



---

## Probabilidade

Ana Maria Lima de Farias  
Departamento de Estatística

Agosto 2015

# Sumário

<b>1</b>	<b>Probabilidade: conceitos básicos</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Experimento aleatório, espaço amostral e evento . . . . .	1
1.2.1	Experimento aleatório . . . . .	2
1.2.2	Espaço amostral . . . . .	2
1.2.3	Eventos aleatórios . . . . .	3
1.3	Operações com eventos aleatórios . . . . .	5
1.3.1	Interseção . . . . .	5
1.3.2	Exclusão . . . . .	6
1.3.3	União . . . . .	6
1.3.4	Complementação . . . . .	7
1.3.5	Diferença . . . . .	7
1.3.6	Propriedades das operações . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Probabilidade: axiomas e propriedades</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.2	Definição axiomática de probabilidade . . . . .	13
2.3	Espaços amostrais finitos e equiprováveis . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Probabilidade condicional e independência de eventos</b>	<b>27</b>
3.1	Probabilidade condicional . . . . .	27
3.1.1	Regra da multiplicação . . . . .	32

3.2	Independência de eventos . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes</b>	<b>43</b>
4.1	Exemplos . . . . .	43
4.2	Os teoremas . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Exercícios propostos</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Gabarito dos Exercícios propostos</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Análise combinatória</b>	<b>77</b>
A.1	Princípio Fundamental da Adição . . . . .	77
A.2	Princípio Fundamental da Multiplicação . . . . .	79
A.3	Permutações . . . . .	80
A.4	Arranjos . . . . .	83
A.5	Combinações Simples . . . . .	85
A.6	Triângulo de Pascal e Binômio de Newton . . . . .	89
A.6.1	Aplicações . . . . .	95

# Capítulo 1

## Probabilidade: conceitos básicos

### 1.1 Introdução

No nosso cotidiano, lidamos sempre com situações em que está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis já sejam conhecidos. Por exemplo: o sexo de um embrião pode ser masculino ou feminino, mas só saberemos o resultado exato quando o bebê nascer. Se estivermos interessados na face voltada para cima ao jogarmos um dado, os resultados possíveis serão 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mas só saberemos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. É conveniente, então, dispormos de uma medida que exprima a incerteza presente em cada um desses acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

No estudo das distribuições de frequências, vimos como essas são importantes para entendermos a variabilidade de um fenômeno aleatório. Por exemplo, quando sorteamos uma amostra de empresas para analisar a distribuição do número de empregados, sabemos que uma outra amostra fornecerá resultados diferentes. No entanto, se sorteamos um grande número de amostras, esperamos que surja um determinado padrão que irá refletir a verdadeira distribuição da população de todas as empresas. Através de um modelo teórico, construído com base em suposições adequadas, podemos reproduzir a distribuição de frequências quando o fenômeno for observado diretamente. Esses modelos são chamados *modelos probabilísticos* e serão estudados na segunda parte deste curso. A *probabilidade* é a ferramenta básica na construção de tais modelos e será estudada nesta primeira parte.

### 1.2 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Consideremos o lançamento de um dado, a fim de estudarmos a proporção de ocorrências das suas faces. O primeiro fato a observar é que existem apenas 6 resultados possíveis, as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. O segundo fato é uma suposição sobre o dado: em geral, é razoável supor que ele seja equilibrado. Assim, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto,

essa proporção deve ser  $\frac{1}{6}$ . Nessas condições, nosso modelo probabilístico para o lançamento de um dado pode ser expresso da seguinte forma:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Suponhamos que uma mulher esteja grávida de trigêmeos. Sabemos que cada bebê pode ser do sexo masculino (M) ou feminino (F). Então, as possibilidades para o sexo das três crianças são: MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF. Uma suposição razoável é que todos esses resultados sejam igualmente prováveis, o que equivale a dizer que cada bebê tem igual chance de ser do sexo masculino ou feminino. Então cada resultado tem uma chance de  $\frac{1}{8}$  de acontecer. Assim, o modelo probabilístico para esse experimento seria

Sexo	MMM	MMF	MFM	FMM	FFM	FMF	MFF	FFF	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Por outro lado, se só estivermos interessados no número de meninas, esse mesmo experimento nos conduzirá ao seguinte modelo probabilístico:

Meninas	0	1	2	3	Total
Freq. teórica	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Nesses exemplos, vimos que a especificação de um modelo probabilístico para um fenômeno casual depende da especificação dos *resultados possíveis* e das respectivas *probabilidades*. Vamos, então, estabelecer algumas definições antes de passarmos à definição propriamente dita de probabilidade.

### 1.2.1 Experimento aleatório

Um *experimento aleatório* é um processo que acusa variabilidade em seus resultados, isto é, mesmo repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados serão diferentes. Em contraposição aos experimentos aleatórios, temos os experimentos *determinísticos*, que, repetidos sob as mesmas condições, conduzem a resultados idênticos. Neste curso, estaremos interessados apenas nos experimentos aleatórios.

### 1.2.2 Espaço amostral

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis do mesmo. Iremos denotar tal conjunto pela letra grega ômega maiúscula,  $\Omega$ . Quando o espaço amostral for finito ou infinito enumerável, será chamado de espaço amostral *discreto*. Caso contrário, isto é, quando  $\Omega$  for não enumerável, iremos chamá-lo de espaço amostral *contínuo*.

### 1.2.3 Eventos aleatórios

Os subconjuntos de  $\Omega$  são chamados de *eventos aleatórios* e os elementos de  $\Omega$  são chamados de *eventos elementares*. Os eventos, sendo conjuntos, serão representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, enquanto os elementos de um evento serão representados por letras minúsculas.

#### EXEMPLO 1.1 Lançamento de uma moeda

O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, uma vez que, em cada lançamento, mantidas as mesmas condições, não podemos prever qual das duas faces (cara ou coroa) cairá para cima. Por outro lado, se colocarmos uma panela com água para ferver e anotarmos a temperatura de ebulição da água, o resultado será sempre  $100^{\circ}\text{C}$ . Logo, este é um experimento determinístico.

#### EXEMPLO 1.2 Lançamento de um dado

Consideremos o experimento aleatório “lançamento de um dado”. O espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , sendo, portanto, um espaço discreto. Os eventos elementares são  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$ ,  $\{6\}$ . Outros eventos são: “face par” =  $\{2, 4, 6\}$ , “face ímpar” =  $\{1, 3, 5\}$ , “face ímpar menor que 5” =  $\{1, 3\}$ , etc.

#### EXEMPLO 1.3 Lançamento de duas moedas

Consideremos o lançamento simultâneo de duas moedas. Vamos representar por  $K$  a ocorrência de cara e por  $C$  a ocorrência de coroa. Um espaço amostral para esse experimento é  $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$ , que também é um espaço discreto. Os eventos simples são  $\{KK\}$ ,  $\{KC\}$ ,  $\{CK\}$ ,  $\{CC\}$  e um outro evento é “cara no primeiro lançamento” =  $\{KC, KK\}$ . Para esse mesmo experimento, se estivermos interessados apenas no número de caras, o espaço amostral poderá ser definido como  $\Omega = \{0, 1, 2\}$ .

#### EXEMPLO 1.4 Medição do nível de ruído

Considere o experimento que consiste em medir, diariamente e durante um mês, em decibéis, o nível de ruído na vizinhança da obra de construção do metrô em Ipanema. O espaço amostral associado a este experimento é formado pelos números reais positivos, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo. Um evento: observar níveis superiores a 80 decibéis, representado pelo intervalo  $(80, \infty)$ , que corresponde a situações de muito barulho.

#### EXEMPLO 1.5 Bolas em uma urna

Uma urna contém 4 bolas, das quais 2 são brancas (numeradas de 1 a 2) e 2 são pretas (numeradas de 3 a 4). Duas bolas são retiradas dessa urna, sem reposição. Defina um espaço amostral apropriado para esse experimento e os seguintes eventos:

- $A$  : a primeira bola é branca;  
 $B$  : a segunda bola é branca;  
 $C$  : ambas as bolas são brancas;

### Solução

Considerando a numeração das bolas, o espaço amostral pode ser definido como:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}\end{aligned}$$

Os eventos são:

$$\begin{aligned}A &= \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; i \neq j\} \\ &= \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (3, 2), (4, 2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \{(i, j) : i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}\end{aligned}$$

### EXEMPLO 1.6 Cartas de um baralho

Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das seguintes cores: azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e, em seguida, liste os eventos:

- $A$  : todas as cartas selecionadas são vermelhas;  
 $B$  : uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas;  
 $C$  : três diferentes cores ocorrem;  
 $D$  : todas as quatro cores ocorrem.

### Solução

Vamos denotar por  $A, V, P$  e  $B$  as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então,

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = A, V, P, B; i = 1, 2, 3\}$$

Os eventos são:

$$A = \{(V, V, V)\}$$

$$B = \{(V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, V, A), (P, A, V)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (V, A, P), (V, P, A), (A, V, P), (A, P, V), (P, V, A), (P, A, V), \\ (V, A, B), (V, B, A), (A, V, B), (A, B, V), (B, V, A), (B, A, V), \\ (V, B, P), (V, P, B), (B, V, P), (B, P, V), (P, V, B), (P, B, V), \\ (B, A, P), (B, P, A), (A, B, P), (A, P, B), (P, B, A), (P, A, B) \end{array} \right\}$$

Como temos quatro cores diferentes e apenas três extrações, não é possível obter todas as cores. Logo,

$$D = \emptyset$$

## 1.3 Operações com eventos aleatórios

### 1.3.1 Interseção

O evento *interseção* de dois eventos  $A$  e  $B$  é o que equivale à ocorrência simultânea de  $A$  e  $B$  (ver Figura 1.1). Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por  $A \cap B$ .

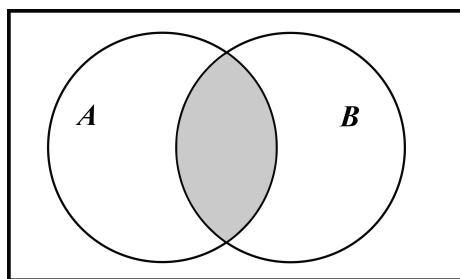


Figura 1.1 – Interseção de dois eventos:  $A \cap B$

Note que

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \quad (1.1)$$

#### EXEMPLO 1.7 Lançamento de dois dados - continuação

Consideremos o experimento “lançamento de dois dados” os eventos  $A$  = “soma das faces é um número par” e  $B$  = “soma das faces é um número maior que 9”. Calcule  $A \cap B$ .

#### Solução

O espaço amostral desse experimento, que tem 36 elementos, é

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

Para que um elemento pertença à interseção  $A \cap B$ , ele tem de pertencer, simultaneamente, aos eventos  $A$  e  $B$ . O evento  $B$  é

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Dos seus elementos, os únicos que pertencem ao evento  $A$ , isto é, aqueles que têm soma das faces par, são os elementos  $(4, 6)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(6, 4)$  e  $(6, 6)$ . Logo,  $A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$ . Note que não precisamos listar o evento  $A$ , que tem 18 elementos!



### 1.3.2 Exclusão

Dois eventos,  $A$  e  $B$ , são *mutuamente exclusivos* quando não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isso significa dizer que os eventos  $A$  e  $B$  não têm elementos em comum. Então, esses dois eventos serão mutuamente exclusivos quando sua interseção for o conjunto vazio, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$  (ver Figura 1.2).

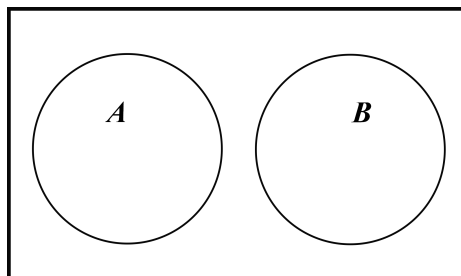


Figura 1.2 – Eventos mutuamente exclusivos:  $A \cap B = \emptyset$

#### EXEMPLO 1.8 Lançamento de dois dados

Consideremos, novamente, o experimento “lançamento de dois dados”. Sejam os eventos  $A =$  “soma das faces é ímpar” e  $B =$  “duas faces iguais”. Então,  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, porque a soma de dois números iguais é sempre um número par.

### 1.3.3 União

A *união* de dois eventos  $A$  e  $B$  é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles. Note que isso significa que pode ocorrer apenas  $A$ , ou apenas  $B$ , ou  $A$  e  $B$  simultaneamente. Esse evento será representado por  $A \cup B$ ; (ver Figura 1.3).

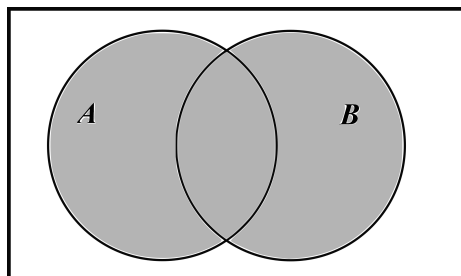


Figura 1.3 – União de dois eventos:  $A \cup B$

Observe que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \quad (1.2)$$

#### EXEMPLO 1.9 Lançamento de duas moedas

Consideremos o experimento “lançamento de duas moedas”, em que o espaço amostral é  $\Omega = \{KK, KC, CK, CC\}$ . Sejam os eventos  $A = \text{“ocorrência de exatamente 1 cara”}$  e  $B = \text{“duas faces iguais”}$ . Então  $A = \{KC, CK\}$  e  $B = \{CC, KK\}$ ; logo,  $A \cup B = \Omega$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Seja  $C$  o evento “pelo menos uma cara” e, então,  $C = \{KC, CK, KK\}$  e  $B \cup C = \Omega$  e  $B \cap C = \{KK\} \neq \emptyset$ .

### 1.3.4 Complementação

O *complementar* de um evento  $A$ , denotado por  $\bar{A}$  ou  $A^c$ , é a negação de  $A$ . Então, o complementar de  $A$  é formado pelos elementos que *não* pertencem a  $A$  (ver Figura 1.4).

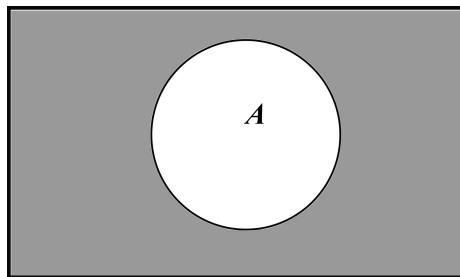


Figura 1.4 – Complementar do evento  $A = \bar{A}$

Observe que

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \quad (1.3)$$

e também que

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad (1.4)$$

#### EXEMPLO 1.10 Lançamento de um dado

Consideremos o experimento “lançamento de um dado” e seja  $A = \text{“face par”}$ . Então,  $\bar{A}$  é o evento “face ímpar”. Note que  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$  e  $\Omega = A \cup \bar{A}$ .

### 1.3.5 Diferença

A *diferença* entre dois eventos  $A$  e  $B$ , representada por  $A \setminus B$ , é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem a  $A$ , mas não pertencem a  $B$  (ver Figura 1.5). Perceba que podemos pensar em  $A \setminus B$  como o complementar de  $B$  *relativo* ao evento  $A$ .

Note que

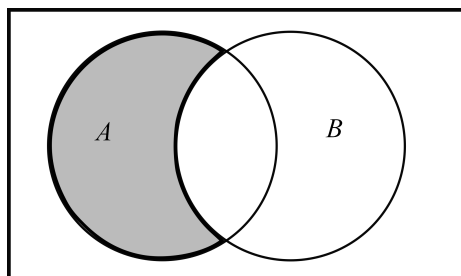
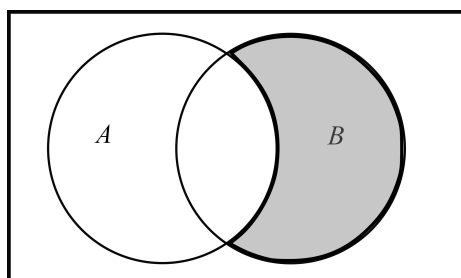
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B} \quad (1.5)$$

e também que

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad (1.6)$$

Além disso,  $A \setminus B \neq B \setminus A$ , conforme ilustrado na Figura 1.6.

De maneira análoga,  $B \setminus A$  é o complementar de  $A$  *relativo* ao evento  $B$ .

Figura 1.5 – Diferença  $A \setminus B$ Figura 1.6 – Diferença  $B \setminus A$ **EXEMPLO 1.11** Lançamento de dois dados

Consideremos, novamente, o lançamento de dois dados e os eventos  $A =$  “soma das faces é par” e  $B =$  “soma das faces é maior que 9”. Vamos considerar as duas diferenças,  $A \setminus B$  e  $B \setminus A$ . Temos

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Logo,

$$A \setminus B = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (6, 2) \right\}$$

$$B \setminus A = \{(5, 6), (6, 5)\}$$

**1.3.6 Propriedades das operações**

Sejam  $A, B, C$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então, valem as seguintes propriedades.

## 1. Identidade

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \Omega &= \Omega \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \Omega &= A \end{aligned} \quad (1.8)$$

Note que  $\Omega$  é o equivalente do conjunto universal da teoria de conjuntos.

