CEC0003 - Matemática para Economia

Limites e continuidade de funções de várias variáveis

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

1 de julho de 2020

Tópicos

Section 1

Limites de funções com várias variávies

- Compare o comportamento das funções:

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{e} \qquad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \tag{1}$$

quando x e y se aproximam de 0, ou seja, $(x,y) \to (0,0)$

Valores para $g(x, y)$

x/y	**-1**	**-0,2**	**0**	**0,2**	**1**
-1	0	0,923	1	0,923	1
-0,2	-0,923	0	1	0	-0,923
0	-1	-1		-1	-1
0,2	-0,923	0	1	0	-0,923
1	0	0,923	1	0,923	0

Tabela 1: Valores para $g(x, y)$

- Acesse `https://www.geogebra.org/m/t3tydmfd`;
- Edite o campo $f(x, y)$ pela respectiva função;

reta azul : eixo z;
reta vermelha : eixo y;
reta verde : eixo x
λ : distância de x_0 em relação à origem;
β : distância de y_0 em relação à origem;

$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

- Veja que à medida que x aproxima-se da origem ($x \to 0$), o valor de $z = g(x, y)$ se aproxima de -1;
- Veja que à medida que y aproxima-se da origem ($y \to 0$), o valor de $z = g(x, y)$ se aproxima de 1;
- Assim, o valor de $g(x, y)$ não se aproxima de nenhum valor à medida que $(x, y) \to (0, 0)$

Valores para $f(x, y)$

x/y	**-1**	**-0,2**	**0**	**0,2**	**1**
-1	0,455	0,829	0,841	0,829	0,455
-0,2	0,829	0,999	1	0,999	0,829
0	0,841	1		1	0,841
0,2	0,824	0,999	1	0,999	0,824
1	0,455	0,829	0,841	0,829	0,455

Tabela 2: Valores para $f(x, y)$

Complete para $f(x, y) = \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

- Veja que à medida que x aproxima-se da origem ($x \to 0$), o valor de $z = g(x, y)$ se aproxima de ___;
- Veja que à medida que y aproxima-se da origem ($x \to 0$), o valor de $z = g(x, y)$ se aproxima de ___;
- Assim, o valor de $g(x, y)$ _________________________ à medida que $(x, y) \to (0, 0)$

Definição

- Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio $\mathbb{D}$ contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L e escrevemos como

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \tag{2}$$

  se para todo $\epsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \in \mathbb{D}$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ e então $|f(x, y) - L| < \epsilon$.
- Ou seja, a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) e (a, b) suficientemente pequena (mas não nula).

- Acesse `https://www.geogebra.org/m/t3tydmfd`
- Substitua a equação em f(x,y) pelas equações das Tabelas 1 e 2
- Veja como o valor da função se comporta na proximidade do ponto (0,0)

Definição

Se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor limite independente do modo de como (x, y) se aproxima de (a, b).
Assim, se:

- $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e;
- $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2 e ;
- $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

Exemplo

- Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Exemplo

- Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.
- Considere $(0,0)$ ao longo do eixo x. Então, $y = 0$ e a função $f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ para todo $x \neq 0$ e $f(x,y) \to 1$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo x.
- Para um deslocamento ao longo do eixo y, então $x = 0$. Sendo $f(0,y) = \frac{-y}{y} = -1$ para todo $y \neq 0$ e $f(x,y) \to -1$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo $y \Rightarrow$
- $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Subsection 1

Continuidade

Definição

- Uma função f de duas variáveis é dita como contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b) \tag{3}$$

- Se o ponto (x, y) varia por uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará por uma pequena quantidade.
- Pelas propriedades de limites, a soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuas em seus domínios.
- Uma função polinomial e uma função racional são contínuas em seu domínio.

Exemplo

- Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$

Exemplo

- Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$
- Como $x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, então, podemos calcular seu limite por substituição direta.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Exemplo

- Determine se a função é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemplo

- Determine se a função é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculando o limite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} =$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) = 0$

Exemplo

- Determine se a função é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculando o limite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} =$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) = 0$
2. Determinando o valor da função no ponto: $f(0,0) = 0$

Exemplo

- Determine se a função é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculando o limite: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} =$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2) = 0$
2. Determinando o valor da função no ponto: $f(0,0) = 0$
3. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = f(0,0) = 0$ podemos dizer que f é contínua em $(0,0)$.

Subsection 2

Funções com três variáveis

- Uma função f de três variáveis (ou mais)

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = L \tag{4}$$

- Os valores de $f(x,yz)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x,y,z) se aproxima do ponto (a,b,c) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f, de forma que, para todo $\epsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que se (x,y,z) está no domínio de f e $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta$, então $|f(x,y,z) - L| < \epsilon$.