CEC0003 - Matemática para Economia

Otimização com restrições

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

21 de agosto de 2020

Tópicos

Seção 1

Introdução

Subseção 1

Otimização irrestrita x restrita

- Na otimização **irrestrita** as variáveis escolha são **independentes**.
    - O consumidor que deseja maximizar a sua utilidade $u(x, y)$, mas não seria considerada nenhuma restrição ao seu consumo, ou seja, não seria considerada sua restrição de renda.
- Na otimização **restrita** as variáveis escolha são **dependentes**
    - A utilidade $u(x, y)$ do consumo estaria restringida pela dotação de renda desse consumidor, de forma que se ele consume x^* e y^* exaurindo toda a sua renda, para que ele aumente o consumo de x ele deveria reduzir o consumo de y, e virse versa

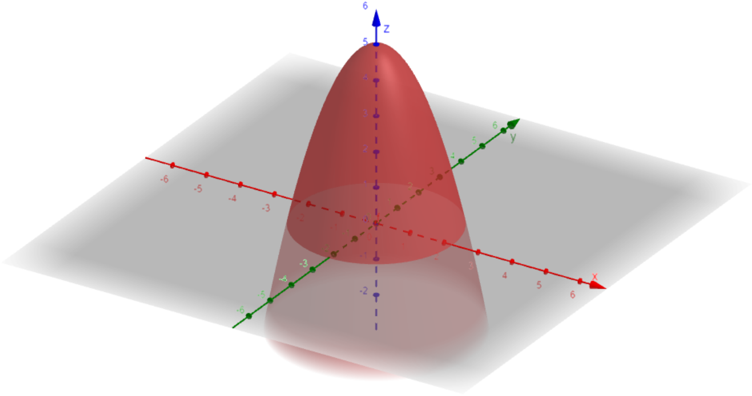

Figura 1: Gráfico da função $z = 5 - x^2 - y^2$.

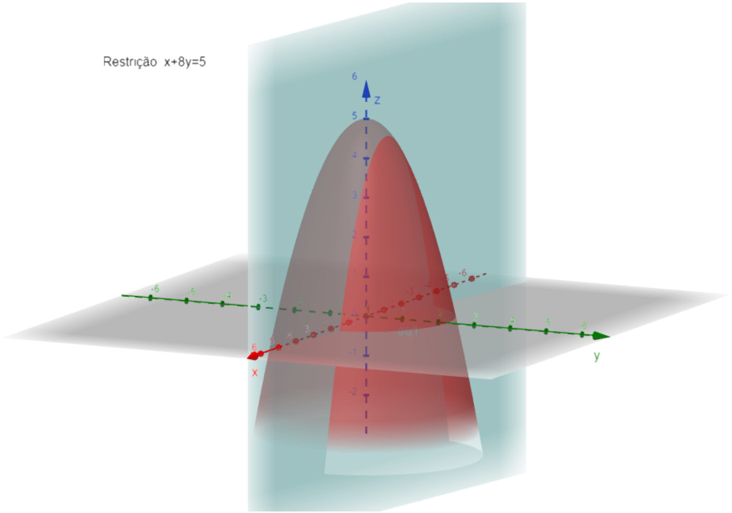

Figura 2: Função $z = 5 - x^2 - y^2$ sujeito à restrição $x + 8y = 5$.

Subseção 2

O problema de otimização restrita

- Um consumidor que obtenha uma utilidade U advinda do consumo de apenas dois bens, x e y dada pela função $u(x, y) = xy + 2x$
- Deseja maximizar a sua utilidade
- Considerar sua a restrição de renda: ele dispõe de R$ 200 para consumir dois bens. Supondo que o preço de x seja R$ 4,00 e o preço de y seja R$ 8,00.

- O problema de maximização restrita dado por:

$$\begin{array}{lrl} \text{Máx} & U(x,y) = & xy + 2x \\ \text{sujeito a} & & 4x + 8y = 200 \end{array}$$

- A função $U(x,y) = xy + 2x$ é chamada **função objetivo**, a equação $4x + 8y = 200$ é a **restrição**, que estreita o domínio da função $U(x,y)$ e os valores possíveis que U pode assumir.

Seção 2

Condição de primeira ordem

Subseção 1

Substituição

- Dependendo do número de restrições e da forma funcional, um problema de otimização com restrições pode ser resolvido por substituição, seguindo as etapas:
  1. Resolva (“isole ”) para uma variável na restrição;
  2. Substitua na função objetivo;
  3. Trate a otimização como uma otimização não restrita (vista no capítulo anterior), derivando e igualando a zero a função objetivo

Exemplo

Calcule os valores que maximizam a função objetivo $u(x, y) = xy + 2x$ sujeito à restrição $g(x, y) = 4x + 8y = 200$ por meio de substituição.