## 2. Complementar

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= \Omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \overline{A} &= \Omega \end{aligned} \quad (1.10)$$

## 3. Involução

$$\overline{\overline{A}} = (A^c)^c = A$$

## 4. Idempotência

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 5. Comutatividade

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 6. Associatividade

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \quad (1.13)$$

## 7. Distributividade

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (1.14)$$

A ilustração da primeira propriedade está na Figura 1.7. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade  $A \cap (B \cup C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A$  e, no diagrama do centro, o evento  $B \cup C$ . Para assinalar a interseção desses dois eventos, basta considerar as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento  $A \cap (B \cup C)$ . Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A \cap B$  e, no diagrama do centro, o evento  $A \cap C$ . Para determinar a união desses dois eventos, basta considerar todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

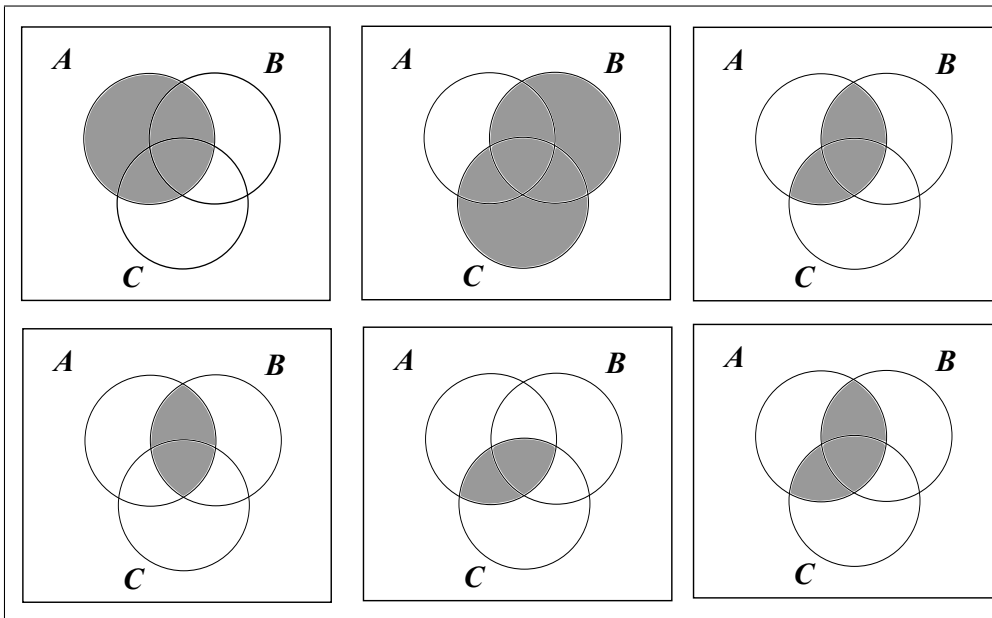


Figura 1.7 – Ilustração da propriedade distributiva:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A ilustração da segunda propriedade está na Figura 1.8. Na linha superior, ilustramos o lado esquerdo da igualdade  $A \cup (B \cap C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A$  e, no diagrama do centro, o evento  $B \cap C$ . Para determinar a união desses dois eventos, basta tomar todas as partes que estão sombreadas em algum dos diagramas, o que resulta no diagrama à direita, onde temos o evento  $A \cup (B \cap C)$ . Na linha inferior, ilustramos o lado direito da igualdade  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ : no diagrama à esquerda, temos o evento  $A \cup B$  e, no diagrama do centro, o evento  $A \cup C$ . Para determinar a interseção desses dois eventos, basta considerar todas as partes que estão sombreadas em ambos os diagramas e isso resulta no diagrama à direita, onde temos o evento  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Analisando os diagramas à direita nas duas linhas da figura, vemos que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

#### 8. Absorção

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \tag{1.15}$$

#### 9. Leis de De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Na primeira linha da Figura 1.9, ilustra-se a primeira propriedade  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ . Observe que, no diagrama à esquerda, temos o evento  $\overline{A \cap B}$ . Já nos dois diagramas centrais, temos, respectivamente,  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$ ; e no diagrama à direita,  $\overline{A} \cup \overline{B}$ , que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

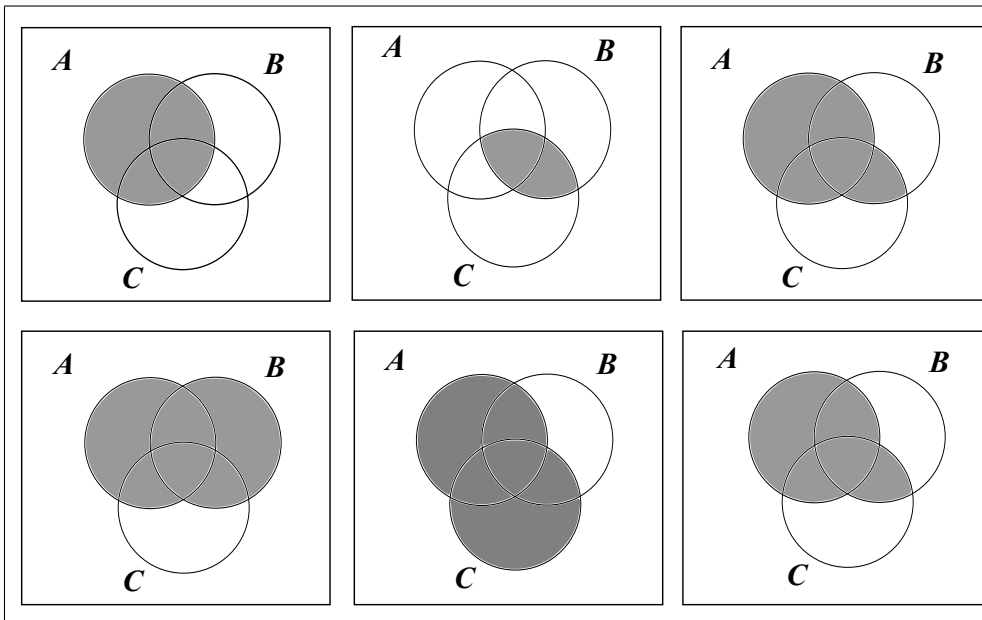


Figura 1.8 – Ilustração da propriedade distributiva:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Na segunda linha da Figura 1.9, ilustra-se a segunda propriedade  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ : no diagrama à esquerda temos  $\overline{A \cup B}$ ; nos dois diagramas centrais, respectivamente,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ ; e no diagrama à direita,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ , que é igual ao diagrama à esquerda, ou seja,  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

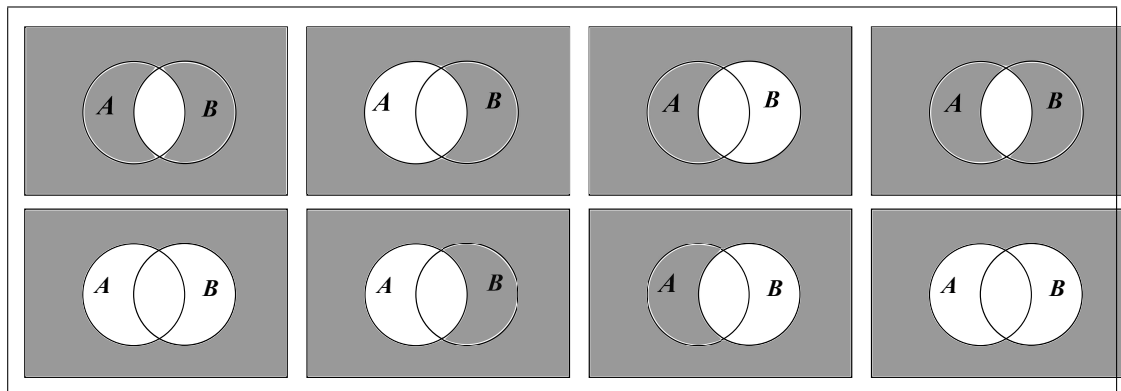


Figura 1.9 – Ilustração das leis de De Morgan



## Capítulo 2

# Probabilidade: axiomas e propriedades

### 2.1 Introdução

Considere, mais uma vez, o experimento aleatório que consiste no lançamento de um dado equilibrado. Como já visto, o espaço amostral desse experimento é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e alguns eventos de interesse são  $A = \text{“sair face 2”}$ ,  $B = \text{“sair face par”}$ , etc. A questão que se coloca, agora, é como atribuir *probabilidade* a esses eventos. Ou seja, queremos determinar um número que expresse a verossimilhança de cada um desses eventos.

Uma solução seria lançar o dado um grande número de vezes e observar a proporção dos lançamentos que resultam no evento  $A$ . Se denotarmos por  $n(A)$  o número de vezes que ocorreu o evento  $A$  em  $n$  lançamentos, a definição de probabilidade com base na frequência relativa é

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Essa definição tem alguns problemas, a saber: quão grande deve ser  $n$ ? quem garante que a razão  $\frac{n(A)}{n}$  converge e converge sempre para o mesmo número cada vez que repetimos o experimento? Temos que buscar, então, uma nova forma de definir probabilidade.

### 2.2 Definição axiomática de probabilidade

A abordagem que adotaremos será a utilização da definição axiomática da probabilidade. Isto é, vamos estabelecer algumas propriedades mínimas que se espera sejam satisfeitas pela probabilidade de qualquer evento. Tais propriedades são os *axiomas da probabilidade*.<sup>1</sup>

A título de motivação, vamos usar o experimento do lançamento de um dado, bem como

---

<sup>1</sup> *Axioma*: (1) Premissa imediatamente evidente que se admite como universalmente verdadeira sem exigência de demonstração. (2) Proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático. (dicionário *Aurélio*)



a definição frequentista vista acima. A primeira observação que podemos fazer é a seguinte: dado um experimento aleatório, desejamos atribuir probabilidade aos eventos do respectivo espaço amostral, ou seja, para cada evento, queremos determinar um número que indique a probabilidade desse evento. Assim, probabilidade é uma função definida no conjunto de todos os eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Vamos denotar tal função por  $P$ .

Uma primeira propriedade bastante intuitiva é que a probabilidade de qualquer evento deve ser um número não negativo, ou seja, para qualquer evento  $A$ ,  $P(A) \geq 0$ .

Para apresentar a segunda propriedade, considere o seguinte evento associado ao experimento do lançamento de um dado:  $C = \text{"face menor que 7"}$ . É bastante intuitivo ver que, ao lançarmos um dado, *sempre* obteremos uma face menor que 7, ou seja, a proporção de vezes que obteremos o evento  $C$  será sempre 1, não importa quantas vezes lancemos o dado. Note, também, que  $C = \Omega$ . Assim, a segunda propriedade que vamos exigir da probabilidade é que  $P(\Omega) = 1$ .

A terceira propriedade envolve a união de eventos mutuamente exclusivos. Vimos que, se  $A \cap B = \emptyset$ , então  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  e, assim, a definição frequentista da probabilidade nos daria que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . Esse é o terceiro e último axioma que precisamos para definir probabilidade.

#### DEFINIÇÃO Definição axiomática de probabilidade

Seja  $\Omega$  um espaço amostral associado a um experimento aleatório. Probabilidade é uma função, denotada por  $P$ , que associa a cada evento  $A$  de  $\Omega$  um número real  $P(A)$ , que satisfaz os seguintes axiomas:

- I. Axioma 1:  $P(A) \geq 0$
- II. Axioma 2:  $P(\Omega) = 1$
- III. Axioma 3:  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Vamos, agora, apresentar propriedades da probabilidade que resultam dos Axiomas I a III.

1.  $P(\emptyset) = 0$

#### Demonstração

Temos que  $\Omega = \Omega \cup \emptyset$  e como  $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ , podemos aplicar o Axioma III para obter que  $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ , de onde segue que  $P(\emptyset) = 0$ . ■

2.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

#### Demonstração

Temos que  $\Omega = A \cup \bar{A}$  e como  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , podemos aplicar o Axioma III para obter que  $P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$  e o Axioma II nos dá que  $1 = P(A) + P(\bar{A})$ , de onde segue o resultado. ■

$$3. P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

### Demonstração

Veja a Figura 2.1 para visualizar melhor esse resultado. É um erro comum pensar que  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ , o que pode resultar em uma probabilidade negativa. O evento  $A \setminus B$  é a parte sombreada mais escura; a parte sombreada mais clara corresponde a  $A \cap B$  e o evento  $A$  é a união dessas duas partes, ou seja,

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

de onde segue o resultado pela aplicação do Axioma III, já que as partes sombreadas não têm interseção.

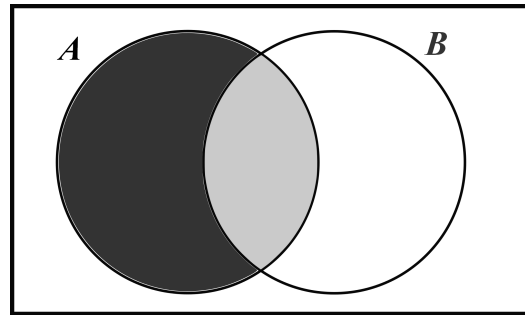


Figura 2.1 – Diferença de dois eventos  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

Volte à Figura 2.1 para ver que o evento  $B \setminus A = B \cap \bar{A}$  corresponde à parte não sombreada do evento  $B$  e que  $P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$  ■

4. Para dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

### Demonstração

Note que esse resultado generaliza o Axioma III para dois eventos quaisquer, ou seja, não estamos exigindo que  $A$  e  $B$  sejam mutuamente exclusivos. Veja a Figura 2.2:

Toda a parte sombreada representa a união dos dois eventos, que pode ser decomposta nas duas partes com diferentes sombreamentos, isto é,  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ . Como  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ , o Axioma III nos dá que

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B) \Rightarrow \\ P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) \end{aligned}$$

como consequência da Propriedade 3.

Note que, se somássemos  $P(A) + P(B)$  estaríamos contando duas vezes a probabilidade da interseção, daí o resultado.

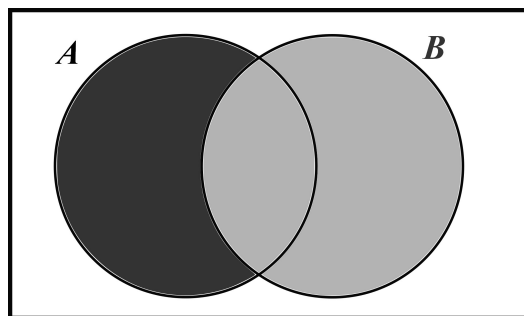


Figura 2.2 – União de dois eventos quaisquer  $A \cup B$

■

5. Se  $B \subset A$ , então  $P(B) \leq P(A)$ .

**Demonstração**

Veja a Figura 2.3; note que

$$B \subset A \Rightarrow A = B \cup (A \setminus B) \Rightarrow \\ P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$$

uma vez que  $P(A \setminus B) \geq 0$ .

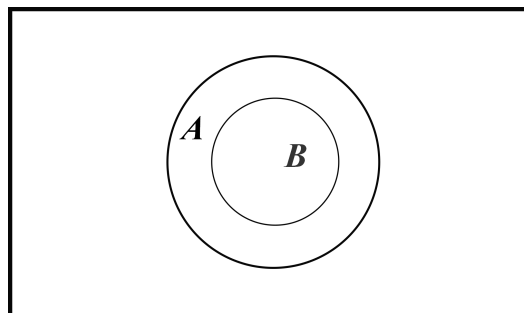


Figura 2.3 –  $B \subset A$

■

6.  $P(A) \leq 1$  para qualquer evento  $A \subset \Omega$ .

**Demonstração**

Esse resultado é consequência imediata da propriedade anterior, uma vez que  $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$

■

Eis um resumo dos axiomas e propriedades da probabilidade:

**Axiomas**

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Propriedades**

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) \leq 1$$

## 2.3 Espaços amostrais finitos e equiprováveis

Vamos considerar, agora, uma situação especial, em que o espaço amostral  $\Omega$  é finito e todos os seus eventos elementares são igualmente prováveis. Esse contexto leva à *definição clássica de probabilidade*, que foi a primeira definição formal de probabilidade, explicitada por Girolamo Cardano (1501-1576).

Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_N$  os eventos elementares de  $\Omega$ . Então,

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N$$

e esses eventos elementares são mutuamente exclusivos dois a dois. Pode-se provar, por indução, que

$$P(\Omega) = 1 = P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_N)$$

Como estamos supondo que todos eles são igualmente prováveis, resulta

$$P(E_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)} \quad \forall i$$

Mas, qualquer evento  $A \subset \Omega$  pode ser escrito como união de eventos elementares. Logo,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

**DEFINIÇÃO** Definição clássica de probabilidade

Seja  $\Omega$  um espaço amostral finito, cujos eventos elementares são todos igualmente prováveis, isto é, podemos escrever

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N$$

onde

$$P(E_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n(\Omega)} \quad \forall i$$

Então, para qualquer evento  $A \subset \Omega$ ,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

**EXEMPLO 2.1** Lançamento de um dado

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter face maior que 4?

