CEC0003 - Matemática para Economia

Otimização Irrestrita

Samuel Campos

Instituto de Ciências da Sociedade e Desenvolvimento Regional- Universidade Federal Fluminense (ESR/UFF)

samuelcampos@id.uff.br

15 de abril de 2021

Tópicos

1 Introdução
- Extremos absolutos
- Extremos relativos

2 Condição de primeira ordem

3 Condição de segunda ordem

4 Aplicação
- Mínimos Quadrados Ordinários
  - Exemplo

Seção 1

Introdução

Subseção 1

Extremos absolutos

Definição (Máximo global ou absoluto)

Um ponto (x_1^*, x_2^*) em um domínio $\mathbb{D}$ com $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ será um ponto **máximo global ou absoluto** de f, para **todo** (x_1, x_2) de $\mathbb{D}$, se e somente se:

$$f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$$

Definição (Mínimo global ou absoluto)

Um ponto (x_1^*, x_2^*) em um domínio $\mathbb{D}$ com $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ será um ponto **mínimo global ou absoluto** de f, para **todo** (x_1, x_2) de $\mathbb{D}$, se e somente se:

$$f(x_1^*, x_2^*) \leq f(x_1, x_2)$$

Subseção 2

Extremos relativos

Definição (Máximo relativo ou local)

Um ponto (x_1^*, x_2^*) em um domínio $\mathbb{D}$ com $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ será um ponto **máximo relativo** de f, se existe uma **região** (ou vizinhança) $\mathbb{R}$ que contém o ponto (x_1, x_2) tal que:

$$f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$$

Definição (Mínimo relativo ou local)

Um ponto (x_1^*, x_2^*) em um domínio $\mathbb{D}$ com $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ será um ponto **mínimo relativo** de f, se existe uma **região** (ou vizinhança) $\mathbb{R}$ que contém o ponto (x_1, x_2) tal que:

$$f(x_1^*, x_2^*) \leq f(x_1, x_2)$$

Seção 2

Condição de primeira ordem

- Se a função $z = f(x_1, x_2)$ possui derivadas parciais contínuas:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \tag{1}$$

- No ponto é estacionário (ou crítico) devemos ter:

$$dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \tag{2}$$

Definição

Um ponto (x_1^*, x_2^*) em um domínio $\mathbb{D}$ com $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ será um ponto **extremo**, **estacionário** ou **crítico** se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{4}$$

ou se $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ e/ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ não existirem.

Exemplo

- Encontre o ponto extremo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemplo

- Encontre o ponto extremo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solução

1. Calcule f_x e f_y:

$$f_x = 2x \qquad \text{e} \qquad f_y = 2y$$

2. Iguale $f_x = 0$ e $f_y = 0$:

$$f_x = 2x = 0 \Rightarrow x^* = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y = 2y = 0 \Rightarrow y^* = 0$$

3. O ponto crítico da função será $(x^*, y^*) = (0, 0)$

Seção 3

Condição de segunda ordem

Sendo um ponto crítico (x^*, y^*) para uma função $z = f(x, y)$ e sua diferencial de segunda ordem d^2z:

1. O ponto crítico (x^*, y^*) será um **máximo absoluto** se, e somente se $dz^2 < 0$ (negativa definida) para valores arbitrários de dx e dy, não sendo ambos iguais a zero;
2. ponto crítico (x^*, y^*) será um **mínimo absoluto** se, e somente se $dz^2 > 0$ (positiva definida) para valores arbitrários de dx e dy, não sendo ambos iguais a zero;

- $dz^2 < 0$ se e somente se, $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$;
- $dz^2 > 0$ se e somente se, $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} > (f_{xy})^2$;
- Se tivermos $f_{xx}f_{yy} < (f_{xy})^2$ em um ponto crítico (x^*, y^*),temos que esse será um **ponto sela**;
- Se $f_{xx}f_{yy} = (f_{xy})^2$, não será possível fazer quaisquer afirmação, sendo que esse ponto poderia ser um ponto de máximo, mínimo, sela ou inflexão.

Desta forma, teremos quatro condições possíveis para um ponto crítico (x^*, y^*):

a. Ponto de máximo: $f_{xx} < 0$ e $\det \mathrm{H}(x, y) > 0$;
b. Ponto de mínimo: $f_{xx} > 0$ e $\det \mathrm{H}(x, y) > 0$;
c. Ponto sela: $\det \mathrm{H}(x, y) < 0$;
d. Ponto indefinido: $\det \mathrm{H}(x, y) = 0$;

$$\text{em que } \det \mathrm{H}(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

O determinante cujos elementos são derivadas parciais de 2ª ordem é denominado determinante hessiano ou (simplesmente hessiano)

