CEC0003 - Matemática para Economia

Derivadas parciais

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

6 de julho de 2020

Tópicos

Section 1

Derivadas parciais

Subsection 1

Intuição

- Suponha que a produção de mesas de escritório de uma empresa dependa de apenas dois insumos, capital e trabalho.
- Podemos escrever essa relação em notação matemática como $P = P(k, l)$, em que P denota a produção, k o capital e l o trabalho.
- Admita que Tabela 1 abaixo retrate a quantidade produzida para uma determinada quantidade de capital e trabalho.

Capital (k)	Trabalho (l)							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**60**	**70**	**80**
1	1	1,4	1,7	2	2,2	7,7	8,4	8,9
2	1,4	2	2,4	2,8	3,2	11	11,8	12,6
3	1,7	2,4	3	3,5	3,9	13,4	14,5	15,5
4	2	2,8	3,5	4	4,5	15,5	16,7	17,9
5	2,2	3,2	3,9	4,5	5	17,3	18,7	20
26	5,1	7,2	8,8	10,2	11,4	38,7	41,8	44,7
28	5,3	7,5	9,2	10,6	11,8	41	44,3	47,3
30	5,5	7,7	9,5	11	12,2	42,4	45,8	49

Tabela 1: Quantidade produzida para dados níveis de capital e trabalho, $P(k,l) = k^{1/2} l^{1/2}$

- Se forem empregadas, por exemplo, 70 trabalhadores e 28 unidades de capital a empresa produzida 44,3 unidades;

- Suponha que a empresa empregue 3 trabalhadores, 2 unidades de capital e que não possa contratar e nem demitir, podemos considerar que a quantidade produzida da empresa depende apenas do **capital**, ou seja, $g(k) = P(k, 3)$.
- A função $g(k)$ descreve como a produção P varia à medida que o capital k varia, com a quantidade de trabalho fixa em $l = 3$.
- Essa é um significado intuitivo da derivada parcial de $P(k, l)$ em relação a k, representada como:

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{P(k + \Delta k, l) - P(k, l)}{\Delta k} \tag{1}$$

- A derivada de $P(k,l)$ quando l está fixo em 3 e tomando uma quantidade empregada de capital inicial de $k=2$, a variação na produção da empresa será dado por:

$$g'(2) = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{g(k+\Delta k) - g(k)}{\Delta k} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{P(k+\Delta k, l) - P(k,l)}{\Delta k}$$

- Para aproximar o valor da derivada acima quando não conhecemos a equação podemos utilizar os dados disponíveis na Tabela 1.

- Tomando uma variação para baixo do ponto inicial e uma variação para cima em relação ao ponto inicial $k = 2$.
- Para um ponto abaixo:

$$\Delta = -1 \Rightarrow \frac{P(1,3) - P(2,3)}{-1} = \frac{1,7 - 2,4}{-1} = 0,7 \qquad (2)$$

- Para um ponto acima:

$$\Delta = 1 \Rightarrow \frac{P(3,3) - P(2,3)}{1} = \frac{1,7 - 2,4}{1} = 0,6 \qquad (3)$$

- Calculando a média desses valores: $\frac{\partial P}{\partial k} \approx 0,65$

- Suponha agora, que desejamos em determinar qual a variação da produção quando a empresa **variar** o número de **trabalhadores** utilizados
- Suponha que a empresa empregue 70 trabalhadores e utilize 28 unidades de capital e que ela não possa modificar a quantidade desse último.
- A quantidade produzida da empresa depende apenas do trabalho, ou seja, $h(l) = P(28, l)$.

- A função $h(l)$ descreve como a produção P varia à medida que o trabalho l varia, com a quantidade de capital fixa em $k = 28$. Essa é um significado intuitivo da derivada parcial de $P(k, l)$ em relação a l, que pode ser representada como:

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{P(k, l + \Delta l) - P(k, l)}{\Delta l} \tag{4}$$

- A derivada de $P(k, l)$ quando k está fixo em 28 e tomando uma quantidade empregada de capital inicial de $l = 70$, a variação na produção da empresa será dado por:

$$h'(70) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{g(l + \Delta l) - g(l)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{P(k, l + \Delta l) - P(k, l)}{\Delta l}$$

- Para aproximar o valor da derivada quando não conhecemos a equação podemos utilizar os dados disponíveis na Tabela 1.
- Tomando uma variação para baixo do ponto inicial $I = 70$.

$$\Delta = -10 \Rightarrow \frac{P(28,60) - P(28,70)}{-10} = \frac{41 - 44,3}{-10} = 0,33$$

- Para um ponto acima de 70:

$$\Delta = 10 \Rightarrow \frac{P(28,80) - P(28,70)}{10} = \frac{47,3 - 44,3}{10} = 0,3$$

- Calculando a média: $\frac{\partial P}{\partial I} \approx 0,315$.