**Solução**

Note que esse é um espaço amostral finito em que os eventos elementares são igualmente prováveis, pois estamos supondo que o dado seja honesto. Já sabemos que  $n(\Omega) = 6$  e que o evento de interesse é  $A = \{5, 6\}$ . Logo,  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . ◆◆

**EXEMPLO 2.2** Carta de um baralho

Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos 2 primeiros naipes são *vermelhas* e as dos dois últimos, *pretas*. Em cada naipe, as cartas podem ser Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Essas três últimas são *figuras* que representam a realeza. Retira-se, ao acaso, uma carta desse baralho. Qual é a probabilidade de que seja

- (a) uma figura?
- (b) uma carta preta?
- (c) uma figura ou uma carta preta?

**Solução**

Temos um espaço amostral finito em que os eventos elementares são igualmente prováveis, pois estamos retirando a carta aleatoriamente. Como há 52 cartas ao todo,

$n(\Omega) = 52$ . Vamos denotar por  $F$  o evento “carta retirada é uma figura” e por  $P$  o evento “carta retirada é preta”.

(a) Em cada um dos 4 naipes há três figuras. Logo, o número total de figuras é  $4 \times 3$ , ou seja,  $n(F) = 12$ . Logo,

$$P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

(b) Metade das cartas é de cor preta. Logo,

$$P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

$$P(F \cup P) = P(F) + P(P) - P(F \cap P) = \frac{12}{52} + \frac{26}{52} - \frac{6}{52} = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$$



**EXEMPLO 2.3** Escolha de um número

Um número é escolhido entre os 20 primeiros inteiros, de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o número escolhido seja

- (a) par?
- (b) primo?
- (c) quadrado perfeito?

**Solução**

Temos um espaço amostral finito com eventos elementares equiprováveis, pois estamos escolhendo o número aleatoriamente.

- (a) Vamos denotar por  $P$  o evento “número par”. Logo,

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \Rightarrow P(P) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

- (b) Seja  $R$  o evento “número primo”

$$R = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \Rightarrow P(R) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

- (c) Se  $Q$  é o evento “quadrado perfeito”, então,

$$Q = \{1, 4, 9, 16\} \Rightarrow P(Q) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

**EXEMPLO 2.4** Bolas em uma urna

Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 8 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso, desta urna. Qual é a probabilidade de que essa bola

- (a) não seja verde?
- (b) seja branca?
- (c) não seja nem branca nem verde?

**Solução**

Temos um total de  $6 + 2 + 8 = 16$  bolas. Logo,  $n(\Omega) = 16$ . Vamos denotar por  $P, B, V$  os eventos bola preta, branca e verde, respectivamente.

(a) Queremos a probabilidade de  $\bar{V}$ , ou seja, do complementar de  $V$ .

$$P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{8}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(c) Se a bola não é branca nem verde, ela tem de ser preta. Observe que estamos pedindo  $P(\bar{B} \cap \bar{V})$ . Pela lei de De Morgan e pela Propriedade 2 e Axioma III, temos

$$\begin{aligned} P(\bar{B} \cap \bar{V}) &= P(\overline{B \cup V}) = 1 - P(B \cup V) \\ &= 1 - [P(B) + P(V)] = 1 - \frac{2}{16} - \frac{8}{16} = \frac{6}{16} \\ &= \frac{3}{8} = P(P) \end{aligned}$$



### EXEMPLO 2.5 Lançamento de dois dados

Consideremos, novamente, o lançamento de dois dados e vamos definir os seguintes eventos:  $A =$  “soma das faces par”,  $B =$  “soma das faces maior que 9”,  $C =$  “soma das faces ímpar menor que 9”. Agora vamos calcular a probabilidade de tais eventos.

#### Solução

A visualização do espaço amostral desse experimento pode ser vista na tabela a seguir, onde, para cada par possível de resultados, apresentamos também a soma das faces:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	(1, 1) → 2	(1, 2) → 3	(1, 3) → 4	(1, 4) → 5	(1, 5) → 6	(1, 6) → 7
	2	(2, 1) → 3	(2, 2) → 4	(2, 3) → 5	(2, 4) → 6	(2, 5) → 7	(2, 6) → 8
	3	(3, 1) → 4	(3, 2) → 5	(3, 3) → 6	(3, 4) → 7	(3, 5) → 8	(3, 6) → 9
	4	(4, 1) → 5	(4, 2) → 6	(4, 3) → 7	(4, 4) → 8	(4, 5) → 9	(4, 6) → 10
	5	(5, 1) → 6	(5, 2) → 7	(5, 3) → 8	(5, 4) → 9	(5, 5) → 10	(5, 6) → 11
	6	(6, 1) → 7	(6, 2) → 8	(6, 3) → 9	(6, 4) → 10	(6, 5) → 11	(6, 6) → 12

Podemos ver que :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 18$$



$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), \\ (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 1), \end{array} \right\} \Rightarrow n(C) = 12$$

Logo,

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$



### EXEMPLO 2.6 Bolas de uma urna

Em uma urna ,há 4 bolas brancas e 3 verdes. Duas bolas são retiradas dessa urna, seqüencialmente e sem reposição. Qual é a probabilidade de obtermos

- (a) 2 bolas brancas?
- (b) 2 bolas verdes?
- (c) 2 bolas de cores diferentes?

#### Solução

Vamos indicar por  $B_1, B_2, B_3$  e  $B_4$  as quatro bolas brancas e por  $V_1, V_2$  e  $V_3$  as três bolas verdes. O espaço amostral para este experimento é

$$\Omega = \{(C_1, C_2); \quad C_1, C_2 = B_1, B_2, B_3, B_4, V_1, V_2, V_3; \quad C_1 \neq C_2\}$$

A primeira bola pode ser qualquer uma, logo, há 7 bolas possíveis. Como a extração é sem reposição, para a segunda bola, só há 6 possibilidades. Assim, o número total de pares é  $7 \times 6 = 42$ , ou seja,  $n(\Omega) = 42$ .

- (a) Para os pares do evento  $A = \text{"2 bolas brancas"}$ , a primeira bola pode ser qualquer uma das brancas, e a segunda, qualquer uma das brancas restantes. Logo,

$$n(A) = 4 \times 3 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

- (b) Analogamente, se  $B = \text{"2 bolas verdes"}$ ,

$$n(B) = 3 \times 2 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

- (c) O evento  $C = \text{"bolas de cores diferentes"}$  é o complementar do evento  $D = \text{"bolas de cores iguais"}$ . Por sua vez,  $D = A \cup B$ , e assim, como  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, temos

$$P(D) = P(A) + P(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow P(C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$



**EXEMPLO 2.7** Extração de bolas de uma urna

É interessante notar o seguinte fato sobre a extração das bolas: em vez de fazermos extrações sequenciais, podemos retirar 2 bolas simultaneamente. Em ambos os casos, as extrações são sem reposição, ou seja, a mesma bola não pode sair duas vezes. O que muda, então?

**Solução**

Nas extrações simultâneas, não podemos diferenciar a ordem das bolas: por exemplo, os pares  $V_1V_2$  e  $V_2V_1$  são os mesmos. Dessa forma, a cardinalidade do espaço amostral fica reduzida por 2, que é  $2!$ , número de maneiras de organizar as 2 bolas. Se fossem 3 bolas, ficaria reduzido por  $3! = 6$ . Para ajudar na compreensão dessa diferença, vamos listar o espaço amostral nos dois casos, bem como os eventos que estudamos.

Evento	Extrações sequenciais	Evento	Extrações simultâneas
2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3,$	2 bolas brancas	$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4,$
2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3, V_2V_1, V_2V_3, V_3V_1, V_3V_2,$	2 bolas verdes	$V_1V_2, V_1V_3, V_2V_3,$
Branca e verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3, B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3, B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3, B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3,$	Uma branca e uma verde	$B_1V_1, B_1V_2, B_1V_3, B_2V_1, B_2V_2, B_2V_3, B_3V_1, B_3V_2, B_3V_3, B_4V_1, B_4V_2, B_4V_3$
Verde e branca	$V_1B_1, V_1B_2, V_1B_3, V_1B_4, V_2B_1, V_2B_2, V_2B_3, V_2B_4, V_3B_1, V_3B_2, V_3B_3, V_3B_4$		

Note que as probabilidades são as mesmas em ambos os casos:

	P(2 verdes)	P(2 brancas)	P(cores diferentes)
Extrações sequenciais	$\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	$\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$	$\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
Extrações simultâneas	$\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$	$\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$	$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$



**EXEMPLO 2.8** Ou exclusivo

Prove que:

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Observe que a afirmação trata da probabilidade da ocorrência de *exatamente um* dos eventos  $A$  ou  $B$ .

**Solução**

Pela Propriedade 3, temos que

$$\begin{aligned}P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B)\end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, obtém-se que:

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como  $A \cap \bar{B}$  e  $\bar{A} \cap B$  são mutuamente exclusivos, a soma de suas probabilidades é a probabilidade da sua união, ou seja,

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

Logo,

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$



### EXEMPLO 2.9 Questões certas em uma prova

Em uma prova, caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um. Sorteando-se, ao acaso, um desses alunos, qual é a probabilidade de que o sorteado:

- (a) não tenha acertado qualquer um dos dois problemas?
- (b) tenha acertado apenas o segundo problema?

#### Solução

Vamos denotar por  $P_1$  e  $P_2$  os eventos “acertar problema 1” e “acertar problema 2” respectivamente. Os dados do problema nos dão que:

$$\begin{aligned}n(P_1 \cap P_2) &= 120 && \text{(acertar os 2)} \\n(P_1) &= 132 && \text{(acertar o primeiro)} \\n(\bar{P}_2) &= 86 && \text{(errar o segundo)} \\n[(P_1 \cap \bar{P}_2) \cup (\bar{P}_1 \cap P_2)] &= 54 && \text{(acertar apenas um)}\end{aligned}$$

Usando o resultado do exemplo anterior, tem-se que:

$$\begin{aligned}n[(P_1 \cap \bar{P}_2) \cup (\bar{P}_1 \cap P_2)] &= n(P_1) + n(P_2) - 2n(P_1 \cap P_2) \Rightarrow \\54 &= 132 + n(P_2) - 2 \times 120 \Rightarrow \\n(P_2) &= 162\end{aligned}$$

Logo, o número total de alunos é

$$n(\Omega) = n(P_2 \cup \bar{P}_2) = n(P_2) + n(\bar{P}_2) = 162 + 86 = 248$$

(a) Pela lei de De Morgan, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) &= P(\overline{P_1 \cup P_2}) = 1 - P(P_1 \cup P_2) = \\ &= 1 - [P(P_1) + P(P_2) - P(P_1 \cap P_2)] = \\ &= 1 - \frac{132}{248} - \frac{162}{248} + \frac{120}{248} \\ &= \frac{74}{248} = \frac{37}{124} \end{aligned}$$

(b) Pela Propriedade 3, tem-se que:

$$P(P_2 \cap \overline{P_1}) = P(P_2) - P(P_1 \cap P_2) = \frac{162 - 120}{248} = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$$



### EXEMPLO 2.10 Atribuição de probabilidade

Dado que  $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ , verifique se é possível definir uma medida de probabilidade em  $\Omega$  tal que

$$\begin{aligned} P(\{-1, 1\}) &= 0,6 \\ P(\{0, 1\}) &= 0,9 \\ P(\{-1, 0\}) &= 0,5 \end{aligned}$$

Justifique sua resposta.

#### Solução

Note que o evento  $\{-1, 1\} = \{-1\} \cup \{1\}$ . Logo, as probabilidades dadas se transformam no seguinte sistema de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} P(-1) + P(1) &= 0,6 \\ P(0) + P(1) &= 0,9 \\ P(-1) + P(0) &= 0,5 \end{aligned}$$

Da primeira equação, obtemos  $P(1) = 0,6 - P(-1)$ . Substituindo na segunda, obtemos o seguinte sistema de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{aligned} P(0) + 0,6 - P(-1) &= 0,9 \\ P(-1) + P(0) &= 0,5 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(0) - P(-1) &= 0,3 \\ P(0) + P(-1) &= 0,5 \end{aligned}$$

Somando termo a termo, resulta

$$2 \times P(0) = 0,8 \Rightarrow P(0) = 0,4$$

Substituindo, obtemos

$$P(-1) = 0,5 - P(0) = 0,5 - 0,4 \Rightarrow P(-1) = 0,1$$

Substituindo novamente, obtemos

$$P(1) = 0,6 - P(-1) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

Como todos os valores obtidos estão no intervalo  $(0, 1)$ , a atribuição dada é válida.



## Capítulo 3

# Probabilidade condicional e independência de eventos

### 3.1 Probabilidade condicional

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado e o evento  $A = \text{“sair face 2”}$ . Já vimos que o espaço amostral desse experimento é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e, se não tivermos qualquer informação além de o dado ser equilibrado,  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

Suponhamos, agora, que o dado tenha sido lançado e a seguinte informação fornecida: “saiu face par”. Qual é a probabilidade de ter saído face 2?

Note a diferença: agora nós temos uma informação parcial sobre o experimento e devemos usá-la para reavaliar a nossa estimativa. Mais precisamente, sabemos que ocorreu o evento  $B = \text{“face par”}$ . Com essa informação, podemos nos concentrar no evento  $B = \{2, 4, 6\}$ , uma vez que as faces 1, 3, 5 ficam descartadas em função da informação dada. Dentro dessas três possibilidades, a probabilidade do evento  $A$  passa a ser  $\frac{1}{3}$ .

Calculamos, assim, a probabilidade do evento  $A$ , sabendo que ocorreu o evento  $B$ . Essa probabilidade será denotada  $P(A|B)$  (lê-se probabilidade de  $A$  dado  $B$ ).

Consideremos, agora, o lançamento de dois dados equilibrados e os eventos  $A = \text{“soma das faces é par”}$  e  $B = \text{“soma das faces é maior ou igual a 9”}$ . Se sabemos que ocorreu  $B$ , qual é a probabilidade de ter ocorrido  $A$ ?

Queremos calcular  $P(A|B)$ . Temos que

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \right. \\ \left. (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Se ocorreu  $B$ , a única chance de ter ocorrido  $A$  é que tenha ocorrido o evento

$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$

e, nesse caso, a probabilidade é  $\frac{4}{10}$ , ou seja,

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esses dois exemplos ilustram o fato geral que está representado na Figura 3.1. Se sabemos que aconteceu o evento  $B$ , esse evento passa a ser o “novo espaço amostral” e, nesse novo espaço amostral, a única parte de  $A$  presente é  $A \cap B$  – a parte sombreada mais clara.

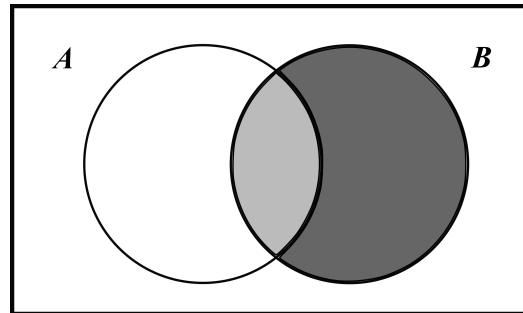


Figura 3.1 – Probabilidade condicional  $P(A|B)$ .

Com esses exemplos, ilustramos uma situação bastante comum, em que temos de calcular a probabilidade de um evento tendo uma *informação parcial*. Esse é o conceito de *probabilidade condicional*.

#### DEFINIÇÃO Probabilidade condicional

A **probabilidade condicional** do evento  $A$ , dada a ocorrência do evento  $B$ , é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Note que, nessa definição, temos que supor que o evento  $B$  é um evento possível, já que ele ocorreu. Logo, é óbvio que  $P(B) > 0$ .

#### EXEMPLO 3.1 Gênero e esporte

Um grupo de 100 alunos foi classificado quanto ao sexo e à atividade de lazer preferida, obtendo-se a distribuição dada na tabela a seguir.

Sexo	Atividade de lazer			Total
	Cinema	Praia	Esporte	
Masculino	10	12	13	35
Feminino	15	41	9	65
Total	25	53	22	100

1. Qual é a probabilidade de que uma pessoa, escolhida ao acaso nesse grupo, seja do sexo masculino?
2. Se a pessoa escolhida preferir a praia como atividade de lazer, qual será a probabilidade de ser um homem?

### Solução

Vamos definir os seguintes eventos:  $M$  = “masculino”;  $F$  = “feminino”;  $C$  = “cinema”;  $P$  = “praia”;  $E$  = “esporte”.

1. O problema pede  $P(M)$ . Como há 35 homens dentre as 100 pessoas,

$$P(M) = \frac{35}{100} = 0,35$$

2. O problema pede  $P(M|P)$ . Por definição,

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{53}{100}} = \frac{12}{53} \approx 0,2264$$

Note que a probabilidade do evento “aluno do sexo masculino” se modifica quando sabemos que a pessoa prefere ir à praia como atividade de lazer. ◆◆

### EXEMPLO 3.2 Aposentadoria

De um total de 500 empregados de uma empresa, 200 possuem plano pessoal de aposentadoria complementar, 400 contam com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa e 200 empregados possuem ambos os planos. Sorteia-se, aleatoriamente, um empregado dessa empresa.

- (a) Qual é a probabilidade de que ele tenha algum plano de aposentadoria complementar?
- (b) Qual é a probabilidade de que ele não possua qualquer plano de aposentadoria complementar?
- (c) Se o empregado conta com o plano de aposentadoria complementar oferecido pela empresa, qual é a probabilidade de que ele tenha plano pessoal de aposentadoria complementar?