Exemplo

Calcule os valores que maximizam a função objetivo $u(x, y) = xy + 2x$ sujeito à restrição $g(x, y) = 4x + 8y = 200$ por meio de substituição.

1. Tome a restrição $4x + 8y = 200$, resolva para uma das variáveis. Isolando x teremos: $4x = 200 - 8y \Rightarrow x = 50 - 2y$;
2. Substituindo x na função objetivo: $u = (50 - 2y)y + 2(50 - 2y) = 50y - 2y^2 + 100 - 4y = 46y - 2y^2 + 100$;
3. Derivando a função $u = 46y - 2y^2 + 100$ e igualando a zero temos: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -4y + 46 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 11,5}$;
4. Substituindo y na expressão obtida na etapa 1: $x = 50 - 2(11,5) \Rightarrow \boxed{x = 27}$

Subseção 2

Método do multiplicador de Lagrange

- O método do multiplicador de Lagrange converte um problema de extremo restrito em uma forma tal que a condição de primeira ordem do problema do extremo livre ainda possa ser aplicada.

- O método do multiplicador de Lagrange converte um problema de extremo restrito em uma forma tal que a condição de primeira ordem do problema do extremo livre ainda possa ser aplicada.

Exemplo

- Se tivermos uma função utilidade $u(x, y)$ sujeito à restrição $g(x, y) = c$
- A função do multiplicador de Lagrange será

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda[c - g(x, y)] \tag{1}$$

- Os valores críticos para as variáveis (x, y) serão obtidos pela resolução do sistema de equações dados pelas derivadas parciais:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = f_x + \lambda g_x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = f_y + \lambda g_y = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = c - g(x, y) = 0 \tag{4}$$

Exemplo

Calcule os valores que maximizam a função objetivo $u(x, y) = xy + 2x$ sujeito à restrição $g(x, y) = 4x + 8y = 200$ por meio do método dos multiplicadores de Lagrange

- Obtendo a função do multiplicador de Lagrange:

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = xy + 2x + \lambda[200 - 4x - 8y] \tag{5}$$

- Encontrando as derivadas parciais da função $\mathscr{L}$ em relação a x, y e λ e todos os valores para os quais os valores das derivadas parciais são nulos:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = y + 2 - 4\lambda = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = x - 8\lambda = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = 200 - 4x - 8y = 0 \tag{8}$$

- Resolvendo para λ as Equações (6) e (7), respectivamente:

$$\lambda = \frac{y+2}{4} \tag{9}$$

$$\lambda = \frac{x}{8} \tag{10}$$

- Igualando as Equações (9) e (10):

$$\frac{y+2}{4} = \frac{x}{8} \tag{11}$$

- Resolvendo para uma das variáveis, por exemplo, para x:

$$4x = 8y + 16 \Rightarrow \boxed{x = 2y + 4} \tag{12}$$

- Substituindo x obtido na Equação (12) na Equação (8):

$$200 - 4(2y + 4) - 8y = 0 \Rightarrow 200 - 8y - 16 - 8y = 0 \quad (13)$$

- Resolvendo y na Equação (13):

$$16y = 184 \Rightarrow y = \frac{184}{16} \Rightarrow \boxed{y = 11,5} \quad (14)$$

- Substituindo o valor $y = 11,5$ na Equação (12):

$$x = 2(11,5) + 4 \Rightarrow \boxed{x = 27} \quad (15)$$

Seção 3

Interpretação do multiplicador de Lagrange

- Se tivermos o problema:

$$\begin{aligned} \text{Máx} \quad & z = f(x,y) \\ \text{sujeito a} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

- A função do multiplicador de Lagrange será dada por :

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)] \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}c} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^*}{\mathrm{d}c} = \lambda^* \tag{17}$$

- A variação no valor ótimo z^* para uma alteração no valor de c em uma unidade será dado por λ^*

Exemplo

- Para o exemplo anterior, nas Equações (9) e (10):

$$\lambda = \frac{y+2}{4} \tag{18}$$

$$\lambda = \frac{x}{8} \tag{19}$$

- Para os valores $(x^*; y^*) = (27; 11,5)$:

$$\lambda^* = 3,375 \tag{20}$$

Exemplo

$\lambda^* = 3,375$: um aumento em uma unidade em c deverá elevar o valor ótimo da função aproximadamente $3,375$

Exemplo

$\lambda^* = 3,375$: um aumento em uma unidade em c deverá elevar o valor ótimo da função aproximadamente $3,375$

- No problema inicial: máx $z = xy + 2x$ sujeito a $4x + 8y = 200$, tivemos $f(x^*, y^*) = f(27, 11, 5) = 364,5$
- Se acrescentarmos uma unidade no valor c da restrição teremos:
    - Max $z = xy + 2x$ sujeito a $4x + 8y = 201$, e os novos valores ótimos para $(x^*, y^*) = (27,125, 11,5625)$ e $f(x^*, y^*) = f(27,125, 11,5625) = 367,88$