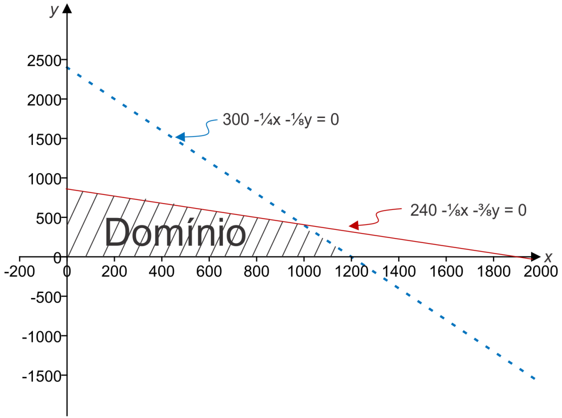


Figura 1: Ponto de máximo $f_{xx} < 0$ e det $\mathrm{H}(x, y) > 0$. Fonte: Tan (2010)

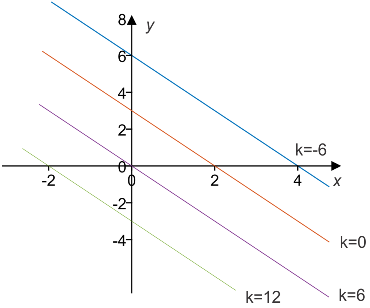


Figura 2: Ponto de mínimo $f_{xx} > 0$ e det $\mathrm{H}(x, y) > 0$ Fonte: Tan (2010)

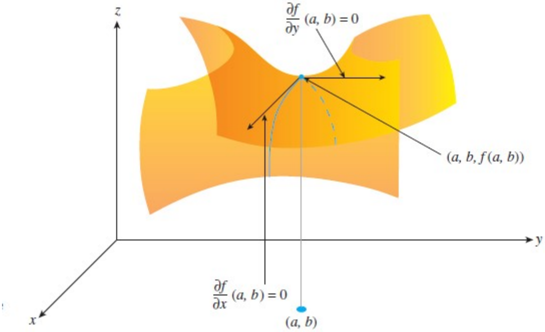
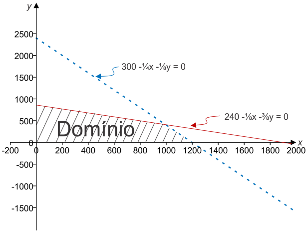
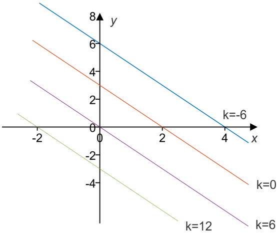


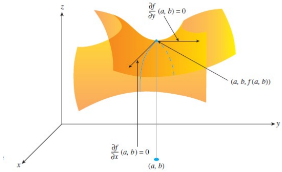
Figura 3: Ponto sela $\det \mathrm{H}(x, y) < 0$. Fonte: Tan (2010)



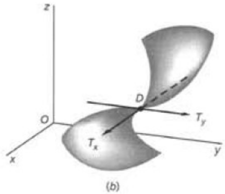
(a) Mínimo



(b) Máximo



(c) Ponto Sela



(d) Ponto de Inflexão

Figura 4: Ponto indefinido det $H(x, y) = 0$ Fonte: Chiang e Wainwright (2005) e Tan (2010).

Calcule o ponto crítico para a função e determine sua natureza
$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y + 4$

Calcule o ponto crítico para a função e determine sua natureza $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y + 4$

Solução

- Calculando as derivadas parciais de primeira ordem:

$$fx = 6x - 4y - 4 = 0$$
$$fy = -4x + 8y + 8 = 0$$

- Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 6x - 4y - 4 = 0 \\ -4x + 8y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 4 \\ -4x + 8y = -8 \end{cases}$$

teremos $(x^*, y^*) = (0, -1)$

- Para determinarmos a natureza desse ponto devemos calcular as derivadas:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6 \\ [f_{yx} =] \quad f_{xy} &= -4 \\ f_{yy} &= 8 \end{aligned}$$

- Como $f_{xx} = 6 > 0$ e $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = (6)(8) - (-4)^2 = 32 > 0$, temos que a função alcança um valor mínimo no ponto $(x^*, y^*) = (0, -1)$;
- Substituindo os respectivos valores de x e y na função $f(0, -1) = 3(0)^2 - 4(0)(-1) + 4(-1)^2 - 4(0) + 8(-1) + 4 = 0$.

Seção 4

Aplicação

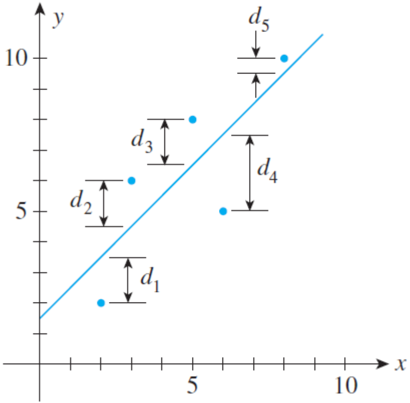
Subseção 1

Mínimos Quadrados Ordinários

- Obtenção da reta que melhor se ajuste a um conjunto de pontos dados.
- Suponha que queiramos encontrar um modelo matemático para alguns dados que são um conjunto de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$.