- (d) Se o empregado tem plano pessoal de aposentadoria complementar, qual é a probabilidade de que ele conte com o plano de aposentadoria complementar da empresa?

### Solução

Vamos denotar por  $E$  o evento “empregado tem o plano aposentadoria complementar da empresa” e por  $P$  o evento “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. O problema diz que

$$P(P) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \quad P(E) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} \quad P(P \cap E) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Note que essas informações podem ser dispostas em forma de tabela, como podemos ver a seguir:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da Empresa	Sim	<b>200</b>	200	<b>400</b>
	Não	0	100	100
Total		<b>200</b>	300	<b>500</b>

Os números em negrito são as informações dadas no problema. O restante é calculado observando-se os totais de linha e de coluna.

- (a) O problema pede

$$P(P \cup E) = P(P) + P(E) - P(P \cap E) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

- (b) O problema pede

$$P(\overline{P} \cap \overline{E}) = P(\overline{P \cup E}) = 1 - P(P \cup E) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

- (c) O problema pede

$$P(P|E) = \frac{P(P \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

- (d) O problema pede

$$P(E|P) = \frac{P(P \cap E)}{P(P)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 1$$



### EXEMPLO 3.3 Campanha publicitária

A probabilidade de que uma nova campanha publicitária fique pronta antes do prazo estipulado pela diretoria foi estimada em 0,60. A probabilidade de que a diretoria aprove essa campanha é de 0,50. A probabilidade de que ambos os objetivos sejam atingidos é 0,30.

- (a) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos objetivos seja atingido?
- (b) Qual é a probabilidade de que nenhum objetivo seja atingido?
- (c) Se a campanha ficar pronta antes do prazo estipulado, qual é a probabilidade de ela ser aprovada pela diretoria?

### Solução

Vamos definir os eventos  $P$  = “campanha pronta antes do prazo” e  $A$  = “diretoria aprova campanha”. O problema fornece as seguintes informações:

$$P(P) = 0,6 \quad P(A) = 0,5 \quad P(A \cap P) = 0,3$$

(a)  $P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$

(b)  $P(\bar{A} \cap \bar{P}) = P(\overline{A \cup P}) = 1 - P(A \cup P) = 0,2$

(c)  $P(A|P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$



É interessante notar que a probabilidade condicional apresentada acima *realmente* define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa o número  $P(A|B)$  a cada evento  $A$  de  $\Omega$  satisfaz os axiomas de probabilidade. De fato:

**Axioma 1:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

pois  $P(A \cap B) \geq 0$  e  $P(B) > 0$ .

**Axioma 2:**

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Na verdade, como  $P(B|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ , toda a probabilidade condicional está concentrada em  $B$ , o que justifica considerarmos  $B$  como o novo espaço amostral para essa nova lei de probabilidade.

**Axioma 3:**

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  dois eventos mutuamente exclusivos (veja a Figura 3.2). Usando a propriedade distributiva, temos

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)}$$

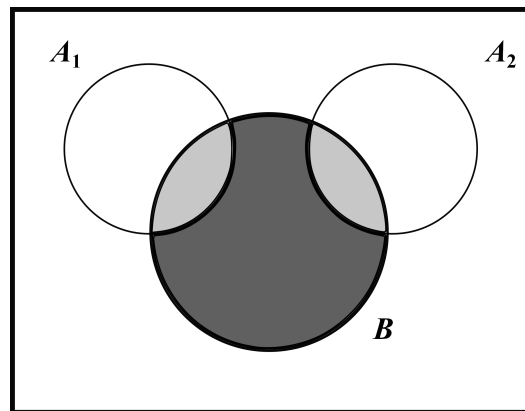


Figura 3.2 –  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ .

Mas, como  $A_1$  e  $A_2$  são mutuamente exclusivos, resulta que  $(A_1 \cap B)$  e  $(A_2 \cap B)$  também o são – esses dois eventos correspondem à parte sombreada mais clara da figura. Logo,

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\
 &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \\
 &= P(A_1|B) + P(A_2|B)
 \end{aligned}$$

Sendo a probabilidade condicional uma lei de probabilidade, todas as propriedades vistas anteriormente, que eram consequência dos axiomas, valem também para a probabilidade condicional. A propriedade que usaremos com maior frequência é  $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$ .

*Observe que a definição de probabilidade condicional está vinculada ao evento  $B$  ao qual estamos condicionando. Ou seja, se condicionarmos a outro evento  $C$ , estaremos definindo uma outra função de probabilidade – a função de probabilidade condicional em  $C$ .*

### 3.1.1 Regra da multiplicação

A definição de probabilidade condicional leva a um resultado importante, conhecido como *regra da multiplicação*.

**!** Regra da multiplicação para dois eventos

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(B) P(A|B) \\ P(A) P(B|A) \end{cases}$$

Esse resultado nos permite calcular a probabilidade da interseção de dois eventos e é muito útil para modelar experimentos que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas, uma seguida da outra. Em tais situações, pode ser útil desenhar um *diagrama de árvore* para ilustrar os eventos em questão. Vamos ver alguns exemplos.

#### EXEMPLO 3.4 Radar

Se um avião está presente em determinada área, um radar detecta sua presença com probabilidade 0,99. No entanto, se o avião não está presente, o radar detecta erradamente a presença de um avião com probabilidade 0,02. A probabilidade de um avião estar presente nessa área é de 0,05. Qual é a probabilidade de um falso alarme? Qual é a probabilidade de o radar deixar de detectar um avião? (Note que esses são os dois erros possíveis nessa situação.)

#### Solução

Vamos definir os eventos a seguir.

$A$  = “avião presente”

$D$  = “radar detecta presença de avião”

Os eventos complementares são:

$\bar{A}$  = “avião não está presente”

$\bar{D}$  = “radar não detecta avião”

O problema nos fornece as seguintes informações:

$$\Pr(D|A) = 0,99 \quad \Pr(D|\bar{A}) = 0,02 \quad \Pr(A) = 0,05$$

Pela lei do evento complementar, temos que

$$\Pr(\bar{D}|A) = 0,01 \quad \Pr(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98 \quad \Pr(\bar{A}) = 0,95$$

Na Figura 3.3, este experimento é ilustrado através de um diagrama de árvore. Cada nó na árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionada à ocorrência de todos os eventos representados pelos nós anteriores no caminho correspondente. Assim, a parte superior da

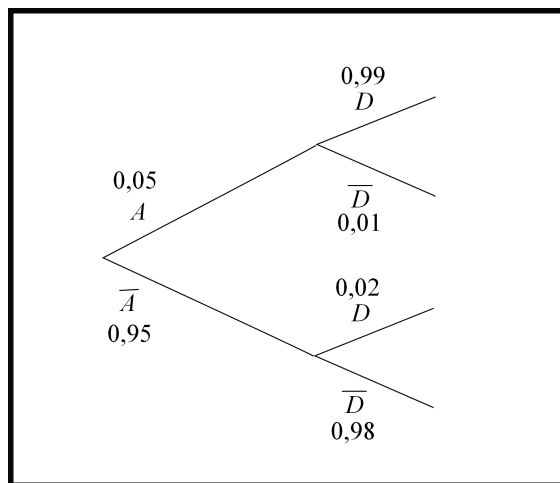


Figura 3.3 – Problema do radar

árvore corresponde à ocorrência do evento “radar detecta avião”, condicionada à ocorrência do evento “avião presente”. Já a parte inferior corresponde à ocorrência do evento “radar não detecta avião”, condicionada à ocorrência do evento “avião não está presente”.

O problema pede

$$\Pr(D \cap \bar{A}) \quad \text{falso alarme}$$

$$\Pr(\bar{D} \cap A)$$

Pela regra da multiplicação, temos:

$$P(D \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) P(D|\bar{A}) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

$$P(\bar{D} \cap A) = P(A) P(\bar{D}|A) = 0,05 \times 0,01 = 0,0005$$

Note que a probabilidade de um erro é a soma dessas probabilidades.



### EXEMPLO 3.5 Extração de 2 cartas

Considere que duas cartas de um baralho (13 cartas de cada um dos naipes copas, paus, ouros, espadas) sejam extraídas, sem reposição, uma depois da outra. Qual é a probabilidade de

- nenhuma das duas ser de copas?
- pelo menos uma carta ser de copas?

**Solução**

Para solucionar esse problema, devemos notar que as cartas no baralho são igualmente prováveis, antes e depois da primeira extração. Vamos definir os seguintes eventos:

$C_1$  = copas na primeira extração

$C_2$  = copas na segunda extração

Na Figura 3.4, temos o diagrama de árvore que representa esse experimento.

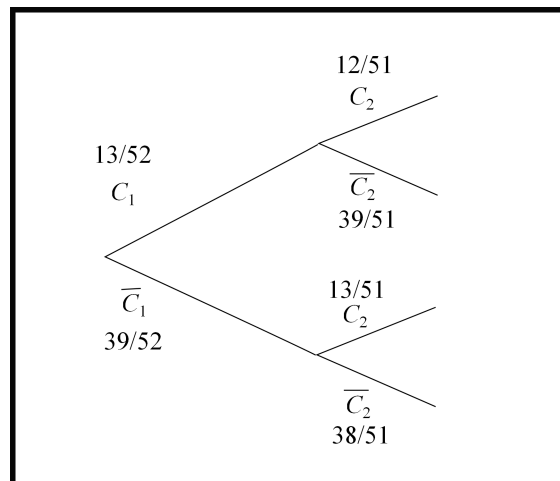


Figura 3.4 – Extração de 2 cartas de um baralho

A parte superior da árvore corresponde à ocorrência de copas na primeira extração – evento  $C_1$  – e a parte inferior à não-ocorrência de copas na primeira extração – evento  $\bar{C}_1$ . Na primeira extração, temos 13 cartas de copas e 39 que não são de copas. Logo,

$$P(C_1) = \frac{13}{52}$$

$$P(\bar{C}_1) = \frac{39}{52}$$

Na segunda extração, dado que na primeira saiu copas, temos 12 cartas de copas e 39 cartas que não são de copas em um baralho com 51. O evento representado pelo caminho superior da árvore é  $C_1 \cap C_2$  e sua probabilidade é

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2|C_1) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$$

Continuando com a parte superior, vemos que

$$P(C_1 \cap \bar{C}_2) = P(C_1)P(\bar{C}_2|C_1) = \frac{13}{52} \times \frac{39}{51}$$

Note que, pela lei do complementar,  $P(C_2|C_1) + P(\bar{C}_2|C_1) = 1$ .

Na parte inferior, temos:

$$P(\bar{C}_1 \cap C_2) = P(\bar{C}_1)P(C_2|\bar{C}_1) = \frac{39}{52} \times \frac{13}{51}$$

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2|\bar{C}_1) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$$

Novamente, pela lei do complementar,  $P(C_2|\bar{C}_1) + P(\bar{C}_2|\bar{C}_1) = 1$ .

A partir desse diagrama de árvore podemos calcular qualquer probabilidade desejada. Por exemplo, o evento “nenhuma carta de copas” é o evento  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ , e o evento “pelo menos uma carta de copas”, o complementar do evento “nenhuma carta de copas”. ♦♦

### EXEMPLO 3.6 Três cartas de um baralho

Suponhamos agora a extração de três cartas sem reposição e o evento “nenhuma carta de copas”. Como podemos generalizar a regra da multiplicação para esse caso?

#### Solução

Como antes, vamos definir os eventos  $C_i$  = “carta de copas na  $i$ -ésima extração,  $i = 1, 2, 3$ . Veja a Figura 3.5, que ilustra o espaço amostral desse experimento.

Como antes, quando caminhamos ao longo de cada galho no diagrama de árvores, cada nó representa a ocorrência de um evento condicional à ocorrência dos eventos anteriores. Por exemplo, vamos considerar o galho superior: o primeiro nó corresponde ao evento  $C_1$ ; o segundo, ao evento  $C_2$ , condicionado à ocorrência de  $C_1$ ; e o terceiro e último, ao evento  $C_3$ , condicionado à ocorrência de  $C_1 \cap C_2$ . Quando multiplicamos as probabilidades desses 3 eventos, obtemos a seguinte probabilidade da interseção:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2|C_1) \times P(C_3|C_1 \cap C_2) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$$

Analogamente, a probabilidade de não sair qualquer carta de copas nas 3 extrações é

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3) = P(\bar{C}_1) \times P(\bar{C}_2|\bar{C}_1) \times P(\bar{C}_3|\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

♦♦

Estes exemplos ilustram a regra geral da multiplicação.

#### ! Regra geral da multiplicação

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma sequência de eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

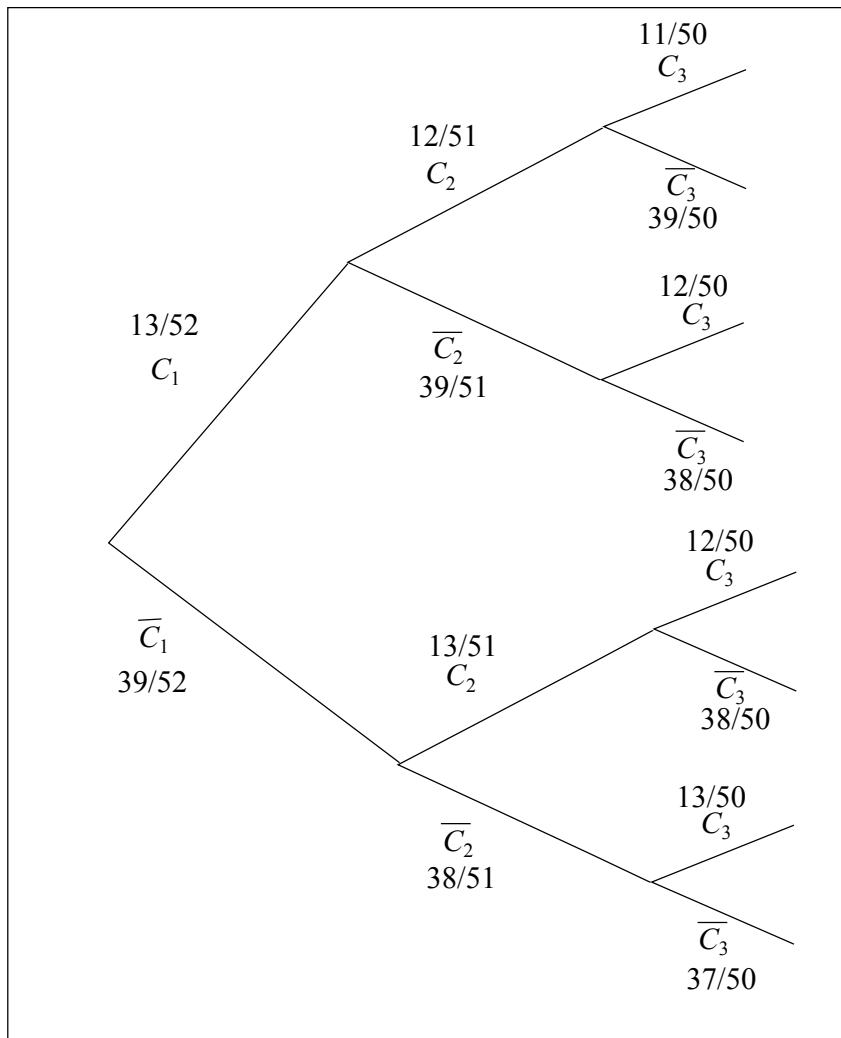


Figura 3.5 – Extração de 3 cartas de um baralho

### EXEMPLO 3.7 Transporte público e bandejão

Em uma pesquisa realizada com um grupo de alunos da UFF, constatou-se que 10% dos estudantes não utilizam transporte público para ir às aulas e que 65% dos estudantes que utilizam o transporte público fazem refeições no bandejão do campus. Selecionando-se, aleatoriamente, um estudante desse grupo, calcule a probabilidade de que ele use transporte público e faça refeições no bandejão.

#### Solução

Vamos definir os seguintes eventos:  $T$  = “aluno utiliza transporte público” e  $B$  = “aluno come no bandejão”. O problema nos fornece

$$P(\bar{T}) = 0,10 \quad P(B|T) = 0,65$$

O problema pede

$$P(T \cap B) = P(T) P(B|T) = 0,9 \times 0,65 = 0,585$$



**EXEMPLO 3.8** Bolas de uma urna

Uma urna contém seis bolas pretas e cinco bolas amarelas. Extraem-se, sequencialmente, três bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as três bolas sejam da mesma cor?

**Solução**

Vamos definir os eventos  $P_i$  = “bola preta na extração  $i$ ” e  $A_i$  = “bola amarela na extração  $i$ ”,  $i = 1, 2, 3$ .

Seja  $M$  = “3 bolas de mesma cor”. Então,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(P_1) \times P(P_2|P_1) \times P(P_3|P_1 \cap P_2) + P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{4}{33} + \frac{2}{33} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

**3.2 Independência de eventos**

Considere novamente um baralho usual, com 52 cartas, 13 de cada naipe, do qual será retirada uma carta. Vamos definir os seguintes eventos:

$C$  = “carta é de copas”

$R$  = “carta é um rei”

$V$  = “carta é vermelha”

Já vimos que  $P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ;  $P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  e  $P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ .

Vamos agora calcular as seguintes probabilidades condicionais:  $P(R|C)$  e  $P(V|C)$ . No primeiro caso, estamos calculando a probabilidade de sair um rei, dado que a carta é de copas. No segundo caso, estamos calculando a probabilidade de sair uma carta vermelha, dado que saiu uma carta de copas.

$$P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = P(R)$$

$$P(V|C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1 \neq P(V)$$

No primeiro caso, saber que a carta é de copas não acrescentou informação útil para avaliarmos a probabilidade de sair rei, ou seja, saber ou não que saiu copas não altera a probabilidade de sair rei.

Já no segundo caso, saber que saiu carta de copas faz com que mudemos a probabilidade de sair carta vermelha. Como podemos ver, se sabemos que saiu carta de copas, então a carta *tem* de ser vermelha.

Esses exemplos ilustram um conceito importante. No primeiro caso, dizemos que os eventos  $R$  e  $C$  são *independentes* e, no segundo caso, que os eventos  $V$  e  $C$  são *dependentes*. No primeiro caso, o conhecimento da ocorrência de  $C$  não ajuda para reavaliarmos a probabilidade de  $C$ . Já, no segundo caso, o conhecimento da ocorrência de  $C$  faz com que mudemos nossa estimativa da probabilidade de  $V$ .

#### DEFINIÇÃO Eventos independentes

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,  $A$  e  $B$  são **independentes** se

$$P(A|B) = P(A)$$

Essa definição tem algumas implicações importantes.

- $A$  e  $B$  são independentes  $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

#### Demonstração

$$A, B \text{ independentes} \Rightarrow P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A$  e  $B$  são independentes.

#### Demonstração

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow A, B \text{ independentes.}$$

Provamos, então, que  $A$  e  $B$  são independentes  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Esse resultado nos permite estabelecer uma outra definição equivalente para a independência de dois eventos.

**DEFINIÇÃO** Eventos independentes

Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Então,  $A$  e  $B$  são **independentes** se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $B$  e  $A$  também o são (comutatividade).

**Demonstração**

$$A, B \text{ independentes} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow B, A \text{ independentes.}$$

- Se  $A$  e  $B$  são independentes  $\Rightarrow \bar{A}, B$  são independentes.

**Demonstração**

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)P(\bar{A}) \Rightarrow \bar{A}, B \text{ independentes.}$$

- $A$  e  $B$  independentes  $\Rightarrow \bar{A}, \bar{B}$  independentes.

**Demonstração**

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(\bar{A}) - P(B)P(\bar{A}) \\ &= P(\bar{A})[1 - P(B)] \\ &= P(\bar{A})P(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ independentes.} \end{aligned}$$

- Se  $A$  e  $B$  são eventos possíveis e independentes  $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ .

**Demonstração**

Por hipótese, temos que  $P(A) > 0$  e  $P(B) > 0$ . Pela hipótese de independência,  $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ .

Logo, se  $A$  e  $B$  são eventos possíveis e independentes, então  $A$  e  $B$  **não são mutuamente exclusivos**.

- Se  $A$  e  $B$  são eventos possíveis tais que  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$  não são independentes.

**Demonstração**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \neq P(A) \Rightarrow A, B \text{ não são independentes.}$$

Logo, se  $A$  e  $B$  são eventos possíveis e mutuamente exclusivos, então  $A$  e  $B$  não são independentes.

### EXEMPLO 3.9 Previdência, continuação

No Exemplo 3.2, analisamos os dados que serão apresentados na tabela a seguir, referentes à participação de funcionários de uma empresa em planos de aposentadoria complementar:

		Plano pessoal		Total
		Sim	Não	
Plano da Empresa	Sim	200	200	400
	Não	0	100	100
Total		200	300	500

Naquele exemplo, estudamos os eventos  $E$  = “empregado tem o plano de aposentadoria complementar da empresa” e  $P$  = “empregado possui plano pessoal de aposentadoria complementar”. Vamos ver se esses eventos são independentes.

#### Solução

Temos

$$P(P) = \frac{2}{5} \quad P(E) = \frac{4}{5}$$

$$P(P \cap E) = \frac{2}{5} \neq P(P)P(E)$$

Logo, os eventos  $P$  e  $E$  não são independentes. Outra forma de ver isso é

$$P(E|P) = \frac{200}{200} = 1 \neq P(E) = \frac{4}{5}$$





## Capítulo 4

# Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Neste capítulo, você estudará dois importantes teoremas da teoria das probabilidades e verá suas aplicações em diversas situações envolvendo tomadas de decisão. Esses teoremas, conhecidos como Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes, resultam diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades já vistas da probabilidade. Sua apresentação será feita, inicialmente, através de exemplos, para que você compreenda bem o contexto de sua aplicação. Em seguida, será apresentada a formulação geral desses teoremas.

### 4.1 Exemplos

#### EXEMPLO 4.1 Produção de duas máquinas

Em uma linha de produção de certa fábrica, determinada peça é produzida em duas máquinas. A máquina 1, mais antiga, é responsável por 35% da produção, e os 65% restantes vêm da máquina 2. A partir dos dados passados e das informações do fabricante das máquinas, estima-se em 5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 1 e em 2,5% a proporção de peças defeituosas produzidas pela máquina 2. As peças produzidas pelas duas máquinas seguem para o departamento de armazenamento e embalagem para venda posterior, sem distinção de qual máquina a produziu.

- Qual é a proporção de peças defeituosas colocadas no mercado por essa fábrica?
- Se um cliente identificar uma peça defeituosa, qual será a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina 1?

#### Solução

- (a) Na Figura 4.1, representa-se a situação em análise. Nosso experimento aleatório é o sorteio de uma peça produzida por essa fábrica, e nosso espaço amostral, representado pelo retângulo, é o conjunto de todas as peças produzidas em determinado período. Podemos ver que o espaço amostral está dividido em 2 eventos mutuamente exclusivos:  $M_1$ , peças produzidas pela máquina 1, e  $M_2$ , peças produzidas pela máquina 2. Mais precisamente,  $\Omega = M_1 \cup M_2$  – isso significa que  $M_1$  e  $M_2$  formam uma *partição* do espaço amostral<sup>1</sup>. Outro evento de interesse é  $D =$  “peça é defeituosa”. Podemos ver que esse evento tem interseção com os eventos  $M_1$  e  $M_2$ , ou seja, há peças defeituosas produzidas na máquina 1 e na máquina 2.

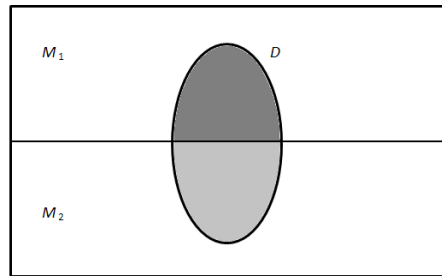


Figura 4.1 – Espaço amostral para o Exemplo 4.1

Pelos dados do problema, temos uma estimativa *a priori* das proporções de peças produzidas em cada máquina, ou seja, as probabilidades *a priori* dos eventos  $M_1$  e  $M_2$  são:

$$P(M_1) = 0,35$$

$$P(M_2) = 0,65$$

Sabemos, também, a proporção de peças defeituosas produzidas por cada máquina. Essa proporção se traduz em uma probabilidade condicional: se a peça foi produzida pela máquina 1, existe 5% de chance de ser defeituosa. Para a máquina 2, essa chance reduz-se a 2,5%. Em termos de probabilidade, temos

$$P(D|M_1) = 0,05$$

$$P(D|M_2) = 0,025$$

Como  $M_1$  e  $M_2$  formam uma partição de  $\Omega$ , podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)$$

Mas  $M_1$  e  $M_2$  são mutuamente exclusivos; logo,  $(D \cap M_1)$  (parte sombreada mais clara) e  $(D \cap M_2)$  (parte sombreada mais escura) também o são. Assim, pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2)] \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> $A_1, A_2, \dots, A_n$  formam uma partição do espaço amostral  $\Omega$  se (i)  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ ; (ii)  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Pelo teorema da multiplicação, sabemos que  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ . Logo,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) \\ &= 0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025 = 0,03375 \end{aligned}$$

Observe que a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma *média ponderada* das probabilidades de defeito em cada máquina. Os pesos são definidos de acordo com o nível de produção (probabilidade) de cada máquina.

- (b) Na segunda parte do exemplo, temos uma informação sobre a peça: ela é defeituosa, isto é, sabemos que ocorreu o evento  $D$ . O que o problema pede é que, com essa informação, reavaliemos a probabilidade de a peça ter sido produzida pela máquina 1. Essa probabilidade é chamada de probabilidade *a posteriori*, ou seja, é a probabilidade que calculamos com base em informação parcial obtida depois de realizado o experimento de sorteio e teste da peça. Em notação matemática, temos de calcular  $P(M_1|D)$ . Por definição, temos

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, resulta

$$\begin{aligned} P(M_1|D) &= \frac{P(M_1)P(D|M_1)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,05}{0,35 \times 0,05 + 0,65 \times 0,025} \\ &= \frac{0,0175}{0,03375} = 0,5185 \end{aligned}$$

Compare os resultados:

- Sem qualquer informação sobre o resultado do experimento, nossa estimativa para a probabilidade de ocorrência de  $M_1$  — peça produzida pela máquina 1 — era 0,35.
- Com a informação de que a peça é defeituosa, a probabilidade de ter sido produzida pela máquina 1 aumenta para 0,5185.



#### EXEMPLO 4.2 Produção de três máquinas

Considere novamente a situação do Exemplo 4.1, mas com a seguinte modificação: as peças são produzidas em três máquinas, que são responsáveis por 30%, 35% e 35% da produção, respectivamente. As proporções de peças defeituosas produzidas por tais máquinas são 5%, 2,5% e 2%.

- (a) Qual é a proporção de peças defeituosas produzidas na fábrica?
- (b) Se um cliente identificar uma peça defeituosa, qual será a probabilidade de ela ter sido produzida na máquina 1? E na máquina 2? E na máquina 3?



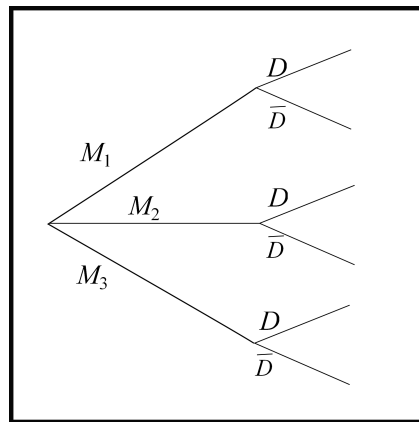


Figura 4.2 – Espaço amostral para o Exemplo 4.2

### Solução

- (a) O espaço amostral desse experimento está ilustrado no diagrama de árvore da Figura 4.2.

Como já visto anteriormente, cada galho da árvore corresponde ao condicionamento do evento aos eventos dos galhos anteriores. Assim, na parte superior da árvore, temos os eventos  $D|M_1$  e  $\bar{D}|M_1$ . Na parte do meio, temos os eventos  $D|M_2$  e  $\bar{D}|M_2$ ; e na parte inferior,  $D|M_3$  e  $\bar{D}|M_3$ .

Os dados do problema dão que

$$\begin{aligned} P(M_1) &= 0,30 & P(D|M_1) &= 0,05 \\ P(M_2) &= P(M_3) = 0,35 & P(D|M_2) &= 0,025 \\ & & P(D|M_3) &= 0,02 \end{aligned}$$

Como antes,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  formam uma partição de  $\Omega$  e, portanto, podemos escrever

$$D = (D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)$$

Mas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são mutuamente exclusivos; logo,  $(D \cap M_1)$ ,  $(D \cap M_2)$  e  $(D \cap M_3)$  também o são. Pelo Axioma 3 da probabilidade, resulta que

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap M_1) \cup (D \cap M_2) \cup (D \cap M_3)] \\ &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \end{aligned}$$

Pelo teorema da multiplicação, sabemos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3) \\ &= 0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02 = 0,03075 \end{aligned}$$

Como antes, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é uma média ponderada das probabilidades de defeito em cada máquina, com os pesos definidos de acordo com o nível de produção de cada máquina.

(b) Na segunda parte do exemplo, deseja-se saber  $P(M_1|D)$ ,  $P(M_2|D)$  e  $P(M_3|D)$ . Por definição, temos

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$

Usando a regra da multiplicação e o resultado encontrado no item anterior, temos

$$\begin{aligned} P(M_1|D) &= \frac{P(M_1)P(D|M_1)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)} \\ &= \frac{0,30 \times 0,05}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,015}{0,03075} = 0,487805 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_2|D) &= \frac{P(M_2)P(D|M_2)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,025}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,00875}{0,03075} = 0,284553 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M_3|D) &= \frac{P(M_3)P(D|M_3)}{P(M_1)P(D|M_1) + P(M_2)P(D|M_2) + P(M_3)P(D|M_3)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,02}{0,30 \times 0,05 + 0,35 \times 0,025 + 0,35 \times 0,02} \\ &= \frac{0,007}{0,03075} = 0,227642 \end{aligned}$$

Note que  $0,487805 + 0,284553 + 0,227642 = 1,000000$ . Esse resultado é imediato a partir do fato de que  $P(\Omega) = 1$ . Se a peça sorteada é defeituosa, ela só pode ter vindo de umas das três máquinas.



#### EXEMPLO 4.3 Soro da verdade

Sabe-se que um “soro da verdade”, quando aplicado em um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Um suspeito é retirado de um grupo de pessoas em que 95% jamais cometeram qualquer crime.

- (a) Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?  
 (b) Se o soro indica “culpado”, qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

#### Solução

(a) Vamos definir os seguintes eventos (veja a Figura 4.3):

$$\begin{aligned} C &= \text{"suspeito é culpado"} & \bar{C} &= \text{"suspeito é inocente"} \\ U &= \text{"soro indica culpado"} & \bar{U} &= \text{"soro indica inocente"} \end{aligned}$$

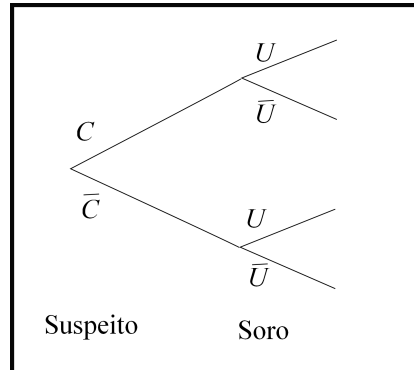


Figura 4.3 – Espaço amostral para o Exemplo 4.3

Note que você deve definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta será “culpado” ou “inocente” e não “soro acerta” ou “soro erra”. Errar ou acertar dependerá de o suspeito ser culpado ou inocente.

Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$$P(U|C) = 0,90$$

$$P(\bar{U}|\bar{C}) = 0,99$$

$$P(\bar{C}) = 0,95$$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, completamos as probabilidades necessárias:

$$P(U|C) = 0,90 \quad P(\bar{U}|C) = 0,10$$

$$P(\bar{U}|\bar{C}) = 0,99 \quad P(U|\bar{C}) = 0,01$$

$$P(\bar{C}) = 0,95 \quad P(C) = 0,05$$

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos  $C$  e  $\bar{C}$ , para os quais temos as probabilidades *a priori*. Os eventos de interesse são  $U$  e  $\bar{U}$ .

Seja o evento  $A = \text{"soro acerta o diagnóstico"}$ . Note que o soro pode diagnosticar corretamente se o suspeito é culpado ou inocente, ou seja:

$$A = (C \cap U) \cup (\bar{C} \cap \bar{U})$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C \cap U) + P(\bar{C} \cap \bar{U}) \\ &= P(C)P(U|C) + P(\bar{C})P(\bar{U}|\bar{C}) \\ &= 0,05 \times 0,90 + 0,95 \times 0,99 = 0,9855 \end{aligned}$$

(b) Queremos calcular  $P(\bar{C}|U)$ . Por definição, temos:

$$P(\bar{C}|U) = \frac{P(\bar{C} \cap U)}{P(U)}$$

O soro pode indicar culpado, sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico), ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

$$\begin{aligned} P(U) &= P(U \cap C) + P(U \cap \bar{C}) \\ &= P(U|C) \times P(C) + P(U|\bar{C}) \times P(\bar{C}) \\ &= 0,90 \times 0,05 + 0,01 \times 0,95 \\ &= 0,045 + 0,0095 = 0,0545 \end{aligned}$$

$$P(U \cap \bar{C}) = P(U|\bar{C}) \times P(\bar{C}) = 0,01 \times 0,95 = 0,0095$$

Logo,

$$P(\bar{C}|U) = \frac{0,0095}{0,0545} = 0,1743$$



#### EXEMPLO 4.4 Três moedas

Uma caixa contém três moedas. A moeda 1 é honesta, a moeda 2 tem duas caras e a moeda 3 é viciada de tal modo que cara é duas vezes mais provável que coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

- Qual é a probabilidade de observarmos cara e moeda 1?
- Qual é a probabilidade de observarmos cara?
- Se o resultado foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a moeda 1?