Exemplo

$\lambda^* = 3,375$: um aumento em uma unidade em c deverá elevar o valor ótimo da função aproximadamente $3,375$

- No problema inicial: máx $z = xy + 2x$ sujeito a $4x + 8y = 200$, tivemos $f(x^*, y^*) = f(27, 11, 5) = 364,5$
- Se acrescentarmos uma unidade no valor c da restrição teremos:
  - Max $z = xy + 2x$ sujeito a $4x + 8y = 201$, e os novos valores ótimos para $(x^*, y^*) = (27,125, 11,5625)$ e $f(x^*, y^*) = f(27,125, 11,5625) = 367,88$
  - $\Delta z^* = 367,88 - 364,5 = 3,338 \approx \lambda^* = 3,375$

Seção 4

Condição de segunda ordem

Sendo um ponto crítico (x^*, y^*) para uma função $z = f(x, y)$ sujeito a $g(x, y) = c$ e sua diferencial de segunda ordem d^2z:

1. O ponto crítico (x^*, y^*) será um **máximo absoluto** se, e somente se $dz^2 < 0$ (negativa definida) sujeito a $dg = 0$
2. O ponto crítico (x^*, y^*) será um **mínimo absoluto** se, e somente se $dz^2 > 0$ (positiva definida) sujeito a $dg = 0$;

Definição

A função $z = f(x, y)$ no ponto estacionário (x^*, y^*) para um problema de otimização com uma restrição de igualdade $g(x, y) = c$ e sujeito a $dg = 0$ alcançará:

Valor máximo: $(d^2 z < 0)$ se, e somente se $|\overline{H}| < 0$ e

Valor mínimo: $(d^2 z > 0)$ se, e somente se $|\overline{H}| > 0$ e

Definição (Determinante Hessiano Aumentado)

O determinante

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathscr{L}_{xx} & \mathscr{L}_{xy} \\ g_y & \mathscr{L}_{yx} & \mathscr{L}_{yy} \end{vmatrix} \tag{21}$$

representado por $|\overline{H}|$ é denominado **hessiano aumentado**.

Encontre o ponto estacionário para o problema de otimização com função objetivo $z = x^2 + y^2$ sujeito à restrição $x + 4y = 2$ e determine se nesse ponto a função alcança um valor máximo ou mínimo

Encontre o ponto estacionário para o problema de otimização com função objetivo $z = x^2 + y^2$ sujeito à restrição $x + 4y = 2$ e determine se nesse ponto a função alcança um valor máximo ou mínimo

Solução

- Montando a função do multiplicador de Lagrange:

$$\mathscr{L} = x^2 +^2 + \lambda(2 - x - 4y)$$

Exemplo

- Calculando as derivadas parciais para todas as variáveis e igualando a zero:

$$\mathscr{L}_x = 2x - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x \tag{22}$$

$$\mathscr{L}_y = 2y - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}y \tag{23}$$

$$\mathscr{L}_\lambda = 2 - x - 4y = 0 \tag{24}$$

- Igualando as expressões dadas por (22) e (23):

$$2x = \frac{1}{2}y$$

Exemplo

- Resolvendo para y

$$y = 4x \tag{25}$$

- Substituindo na Equação (24):

$$2 - x - 4(4x) = 0 \Rightarrow 2 - x - 16x = 0 \Rightarrow 17x = 2 \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{2}{17}} \tag{26}$$

- Substituindo $x = \dfrac{2}{17}$ em $y = 4x$, teremos que

$$y = 4\left(\frac{2}{17}\right) \Rightarrow \boxed{y^* = \frac{8}{17}} \tag{27}$$

Exemplo

- Das Equações (22) ou (23) teremos que $\lambda^* = \frac{4}{17}$ O valor ótimo da função poderá ser então calculado:

$$z^* = \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{68}{17^2} = \frac{4}{17} \tag{28}$$

Exemplo

- Para determinarmos se esse valor $z^* = \dfrac{4}{17}$ é o valor máximo ou mínimo da função devemos utilizar a condição de segunda ordem, devendo calcular:

$$\mathscr{L}_{xx} = 2 \quad \mathscr{L}_{yy} = 2 \quad \mathscr{L}_{xy} = 0 \quad \mathscr{L}_{yx} = 0 \quad g_x = 1 \quad g_y = 4$$

- **No ponto crítico** o valor do hessiano **aumentado** será:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathscr{L}_{xx} & \mathscr{L}_{xy} \\ g_y & \mathscr{L}_{yx} & \mathscr{L}_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow |\overline{H}|\left(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -34 < 0 \tag{29}$$

- $z^* = \dfrac{4}{17}$ é o valor mínimo para a função z dada a restrição $x + 4y = 2$