- $\frac{\partial P}{\partial l} \approx 0,315$ indica que, quando a quantidade de capital e trabalho empregada na produção é 28 e 70 unidades, respectivamente, e a quantidade de mão de obra variar em uma unidade, a produção deve variar em aproximadamente 0,315 unidades.
- A quantidade utilizada de capital deve permanecer constante em 28 unidades à medida que a quantidade empregada de trabalho variar.

- Como toda derivada é uma medida de uma taxa de variação, uma derivada parcial pode ser assim interpretada.
- Se f for uma função de duas variáveis x e y, a derivada parcial de f em relação a x no ponto $f(x_0, y_0)$ dará a taxa de variação instantânea em (x_0, y_0) de $f(x, y)$, por unidade de variação de x (apenas x varia, enquanto y é mantido constante em y_0).
- O mesmo se aplica para a derivada parcial de f em relação a y em (x_0, y_0).

Subsection 2

Notações

- Podemos usar várias notações para indicar que estamos trabalhando com uma derivada parcial. Tomando uma função $z = f(x, y)$,
  - A derivada parcial da função em relação a x pode ser denotada por $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = f_x(x, y)$;
  - A derivada parcial da função em relação a y pode ser denotada por $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y = f_y(x, y)$;
  - $f_x(x, y) \neq f'(x)$. A primeira indica uma derivada parcial da função $f(x, y)$ em relação a x, enquanto a segunda indica a derivada ordinária , ou seja, a derivada de uma função de apenas uma variável.

Subsection 3

Regras para diferenciação parcial

- Suponha uma função $z = f(x, y)$
  - Para calcular f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ em relação a x;
  - Para calcular f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ em relação a y.
- As regras de diferenciação com uma variável são válidas para a função $z = f(x, y)$, ou para a função geral $z = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ considerando a observação acima, devemos manter todas as demais variáveis independentes constantes quando calcularmos $f_i, \quad i = 1, 2, \dots n$.

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = 2x + 3y$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x,y) = 2x + 3y$

Solução (Regra da constante)

$f_x = 2 \qquad \text{e} \qquad f_y = 3$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = 3x^2y$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = 3x^2y$

Solução (Regra da potência)

$f_x = 6xy$ e $f_y = 3x^2$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$g(s,t) = s^2 - st + t^2$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$$g(s,t) = s^2 - st + t^2$$

Solução (Regra da soma/diferença)

$$g_s = 2s - t \qquad \text{e} \qquad g_t = -s + st$$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = \frac{xy}{y^2}$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = \frac{xy}{y^2}$

Solução (Regra do quociente)

$f_x = \frac{1}{y}$ e $f_y = \frac{xy^2 - 2xy^2}{y^4} = -\frac{x}{y^2}$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = \ln(xy^3)$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$$f(x, y) = \ln\left(xy^3\right)$$

Solução (Regra do logarítmo)

$$f_x = \frac{xy^3}{y^3} = x \qquad \text{e} \qquad f_y = \frac{3xy^2}{xy^3} = \frac{3}{y}$$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x, y) = x^2 e^{y^3}$

Calcule as derivadas parciais das funções abaixo

$f(x,y) = x^2 e^{y^3}$

Solução (Regra do exponencial)

$f_x = 2xye^{y^3}$ e $f_y = 3x2y^2 e^{y^3}$

Subsection 4

Derivadas Parciais de Ordem Superior

- Se $f(x,y)$ é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_y$ e $(f_y)_x$, que são chamadas derivadas parciais de 2ª ordem de $f(x,y)$, ou de forma reduzida, f.

- As derivadas parciais de 2ª podem ser denotadas como:
- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}$

Calcule as derivadas parciais de segunda ordem para a função

$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 + e^{x^2}$

Calcule as derivadas parciais de segunda ordem para a função

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 + e^{x^2}$$

Solução

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3 + 2xe^{x^2}$$

$$f_{xx} = 6x + 2y^3 + (2x)(2x)e^{x^2} = 6x + 2y^3 + 4x^2e^{x^2}$$

$$f_{xy} = 6xy^2$$

$$f_y = 3x^2y^2$$

$$f_{yx} = 6xy^2$$

$$f_{yy} = 6x^2y$$