#### Solução

Vamos definir os eventos

$$\begin{aligned} K &= \text{cara} & C &= \text{coroa} \\ M_1 &= \text{moeda 1} & M_2 &= \text{moeda 2} & M_3 &= \text{moeda 3} \end{aligned}$$

É dado que

$$\begin{aligned} P(K|M_1) &= \frac{1}{2} \\ P(K|M_2) &= 1 \end{aligned}$$

Para a moeda 3, como a probabilidade de cara é duas vezes a probabilidade de coroa e a soma dessas probabilidades tem de ser 1, resulta que

$$P(K|M_3) = \frac{2}{3}$$

Como a moeda lançada é escolhida aleatoriamente, temos

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = \frac{1}{3}$$

Veja a Figura 4.4:

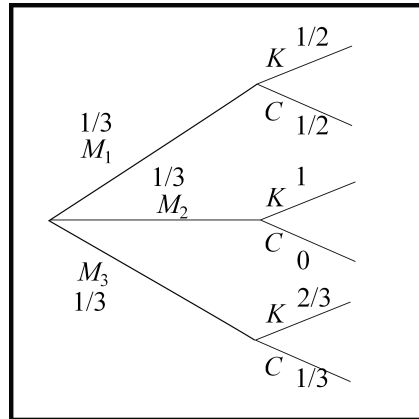


Figura 4.4 – Espaço amostral para o Exemplo 4.4

(a) Aqui a solução é consequência direta da regra de multiplicação:

$$P(K \cap M_1) = P(M_1) \times P(K|M_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(b) Os eventos que formam a partição do espaço amostral são  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Logo,

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap M_1) + P(K \cap M_2) + P(K \cap M_3) \\ &= P(M_1) \times P(K|M_1) + P(M_2) \times P(K|M_2) + P(M_3) \times P(K|M_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{6} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

(c) O problema pede

$$P(M_1|K) = \frac{P(K \cap M_1)}{P(K)} = \frac{P(M_1) \times P(K|M_1)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}$$



#### EXEMPLO 4.5 Decisão gerencial

Um gerente de banco tem de decidir se concede ou não empréstimo aos clientes que o solicitam. Ele analisa diversos dados para estudar a possibilidade de o cliente vir a ficar inadimplente. Com base em dados passados, ele estima em 15% a taxa de inadimplência. Dentre os inadimplentes, ele tem 80% de chance de tomar a decisão certa, enquanto essa chance aumenta para 90% entre os clientes adimplentes. Esse gerente acaba de recusar um empréstimo. Qual é a probabilidade de ele ter tomado a decisão correta?

### Solução

Os fatos envolvidos nesse processo decisório são: “cliente é inadimplente ou não” e “gerente concede ou não o empréstimo”. Vamos definir os seguintes eventos:

$$I = \text{“cliente é inadimplente”}$$

$$C = \text{“gerente concede empréstimo”}$$

Usaremos a notação de evento complementar para definir

$$\bar{I} = \text{“cliente é adimplente”}$$

$$\bar{C} = \text{“gerente não concede empréstimo”}$$

Note que temos duas possibilidades de acerto e duas possibilidades de erro. Os acertos são “cliente é inadimplente e gerente não concede o empréstimo” e “cliente é adimplente e gerente concede o empréstimo”. Os erros são: “cliente é inadimplente e gerente concede o empréstimo” e “cliente é adimplente e gerente não concede o empréstimo”.

A árvore que representa o espaço amostral é dada na Figura 4.5.

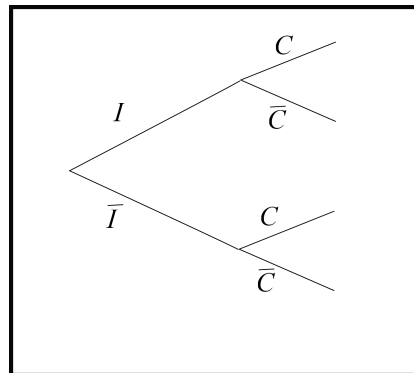


Figura 4.5 – Espaço amostral para o Exemplo 4.5

As probabilidades dadas são

$$P(I) = 0,15 \quad P(\bar{C}|I) = 0,80 \quad P(C|\bar{I}) = 0,90$$

Pela lei do complementar, temos

$$P(\bar{I}) = 0,85 \quad P(C|I) = 0,20 \quad P(\bar{C}|\bar{I}) = 0,10$$

Com relação ao que o problema pede, temos que, dado que o gerente *recusou* o empréstimo, a decisão só será certa se o cliente for *inadimplente*. Logo, temos de calcular

$$P(I|\bar{C}) = \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

Mas o gerente pode recusar o empréstimo sendo o cliente inadimplente ou não, ou seja,

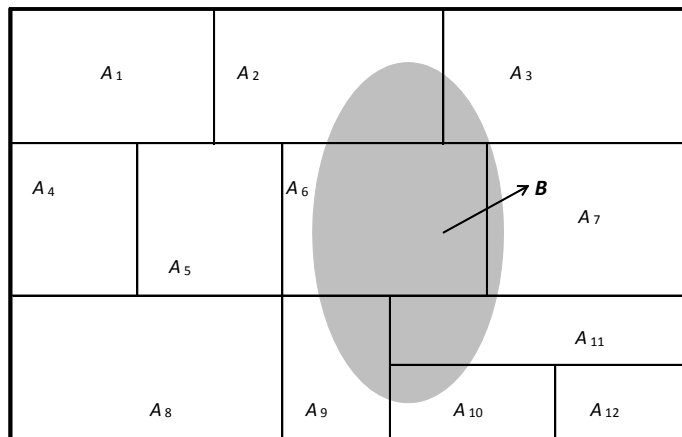
$$\begin{aligned} P(\bar{C}) &= P(\bar{C} \cap I) + P(\bar{C} \cap \bar{I}) \\ &= P(I)P(\bar{C}|I) + P(\bar{I})P(\bar{C}|\bar{I}) \\ &= 0,15 \times 0,80 + 0,85 \times 0,10 = 0,205 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(I|\bar{C}) &= \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} \\ &= \frac{P(I)P(\bar{C}|I)}{P(I)P(\bar{C}|I) + P(\bar{I})P(\bar{C}|\bar{I})} \\ &= \frac{0,15 \times 0,80}{0,205} = 0,5854 \end{aligned}$$

## 4.2 Os teoremas

Considere a Figura 4.6, onde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ .



**Figura 4.6** – Partição do espaço amostral

Como a união de todos os  $A_i$ 's é o espaço amostral, segue que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

O fato de alguns desses termos serem o conjunto vazio (por exemplo,  $B \cap A_4 = \emptyset$ ) não invalida o resultado, uma vez que  $A \cup \emptyset = A$ . Por definição de partição, os  $A_i$ 's são mutuamente

exclusivos dois a dois; logo, os eventos  $A_i \cap B$  também o são. Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)] = \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \end{aligned}$$

e a regra da multiplicação fornece

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n)$$

Esse resultado é conhecido como *Teorema da probabilidade total*.

### ! Teorema da Probabilidade Total

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e seja  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ . Então,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$$

Como visto, a probabilidade  $P(A_i)$  é denominada *probabilidade a priori do evento  $A_i$* . Continuando no contexto da Figura 4.6, suponhamos agora que  $B$  tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade *a posteriori* do evento  $A_i$ , ou seja, vamos calcular  $P(A_i|B)$ . Por definição, temos

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como *Teorema de Bayes*.

### ! Teorema de Bayes

Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma partição do espaço amostral  $\Omega$  e seja  $B$  um evento qualquer em  $\Omega$ . Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$



É importante que, na resolução de exercícios e também na aplicação prática desses teoremas, você identifique os eventos de interesse, os que definem a partição do espaço amostral e quais são as probabilidades *a priori*. Em geral, são essas probabilidades que identificam a partição de  $\Omega$ . Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar esses pontos.

#### EXEMPLO 4.6 Alunos e carros

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que ele possui um carro. Qual é a probabilidade de que o estudante sorteado seja do sexo feminino?

#### Solução

Os eventos em questão envolvem o sexo do aluno e a posse de um carro. Vamos definir os eventos de interesse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \text{homem} & M &= \text{mulher} \\ C &= \text{possui carro} & \bar{C} &= \text{não possui carro} \end{aligned}$$

Note que  $H$  e  $M$  definem uma partição do espaço amostral, assim como  $C$  e  $\bar{C}$ . No entanto, as probabilidades *a priori* dadas referem-se a  $H$  e  $M$  (o fato de ter, ou não, carro, não altera o sexo do aluno). Assim, a partição de  $\Omega$  será definida em termos desses eventos. Os dados do problema fornecem que

$$\begin{aligned} P(H) &= 0,65 & \Rightarrow & P(M) = 0,35 \\ P(C|H) &= 0,30 & \Rightarrow & P(\bar{C}|H) = 0,70 \\ P(C|M) &= 0,18 & \Rightarrow & P(\bar{C}|M) = 0,82 \end{aligned}$$

O problema pede  $P(M|C)$ , e para calcular essa probabilidade, temos de calcular  $P(C)$ . Pelo teorema da probabilidade total, sabemos que

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap M) + P(C \cap H) \\ &= P(M)P(C|M) + P(H)P(C|H) \\ &= 0,35 \times 0,18 + 0,65 \times 0,30 = 0,518 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(M|C) &= \frac{P(C \cap M)}{P(C)} = \frac{P(M)P(C|M)}{P(C)} \\ &= \frac{0,35 \times 0,18}{0,518} = 0,12162 \end{aligned}$$



## Capítulo 5

### Exercícios propostos

1. Lançam-se três moedas. Enumere o espaço amostral e os eventos  $A =$  "faces iguais";  $B =$  "cara na primeira moeda";  $C =$  "coroa na segunda e terceira moedas".
2. (a) Na Figura 5.1, assinale a área correspondente a  $\bar{A} \cap \bar{B}$   
(b) Na Figura 5.2, assinale a área correspondente a  $A \setminus B$   
(c) Na Figura 5.3, assinale a área correspondente a  $(A \cup C) \cap B$   
(d) Na Figura 5.4, assinale a área correspondente a  $(A \cup B) \cap C$

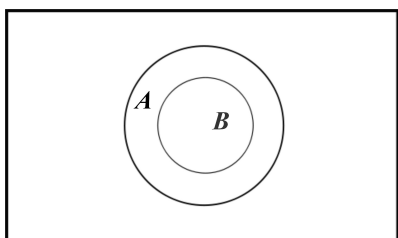


Figura 5.1 – Questão 2(a)

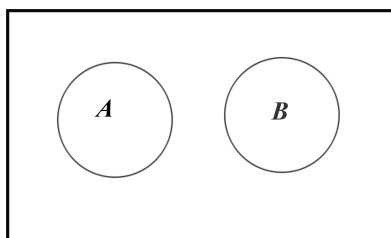


Figura 5.2 – Questão 2(b)

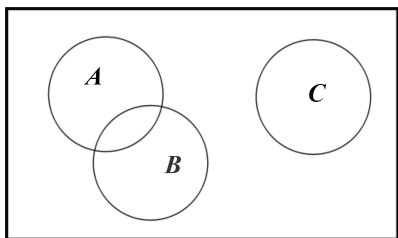


Figura 5.3 – Questão 2(c)

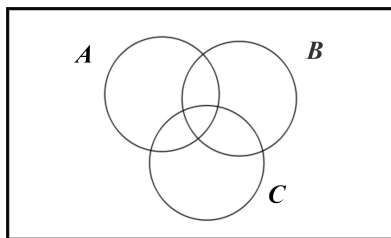


Figura 5.4 – Questão 2(d)

3. Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:
  - (a) Em uma pesquisa de mercado, conta-se o número de clientes do sexo masculino que entram em um supermercado no horário das 8 às 12 horas.
  - (b) Em um estudo de viabilidade de abertura de uma creche própria de uma grande empresa, fez-se um levantamento, por funcionário, do sexo dos filhos com menos de

5 anos de idade. O número máximo de filhos por funcionário é 4, e a informação relevante é o sexo dos filhos de cada funcionário.

- (c) Em um teste de controle de qualidade da produção, mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.
- (d) Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha até o último nome de mulher ser selecionado e anota-se o número de fichas selecionadas.
- (e) Lança-se uma moeda até aparecer cara pela primeira vez e anota-se o número de lançamentos.
- (f) Em uma urna, há 5 bolas identificadas pelas letras  $\{A, B, C, D, E\}$ . Sorteiam-se duas bolas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.
- (g) Mesmo enunciado anterior, mas as duas bolas são selecionadas simultaneamente.
4. Sejam  $A, B, C$  três eventos de um espaço amostral. Exprima os eventos a seguir usando as operações de união, interseção e complementação:

- (a) somente  $A$  ocorre;
- (b) exatamente um ocorre;
- (c)  $A, B$  e  $C$  ocorrem;
- (d) nenhum ocorre;
- (e) pelo menos um ocorre;
- (f) exatamente dois ocorrem.
- (g) pelo menos dois ocorrem;
- (h) no máximo dois ocorrem.

5. Considere o lançamento de dois dados e defina os seguintes eventos:

$A$  = soma par

$B$  = soma  $\geq 9$

$C$  = máximo das faces é 6

Calcule  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ,  $B \cap C$ ,  $B \setminus C$ .

6. Seja  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Considere os seguintes eventos:

- $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$
- $D = \{9\}$

Determine os elementos dos seguintes eventos:

- (a)  $A \cup (B \cap D)$
- (b)  $B \cup (A \cap D)$
- (c)  $\bar{A} \cup \bar{B}$
- (d)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

- (e)  $A \setminus B$
- (f)  $B \setminus A$
- (g)  $\overline{A \cap B}$
- (h)  $\overline{A \cup B}$

7. Se  $P(A) = 1/3$  e  $P(\overline{B}) = 1/4$ ,  $A$  e  $B$  podem ser mutuamente exclusivos?
8. Sejam  $A$  e  $B$  eventos mutuamente exclusivos tais que  $P(A) = 0,5$  e  $P(B) = 0,4$ .
- (a) Calcule  $P(A \cup B)$ .
  - (b) Calcule  $P(B \cap \overline{A})$ .
9. Em uma cidade há três clubes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Em um grupo de 1000 famílias constatou-se que 470 são sócias do clube  $A$ ; 420 são sócias do clube  $B$ , 315 são sócias do clube  $C$ ; 110 são sócias dos clubes  $A$  e  $B$ ; 220 são sócias dos clubes  $A$  e  $C$ ; 140 são sócias dos clubes  $B$  e  $C$  e 75 são sócias dos 3 clubes. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual é a probabilidade de que ela
- (a) não seja sócia de qualquer um dos clubes?
  - (b) seja sócia de apenas um clube?
  - (c) seja sócia de pelo menos dois clubes?
10. Em um levantamento em um bairro de 1.000 moradores, verifica-se que:
- 220 têm curso superior;
  - 160 são casados;
  - 100 estão desempregados;
  - 50 têm curso superior, são casados e estão empregados;
  - 60 têm curso superior e estão desempregados;
  - 20 têm curso superior, são casados e estão desempregados.
- Escolhe-se ao acaso um morador desse bairro. Qual é a probabilidade de que ele
- (a) tenha curso superior e seja casado?
  - (b) ou tenha curso superior e seja casado ou esteja empregado?
  - (c) ou tenha curso superior ou esteja desempregado?
11. Um lote é formado por 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Um artigo é escolhido ao acaso. Ache a probabilidade de que:
- (a) ele não tenha defeitos;
  - (b) ele não tenha defeitos graves;
  - (c) ele seja perfeito ou tenha defeitos graves.
12. Quatro bolsas de estudo serão sorteadas entre 30 estudantes, dos quais 12 são do sexo masculino e 18 são do sexo feminino. Qual a probabilidade de que haja entre os sorteados:

- (a) uma pessoa do sexo masculino?  
 (b) no máximo uma pessoa do sexo feminino?  
 (c) pelo menos uma pessoa de cada sexo?
13. Em uma urna há 15 bolas numeradas de 1 a 15. Três bolas são retiradas da urna sem reposição. Qual é a probabilidade de que:
- (a) o menor número seja 7?  
 (b) o maior número seja 7?
14. Num período de um mês, 100 pacientes sofrendo de determinada doença foram internados em um hospital. Informações sobre o tipo de tratamento aplicado em cada paciente e o resultado final obtido estão resumidas no quadro a seguir.

		Tratamento		Total
		A	B	
Resultado	Cura total (T)	24	16	40
	Cura parcial (P)	24	16	40
	Morte (M)	12	8	20
Total		60	40	100

Sorteia-se o registro de um desses pacientes.

- (a) Qual é a probabilidade de que seja de um paciente que teve cura total?  
 (b) Qual é a probabilidade de que esse registro seja de um paciente que faleceu ou que recebeu o tratamento A?  
 (c) Sabendo-se que esse paciente recebeu o tratamento A, qual é a probabilidade de que tenha tido cura total?
15. Sejam  $A$  e  $B$  eventos de um espaço amostral. Sabe-se que  $P(A) = 0,3$ ;  $P(B) = 0,7$  e  $P(A \cap B) = 0,21$ . Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras. Justifique sua resposta.
- (a)  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos;  
 (b)  $A$  e  $B$  são independentes;  
 (c)  $A$  e  $\bar{B}$  são independentes;  
 (d)  $A$  e  $\bar{B}$  são mutuamente exclusivos;  
 (e)  $A$  e  $\bar{A}$  são independentes.
16. Dois dados equilibrados são lançados.
- (a) Calcule a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.  
 (b) Sabendo-se que saíram faces diferentes nos dois dados, determine a probabilidade de sair seis em pelo menos um dado.  
 (c) Os eventos “seis em pelo menos um dado” e “faces diferentes nos dois dados” são independentes?

