^2$
  Solução: As curvas de nível são os gráficos da equação $x^2 + y^2 = k$ para valores não negativo de k tomando $k = 0, 1, 4, 9$ e 16.

Exemplo

- Esboce o mapa de contorno da função $f(x, y) = x^2 + y^2$
  Solução: As curvas de nível são os gráficos da equação $x^2 + y^2 = k$ para valores não negativo de k tomando $k = 0, 1, 4, 9$ e 16. $k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$
  $k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
  $k = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
  $k = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$
  $k = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$
  As equações acima representem círculos concêntricos com centro na origem e raio dado por $r = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ e 4.

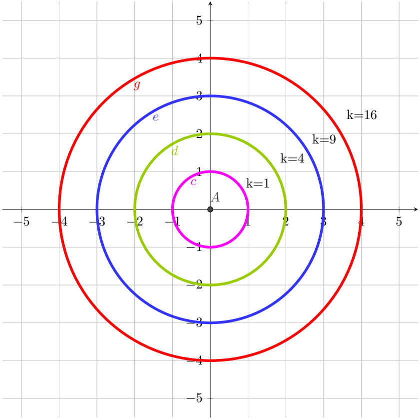

Figura 3: Curvas de nível para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$

Subsection 4

Aplicação à Economia

- Economistas utilizam conjuntos de curvas de nível para estudas duas funções fundamentais da microeconomia: as funções de produção e as funções de utilidade.

Exemplo

- Considere a função de produção Cobb-Douglas. Sendo $q = x \cdot y$, em que x e y medem as quantidades de dois insumos, capital e trabalho, respectivamente, e q a quantidade produzida utilizando-se x unidades de capital e y unidades de trabalho.
- A curva de nível de funções de produção é denominada isoquanta.
- A isoquanta para $q = 5$ passa por todos os vetores de insumo (x, y) que produzem 5 unidades de produto.
- Reescrevendo a função para $y \Rightarrow xy = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{x}$

Exemplo

- Acesse `https://www.geogebra.org/calculator` e construa uma mapa de contorno para $q = 5, 1, 6, 9$
- As assintotas do primeiro e terceiro quadrantes podem ser interpretadas como isoquantas?

Exemplo

- Acesse `https://www.geogebra.org/3d`;
- Utilize a função $z = 10x + 10y - x^2 - y^2$;
- Acrescente uma outra função $z = 5$;