- A variável y_i poderia ser o lucro semanal de um fabricante, enquanto que x seria o número de unidades vendidas por semana, ou y poderia o valor total exportado por um país enquanto x poderia ser o produto interno bruto do país importador.
- Essa relação pode ser estudada por meio de uma função linear (reta) $y = f(x) = \alpha + \beta x$ ajustada aos dados como indicado pela Figura 5.

Figura 5: A reta $y = \alpha + \beta x$



Fonte: Tan (2014)

- A reta desvia-se do primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto pontos em d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5.
- O princípio do método é ajustar a reta de forma a minimizar a soma dos quadrados desses desvios:

$$\text{Min} \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 \tag{5}$$

$d_1 = f(x_1) - y_1 = y_1 - f(x_1) = y_1 - \alpha - \beta x.$

- Minimizando o quadrado do desvios (o sinal do desvio não será importante):

$$\text{Min} \;\; [f(x_1) - y_1]^2 + [f(x_2) - y_2]^2 + [f(x_3) - y_3]^2 + [f(x_4) - y_4]^2 + [f(x_5) - y_5]^2$$

- De forma geral,

$$d_i = y_i - f(x_i) = y_i - \alpha - \beta x_i \;\; \forall \;\; i = 1, 2, 3, 4, 5 \qquad (6)$$

- A função de duas variáveis: α e β

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \alpha - \beta x_i]^2 \tag{7}$$

- A função de duas variáveis: α e β

$$g(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \alpha - \beta x_i]^2 \tag{7}$$

- Utilizando a condição de primeira ordem para obtermos o mínimo para a função.

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \tag{10}$$

- Utilizando a regra da cadeia teremos, para a Equação (10):

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \alpha - \beta x_i)(-x_i) \tag{11}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(-x_i y_i + \alpha x_i + \beta x_i^2) \tag{12}$$

$$= 2\left[-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2] = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - \alpha - \beta x_i)(-1) \tag{15}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(-y_i + \alpha + \beta x_i) \tag{16}$$

$$= 2\left[-\sum_{i=1}^{n} y_i + n\alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i\right] \tag{17}$$

em que $\sum_{i=1}^{n} \alpha = n\alpha$.

- Igualando as derivadas (13) e (17) a zero (condição de primeira ordem para otimização)
- A Equação (13) pode ser reescrita como:

$$2\left[-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = 0 \qquad (18)$$

ou

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \qquad (19)$$

- A Equação (17):

$$2\left[-\sum_{i=1}^{n} y_i + n\alpha + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = 0 \tag{20}$$

ou

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + n\alpha + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{21}$$

- Isolando α em (21):

$$\alpha = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i\right] \tag{22}$$

Substituindo (22) em (19) e resolvendo para β:

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{23}$$

Exemplo

- A Tabela (1) apresenta os dias corridos (x) desde o início do surto da pandemia de COVID-19 em Campos dos Goytacazes (RJ), em que $x = 1$ é o dia 10 de abril de 2020 e y são os casos confirmados.
  1. Ache a reta de regressão para os pontos (x_i, y_i).
  2. Use essa reta de regressão para estimar o número de casos novos da doença após 30 dias.

Tabela 1: Dias corridos (x) e casos confirmados (y) da pandemia de COVID-19 em Campos dos Goytacazes, RJ

x	1	5	10	15	20	25
y	13	17	40	48	71	120

- A reta tem uma equação de forma $y = \alpha + \beta x$. Para determinar α e β, calcularemos primeiramente os somatórios das Equações (22) e (23), apresentados na Tabela (2).

Tabela 2

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	13	1	13
5	17	25	85
10	40	100	400
15	48	225	720
20	71	400	1420
25	120	625	3000
$\sum$ 76	309	1.376	5.638

- Dessa tabelas temos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 76 \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 309$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1.376 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 5.638$$

- Das Equações (22) e (23) e $n = 6$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{6(5.638) - (76)(309)}{6(1.376) - (76)^2} = 4,171 \\ \alpha &= \frac{1}{6}(309 - (4,171)(76)) = -1,332 \end{aligned} \tag{24}$$

- A equação da reta da regressão será:

$$y = -1,332 + 4,171x \tag{25}$$

- Por meio da Equação da reta (25), quando $x = 30$ teremos $y = -1,332 + 4,171(30) = 123,79$. Assim, no 30º dia da epidemia, por essa regressão teríamos 124 casos confirmados.