17. Uma sala possui três soquetes para lâmpadas. De uma caixa com 10 lâmpadas, das quais seis estão queimadas, retiram-se três lâmpadas ao acaso, colocando-se as mesmas nos três bocais. Calcular a probabilidade de que:
- (a) pelo menos uma lâmpada acenda;
  - (b) todas as lâmpadas acendam.
18. O Ministério da Economia da Espanha acredita que a probabilidade de a inflação ficar abaixo de 3% este ano é de 0,20; entre 3% e 4% é de 0,45 e acima de 4% é de 0,35. O Ministério acredita que, com inflação abaixo de 3%, a probabilidade de se criar mais 200.000 empregos é de 0,6, diminuindo essa probabilidade para 0,3 caso a inflação fique entre 3% e 4%; no entanto, com inflação acima de 4%, isso é totalmente impossível.
- (a) Qual é a probabilidade de se criarem 200.000 empregos nesse ano?
  - (b) No ano seguinte, um economista estrangeiro constata que foram criados 200.000 empregos novos. Qual é a probabilidade de a inflação ter ficado abaixo de 3%?
19. Na urna I há cinco bolas vermelhas, três brancas e oito azuis. Na urna II há três bolas vermelhas e cinco brancas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair três ou seis, escolhe-se uma bola da urna I; caso contrário, escolhe-se uma bola da urna II. Calcule a probabilidade de
- (a) sair uma bola vermelha;
  - (b) sair uma bola branca;
  - (c) sair uma bola azul;
  - (d) ter sido sorteada a urna I, sabendo-se que a bola retirada é vermelha.
20. Joana quer enviar uma carta a Camila. A probabilidade de que Joana escreva a carta é  $\frac{8}{10}$ . A probabilidade de que o correio não a perca é  $\frac{9}{10}$ . A probabilidade de que o carteiro a entregue é também  $\frac{9}{10}$ .
- (a) Construa o diagrama de árvore representando o espaço amostral deste problema.
  - (b) Calcule a probabilidade de Camila não receber a carta.
  - (c) Dado que Camila não recebeu a carta, qual é a probabilidade de que Joana não a tenha escrito?
21. Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos tais que  $P(A) = 0,4$  e  $P(A \cup B) = 0,7$ . Seja  $P(B) = p$ . Determine o valor de  $p$  para que
- (a)  $A$  e  $B$  sejam mutuamente exclusivos;
  - (b)  $A$  e  $B$  sejam independentes.
22. Sejam  $A$  e  $B$  eventos possíveis de um mesmo espaço amostral  $\Omega$ . Se  $P(\bar{A}|B) = 1$  verifique a veracidade das seguintes afirmativas, justificando sua resposta.
- (a)  $A$  e  $B$  são independentes.
  - (b)  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos.
23. Sejam  $A, B, C$  eventos de um mesmo espaço amostral. Sabe-se que

- $B$  é um subconjunto de  $A$ ;
- $A$  e  $C$  são independentes e
- $B$  e  $C$  são mutuamente exclusivos.

A probabilidade do complementar da união dos eventos  $A$  e  $C$  é 0,48; a probabilidade da união dos eventos  $B$  e  $C$  é 0,3 e a probabilidade do evento  $C$  é o dobro da probabilidade do evento  $B$ . Calcule  $P(A \cup B)$ .

24. Uma comissão de dois estudantes deve ser sorteada de um grupo de 5 alunas e 3 alunos. Sejam os eventos:

- $M_1 =$  "primeiro estudante sorteado é mulher"
- $M_2 =$  "segundo estudante sorteado é mulher"

(a) Construa um diagrama de árvore que represente o espaço amostral deste experimento, indicando as probabilidades.

(b) Calcule  $P(M_1)$  e  $P(M_2)$ .

(c) Verifique se  $M_1$  e  $M_2$  são independentes.

25. Em um campeonato de natação, estão competindo três estudantes: Alberto, Bosco e Carlos. Alberto e Bosco têm a mesma probabilidade de ganhar, que é o dobro da de Carlos ganhar.

(a) Ache a probabilidade de que Bosco ou Carlos ganhe a competição.

(b) Que hipótese você fez para resolver essa questão? Essa hipótese é razoável?

26. Solicita-se a dois estudantes, Maria e Pedro, que resolvam determinado problema. Eles trabalham na solução do mesmo independentemente, e têm, respectivamente, probabilidade 0,8 e 0,7 de resolvê-lo.

(a) Qual é a probabilidade de que nenhum deles resolva o problema?

(b) Qual é a probabilidade de o problema ser resolvido?

(c) Dado que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que tenha sido resolvido apenas por Pedro?

27. Joga-se um dado duas vezes. Considere os seguintes eventos:  $A =$  "resultado do primeiro lançamento é par" e  $B =$  "soma dos resultados é par".  $A$  e  $B$  são independentes? Justifique.

28. Um aluno responde a uma questão de múltipla escolha com quatro alternativas, com uma só correta. A probabilidade de que ele saiba a resposta certa da questão é de 30%. Se ele não sabe a resposta, existe a possibilidade de ele acertar "no chute". Não existe a possibilidade de ele obter a resposta certa por "cola".

(a) Qual é a probabilidade de ele acertar a questão?

(b) Se o aluno acertou a questão, qual é a probabilidade de ele ter "chutado" a resposta?

29. Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte hidráulica de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de  $1/2$ . Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte hidráulica é de  $3/4$ ; caso contrário, essa probabilidade é de  $1/3$ . Qual é a probabilidade de ele:
- (a) ganhar os dois contratos?
  - (b) ganhar apenas um?
  - (c) não ganhar qualquer contrato?





## Capítulo 6

# Gabarito dos Exercícios propostos

1. Vamos definir os seguinte eventos:

$K$  = lançamento resulta em cara na face superior

$C$  = lançamento resulta em coroa na face superior

$\Omega = \{KKK, KKC, KCK, CKK, KCC, CKC, CCK, CCC\}$

$A = \{KKK, CCC\}$

$B = \{KKK, KKC, KCK, KCC\}$

$C = \{KCC, CCC\}$

2. (a) Veja a Figura 6.1a.

$$\begin{aligned} B \subset A &\implies A \cup B = A \\ A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c = A^c \end{aligned}$$

(b) Veja a Figura 6.1b. Como  $A \cap B = \emptyset$ , resulta que  $A - B = A \cap B^c = A$ .

(c) Veja a Figura 6.1c.

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup \emptyset = (A \cap B)$$

(d) Veja a Figura 6.1d.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

3. (a)  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

(b) Vamos denotar por  $M$  o evento “bebê é do sexo masculino” e por  $F$  o evento “bebê é do sexo feminino”. Então,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} M, F, MM, MF, FM, FF, \\ MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF, \\ FFFF, FFFM, FFMF, FMFF, MFFF, MMFF, \\ MFMF, MFFM, FFMM, FMFM, FMMF, \\ MMMF, MMFM, MFMM, FMFM, MMMM \end{array} \right\}$$

Note que representamos aí os casais com um filho, dois filhos, três filhos e quatro filhos.

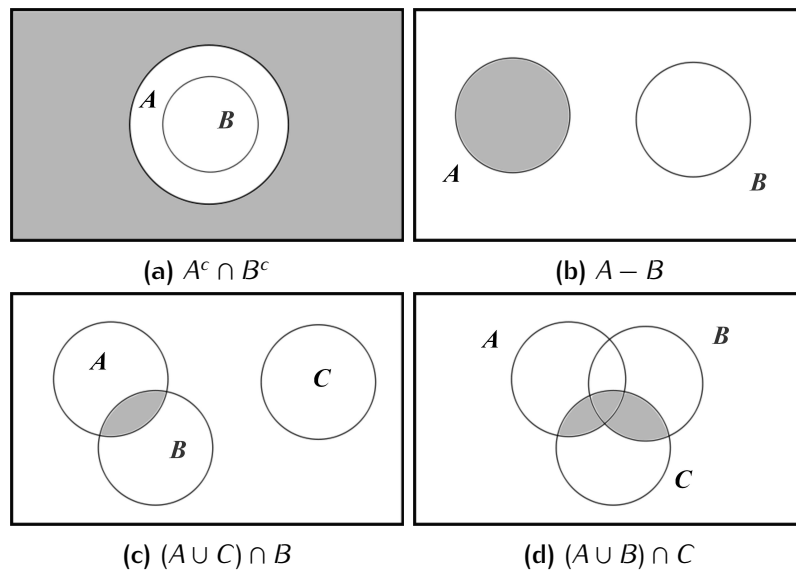


Figura 6.1 – Gabarito do Exercício 2

- (c) A lâmpada pode queimar logo ao ser ligada e, teoricamente, pode durar para sempre; logo,  $\Omega = (0, \infty)$ .
- (d) Como temos que sortear as 3 mulheres, serão necessários, no mínimo, 3 sorteios e, no pior dos casos, a última mulher será a última a ser sorteada. Como estamos interessados apenas no número de sorteios, o espaço amostral é  $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- (e) Podemos obter cara logo no primeiro lançamento ou então no segundo ou no terceiro... Teoricamente, pode ser necessário lançar a moeda infinitas vezes. Logo,  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$
- (f)  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} AA, AB, AC, AD, AE, BA, BB, BC, BD, BE, CA, CB, CC, \\ CD, CE, DA, DB, DC, DD, DE, EA, EB, EC, ED, EE \end{array} \right\}$
- (g)  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, \\ DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED \end{array} \right\}$
4. (a) O evento “somente A ocorre” significa que A ocorreu e B não ocorreu e C não ocorreu; em linguagem de conjunto:  
Somente A ocorre =  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- (b) Exatamente um ocorre significa que apenas A ocorre, ou apenas B ocorre ou apenas C ocorre.  
Exatamente um ocorre =  $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
- (c) O evento “A, B e C ocorrem” significa que os três eventos ocorreram; em linguagem de conjunto,  
A, B e C ocorrem =  $A \cap B \cap C$
- (d)  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$
- (e) O evento “pelo menos um ocorre” significa que pode ter ocorrido apenas um, ou dois ou três; essa é a própria definição de união, ou seja, em linguagem de conjunto, temos que

peelo menos um ocorre =  $A \cup B \cup C$

(f) Os dois que ocorrem podem ser  $A$  e  $B$  ou  $A$  e  $C$  ou  $B$  e  $C$ . Ocorrendo dois desses, o terceiro não pode ocorrer. Logo, em linguagem de conjunto temos que:

exatamente dois ocorrem =  $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

(g) "Pelo menos dois" significa, neste caso, 2 ou 3 ocorrem, ou seja:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

O primeiro termo corresponde à ocorrência de  $A$  e  $B$ , mas não de  $C$ ; o segundo termo, ocorrência de  $B$  e  $C$ , mas não de  $A$ ; o terceiro, ocorrência de  $A$  e  $C$ , mas não de  $B$ , e o quarto termo corresponde à ocorrência dos 3 simultaneamente.

(h) No máximo 2 significa ou nenhum ocorre, ou ocorre apenas um, ou ocorrem apenas 2. No caso de 3 eventos, a única possibilidade excluída é à ocorrência dos três simultaneamente, ou seja,  $\overline{A \cap B \cap C}$ .

5.

$$A = \left\{ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \right\}$$

$$B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \\ (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6), \\ (3, 6), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5) \end{array} \right\}$$

$$A - B = A \cap \bar{B} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \\ (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (6, 2) \end{array} \right\}$$

$$B - A = B \cap \bar{A} = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$$

$$B \cap C = \{(3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$B - C = B \cap \bar{C} = \{(4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

Note que, de acordo com as propriedades já vistas,

$$\begin{aligned} (B \cap C) \cup (B - C) &= (B \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) = \\ &= [(B \cap C) \cup B] \cap [(B \cap C) \cup \bar{C}] = [B] \cap [\bar{C} \cup (B \cap C)] \\ &= B \cap [(\bar{C} \cup B) \cap (\bar{C} \cup C)] = B \cap [(\bar{C} \cup B) \cap \Omega] \\ &= B \cap (\bar{C} \cup B) = (B \cap \bar{C}) \cup (B \cap B) \\ &= (B \cap \bar{C}) \cup B = B \end{aligned}$$

6. A solução deste exercício fica bastante simplificada se notarmos o seguinte:

$$A \cup B = \Omega$$

$$A \cap B = D$$

$$D \subset A \implies \begin{cases} A \cap D = D \\ A \cup D = A \end{cases}$$

$$D \subset B \implies \begin{cases} B \cap D = D \\ B \cup D = B \end{cases}$$

- (a)  $A \cup (B \cap D) = A \cup D = A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$   
 (b)  $B \cup (A \cap D) = B \cup D = B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$   
 (c)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 (d)  $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \overline{\Omega} = \emptyset$   
 (e)  $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$   
 (f)  $B \setminus A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$   
 (g)  $\overline{A \cap B} = \overline{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 (h)  $\overline{A \cup B} = \overline{\Omega} = \emptyset$

7.  $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ .

Se  $A$  e  $B$  fossem mutuamente exclusivos, teríamos que ter

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Logo,  $A$  e  $B$  têm que ter interseção, ou seja,  $A$  e  $B$  não podem ser mutuamente exclusivos.

8. Do enunciado, concluímos que  $A \cap B = \emptyset$ . Logo,

(a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,5 + 0,4 = 0,9$

(b)  $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0 = 0,4$

9. Veja a Figura 6.2, onde é representado um esquema do espaço amostral. Vamos calcular a probabilidade de cada um dos eventos aí indicados.

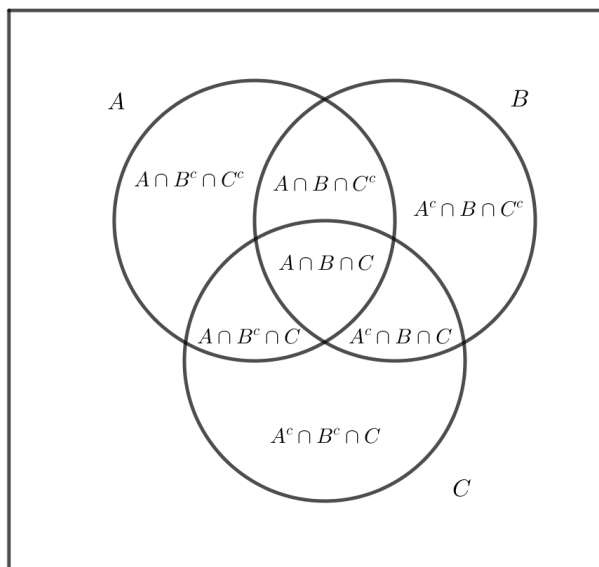


Figura 6.2 – Sócios dos clubes  $A, B, C$

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C^c) &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0,11 - 0,075 = 0,035 \\
P(A \cap B^c \cap C) &= P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,22 - 0,075 = 0,145 \\
P(A^c \cap B \cap C) &= P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,14 - 0,075 = 0,065 \\
P(A \cap B^c \cap C^c) &= P[A \cap (B \cup C)^c] = P(A) - P[A \cap (B \cup C)] = P(A) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,470 - 0,110 - 0,22 + 0,075 = 0,215 \\
P(A^c \cap B \cap C^c) &= P[B \cap (A \cup C)^c] = P(B) - P[B \cap (A \cup C)] = P(B) - P[(A \cap B) \cup (B \cap C)] \\
&= P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,420 - 0,110 - 0,140 + 0,075 = 0,245 \\
P(A^c \cap B^c \cap C) &= P[C \cap (A \cup B)^c] = P(C) - P[C \cap (A \cup B)] = P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,315 - 0,220 - 0,140 + 0,075 = 0,03
\end{aligned}$$

(a) Seja o evento  $N$  = uma família não é sócia de qualquer um dos clubes.

$$\begin{aligned}
P(N) &= P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P[(A \cup B \cup C)^c] = 1 - P(A \cup B \cup C) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= 1 - 0,470 - 0,420 - 0,315 + 0,110 + 0,220 + 0,140 - 0,075 = 0,19
\end{aligned}$$

(b) Seja o evento  $U$  = uma família é sócia de apenas um dos clubes.

$$\begin{aligned}
P(U) &= P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) \\
&= 0,215 + 0,245 + 0,03 = 0,490
\end{aligned}$$

(c) Seja o evento  $M$  = uma família é sócia de pelo menos dois clubes.

$$\begin{aligned}
P(M) &= P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= 0,035 + 0,145 + 0,065 + 0,075 = 0,320
\end{aligned}$$

Note que  $M = (N \cup U)^c \Rightarrow P(M) = 1 - P(N \cup U) = 1 - P(N) - P(U)$ , uma vez que  $N$  e  $U$  são mutuamente exclusivos.

10. Sejam os eventos  $S$  = “uma pessoa do bairro tem curso superior”,  $C$  = “uma pessoa do bairro é casada”,  $D$  = “uma pessoa do bairro está desempregada”. O problema dá que

$$P(S) = 0,22 \quad P(C) = 0,16 \quad P(D) = 0,10$$

$$P(S \cap C \cap D^c) = 0,05 \quad P(S \cap D) = 0,06 \quad P(S \cap C \cap D) = 0,02$$

(a) O problema pede  $P(S \cap C)$ . Temos que

$$P(S \cap C) = P(S \cap C \cap D) + P(S \cap C \cap D^c) = 0,02 + 0,05 = 0,07$$

(b) O problema pede  $P[(S \cap C) \cup D^c]$ . Temos que

$$P[(S \cap C) \cup D^c] = P(S \cap C) + P(D^c) - P(S \cap C \cap D^c) = 0,07 + 0,90 - 0,05 = 0,92$$

(c) O problema pede  $P(S \cup D)$ . Temos que

$$P(S \cup D) = P(S) + P(D) - P(S \cap D) = 0,22 + 0,10 - 0,06 = 0,26$$

11. Sejam os eventos  $B$  = “artigo é bom”,  $M$  = “artigo tem defeitos menores” e  $G$  = “artigo tem defeitos graves”. Pelos dados do problema, temos que

$$P(B) = \frac{10}{16}, \quad P(M) = \frac{4}{16}, \quad P(G) = \frac{2}{16}.$$

Note que  $B, M, G$  são mutuamente exclusivos.

$$(a) P(\text{não ter defeito}) = P(B) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$(b) P(\text{não ter defeito grave}) = P(G^c) = 1 - P(G) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$(c) P(\text{ser perfeito ou ter defeito grave}) = P(B \cup G) = P(B) + P(G) = \frac{10}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{4}.$$

12. Vamos definir os eventos  $M_i$  =  $i$ -ésimo estudante sorteado é do sexo masculino e  $F_i$  =  $i$ -ésimo estudante sorteado é do sexo feminino,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

(a) Um homem entre os sorteados significa também que 3 mulheres foram sorteadas. Seja  $U$  o evento “um homem sorteado”. Então

$$\begin{aligned} P(U) &= P[(M_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup \\ &\quad (F_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap M_4)] \\ &= P(M_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(F_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap F_4) + \\ &\quad P(F_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap F_4) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap M_4) \\ &= \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{17}{28} \cdot \frac{16}{27} + \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{17}{28} \cdot \frac{16}{27} + \\ &\quad \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} + \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} \\ &= 4 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{17}{28} \cdot \frac{16}{27} = \frac{1088}{3045} \end{aligned}$$

(b) No máximo uma pessoa do sexo feminino significa nenhuma ou uma pessoa do sexo feminino. Seja  $X$  o evento “no máximo uma pessoa do sexo feminino”. Então

$$\begin{aligned} P(X) &= P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) + P(F_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) + \\ &\quad P(M_1 \cap F_2 \cap M_3 \cap M_4) + P(M_1 \cap M_2 \cap F_3 \cap M_4) + P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap F_4) \\ &= \frac{12}{30} \times \frac{11}{29} \times \frac{10}{28} \times \frac{9}{27} + 4 \times \frac{18}{30} \times \frac{12}{29} \times \frac{11}{28} \times \frac{10}{27} = \frac{33}{203} \end{aligned}$$

(c) Ter pelo menos uma pessoa de cada sexo significa que não podemos ter todas as pessoas do mesmo sexo. Seja  $C$  = “pelo menos uma pessoa de cada sexo”. Então

$$\begin{aligned} P(C^c) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) \\ &= \frac{18}{30} \times \frac{17}{29} \times \frac{16}{28} \times \frac{15}{27} + \frac{12}{30} \times \frac{11}{29} \times \frac{10}{28} \times \frac{9}{27} = \frac{79}{609} \Rightarrow \\ P(C) &= 1 - \frac{79}{609} = \frac{530}{609} \end{aligned}$$

13. (a) Se o menor número é 7, isso significa que uma das bolas é a de número 7 e as outras 2 têm número de 8 a 15 e a ordem não importa. A probabilidade de sortear a bola 7 é  $\frac{1}{15}$ . Se a bola 7 é sorteada, sobram 14, das quais 8 têm número maior que 7. A probabilidade de sortear duas bolas específicas com número maior que 7, nesse caso, é  $\frac{8}{14} \times \frac{7}{13}$ . Como a ordem não importa, a bola 7 pode ser retirada em qualquer uma das 3 extrações, ou seja, há  $\binom{3}{1}$  maneiras de sortear essas 3 bolas. Logo, a solução é

$$\frac{1}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times 3 = \frac{4}{65}$$

- (b) Se o maior número é 7, isso significa que uma das bolas é a de número 7 e as outras 2 têm número de 1 a 6 e a ordem não importa. A probabilidade de sortear a bola 7 é  $\frac{1}{15}$ . Se a bola 7 é sorteada, sobram 14, das quais 6 têm número menor que 7. A probabilidade de sortear duas bolas específicas com número menor que 7, nesse caso, é  $\frac{6}{14} \times \frac{5}{13}$ . Como a ordem não importa, a bola 7 pode ser retirada em qualquer uma das 3 extrações, ou seja, há  $\binom{3}{1}$  maneiras de sortear essas 3 bolas. Logo, a solução é

$$\frac{1}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \binom{3}{1} = \frac{3}{91}$$

14. (a)  $P(T) = 40/100 = 0,4$

(b)  $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(A \cap M) = \frac{20 + 60 - 12}{100} = 0,68$

(c)  $P(T|A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{24}{60} = 0,4$

15. (a)  $\Pr(A \cap B) = 0,21 \neq 0 \therefore A$  e  $B$  não são mutuamente exclusivos

(b)  $\Pr(A \cap B) = 0,21 = \Pr(A)\Pr(B) \therefore A$  e  $B$  são independentes

(c)  $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,21 = 0,09 = P(A)P(\bar{B}) \therefore A$  e  $\bar{B}$  são independentes. Lembre-se que se  $A, B$  são independentes, então  $A, B^c$  também o são.

(d)  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,21 = 0,09 > 0 \therefore A$  e  $\bar{B}$  não são mutuamente exclusivos. Outra solução: Como  $A, B^c$  são independentes e ambos t em probabilidade positiva, então eles não podem ser mutuamente exclusivos.

(e)  $P(A \cap \bar{A}) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(\bar{A}) = 0,21 \therefore A$  e  $\bar{A}$  não são independentes.

16. Vamos definir os eventos  $A =$  "face 6 em pelo menos um dado" e  $B =$  "faces iguais". Então,

$$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

(a)  $P(A) = \frac{11}{36}$

(b)  $P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{11}{36} - \frac{1}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \neq P(A)$



(c)  $P(A|\bar{B}) \neq P(A) \therefore A$  e  $\bar{B}$  não são independentes

17. Seja  $A_i$  = “lâmpada  $i$  acende”,  $i = 1, 2, 3$ .

(a) Seja  $M$  = “pelo menos uma lâmpada acende”. Então,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c] = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= 1 - P(A_1^c) \cdot P(A_2^c|A_1^c) \cdot P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c) = 1 - \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(b) O problema pede

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2 \cap A_1) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

18. Vamos definir os seguintes eventos:

- $B$  = “inflação abaixo de 3%”
- $M$  = “inflação entre 3% e 4%”
- $A$  = “inflação acima de 4%”
- $E$  = “criação de 200.000 empregos”

O problema dá as seguintes probabilidades:

$$\begin{array}{lll} P(B) = 0,20 & P(M) = 0,45 & P(A) = 0,35 \\ P(E|B) = 0,6 & P(E|M) = 0,3 & P(E|A) = 0 \end{array}$$

Veja a Figura 6.3.

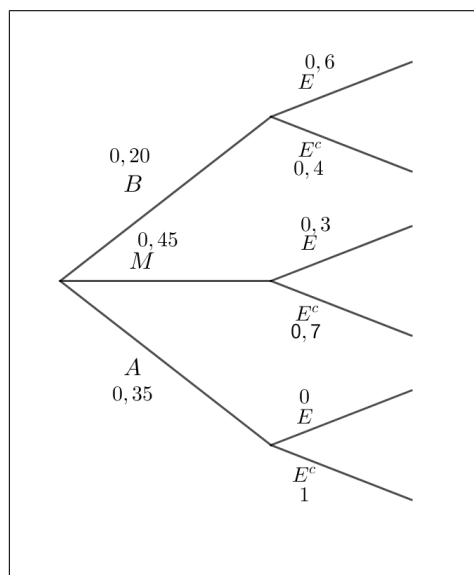


Figura 6.3 – Economia na Espanha

(a) Podemos ver que

$$E = (E \cap B) \cup (E \cap M) \cup (E \cap A)$$

e, como os eventos são mutuamente exclusivos,

$$P(E) = P(E \cap B) + P(E \cap M) + P(E \cap A)$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B)P(E|B) + P(M)P(E|M) + P(A)P(E|A) \\ &= 0,20 \times 0,60 + 0,45 \times 0,30 + 0,35 \times 0 \\ &= 0,255 \end{aligned}$$

(b) O problema agora pede  $P(B|E)$  :

$$\begin{aligned} P(B|E) &= \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P(B)P(E|B)}{P(E)} \\ &= \frac{0,20 \times 0,6}{0,255} = 0,4706 \end{aligned}$$

19. Veja a Figura 6.4, onde temos os seguintes eventos:

- $V$  = "bola sorteada é vermelha"
- $B$  = "bola sorteada é branca"
- $A$  = "bola sorteada é azul"
- $U_1$  = "urna sorteada é a urna I"
- $U_2$  = "urna sorteada é a urna II"

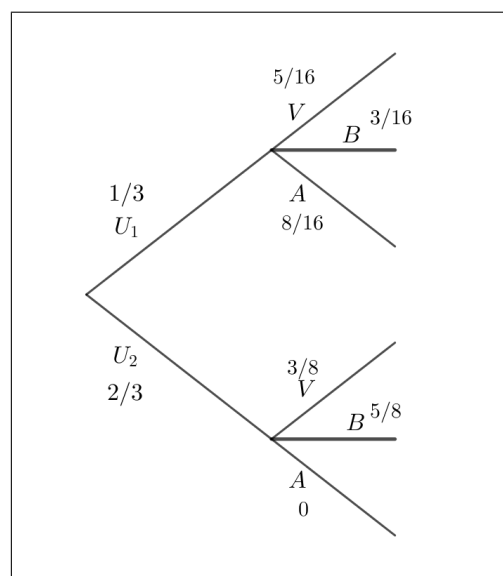


Figura 6.4 – Bolas em duas urnas

(a) Temos que

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap U_1) + P(V \cap U_2) = P(U_1)P(V|U_1) + P(U_2)P(V|U_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{48} + \frac{12}{48} = \frac{17}{48} \end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) = P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{3}{48} + \frac{20}{48} = \frac{23}{48} \end{aligned}$$

(c) Temos que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap U_1) + P(A \cap U_2) = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(A|U_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{8}{16} + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{8}{48} \end{aligned}$$

Note que  $P(V) + P(B) + P(A) = 1$ .

(d) O problema pede

$$P(U_1|V) = \frac{P(U_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(U_1)P(V|U_1)}{P(V)} = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{5}{16}}{\frac{17}{48}} = \frac{5}{17}$$

20. (a) Veja a Figura 6.5, onde temos os seguintes eventos:

- $J$  = “Joana escreve a carta”
- $C$  = “correio não perde a carta”
- $T$  = “carteiro entrega a carta”.

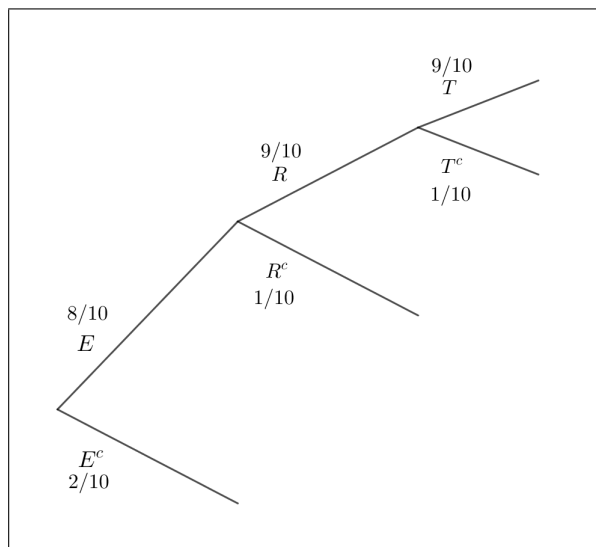


Figura 6.5 – Carta de Joana para Camila

(b) Vamos definir o evento  $R = \text{"Camila recebe a carta"}$ . O problema pede  $P(\bar{R})$ .

$$\begin{aligned} P(R^c) &= P(J^c) + P(J \cap C^c) + P(J \cap C \cap T^c) \\ &= P(J^c) + P(J) \times P(C^c|J) + P(J) \times P(C|J) \times P(T^c|C \cap J) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{352}{1000} \end{aligned}$$

(c) O problema agora pede  $P(J^c|R^c)$ :

$$P(J^c|R^c) = \frac{P(R^c \cap J^c)}{P(R^c)} = \frac{P(J^c) P(R^c|J^c)}{P(R^c)}$$

O evento  $R^c|J^c$  significa "Camila não receber a carta, dado que Joana não a escreveu". Ora, se Joana não escreveu, é claro que Camila não recebe a carta! Logo, esse evento é o evento certo e, portanto,

$$P(J^c|R^c) = \frac{P(J^c) P(R^c|J^c)}{P(R^c)} = \frac{\frac{2}{10} \times 1}{\frac{352}{1000}} = \frac{25}{44}$$

21. Temos que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - P(A \cap B)$

$$(a) P(A \cap B) = 0 \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p \Rightarrow p = 0,3$$

$$(b) P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + p - 0,4p \Rightarrow 0,6p = 0,3 \Rightarrow p = 0,5$$

22. Pelos dados do problema, temos que

$$\begin{aligned} P(A^c|B) = 1 &\Rightarrow \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 \Rightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \Rightarrow \\ 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= 1 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos e, portanto, não podem ser independentes, uma vez que ambos têm probabilidade positiva.

23. O problema dá os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} B \subset A & & P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= 0 & P[(A \cup C)^c] &= 0,48 \\ P(B \cup C) &= 0,3 & P(C) &= 2P(B) \end{aligned}$$

e pede que se calcule  $P(A \cup B)$ .

Como  $B \subset A$ , então,  $A \cup B = A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A)$ .

$$\begin{aligned} P(B \cup C) = 0,3 &\Rightarrow P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,3 \Rightarrow \\ P(B) + 2P(B) - 0 &= 0,3 \Rightarrow P(B) = 0,1 \end{aligned}$$

Logo,  $P(C) = 0,2$ .

$$P[(A \cup C)^c] = 0,48 \Rightarrow P(A^c \cap C^c) = 0,48$$

Como  $A$  e  $C$  são independentes, segue que  $A^c$  e  $C^c$  também o são. Logo,

$$P(A^c)P(C^c) = 0,48 \Rightarrow P(A^c) \times 0,8 = 0,48 \Rightarrow P(A^c) = 0,6$$

e, portanto,

$$P(A) = 0,4 = P(A \cup B)$$

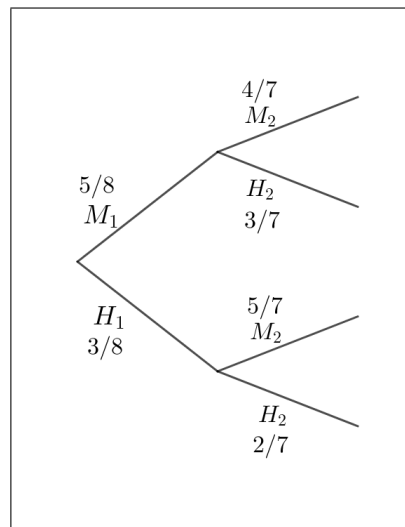


Figura 6.6 – Sorteio de comissão

24. (a) Veja a Figura 6.6, em que  $H_i, i = 1, 2$  representa o evento “ $i$ -ésimo estudante sorteado é homem.”  
 (b) Temos que

$$\begin{aligned} P(M_1) &= \frac{5}{8} \\ P(M_2) &= P(M_1 \cap M_2) + P(H_1 \cap M_2) \\ &= P(M_1)P(M_2|M_1) + P(H_1)P(M_2|H_1) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- (c) Temos que

$$P(M_2|M_1) = \frac{4}{7} \neq P(M_2)$$

Logo,  $M_1$  e  $M_2$  não são independentes.

25. Sejam os eventos

- $A$  = “Alberto ganha”
- $B$  = “Bosco ganha”
- $C$  = “Carlos ganha”

Como eles são os únicos competidores, temos que

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) + P(C) &= 1 \Rightarrow 2P(C) + 2P(C) + P(C) = 1 \Rightarrow \\ P(C) &= \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = P(B) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- (a) O problema pede

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

Note que pode haver empate entre Bosco e Carlos. No entanto, é razoável supor que os eventos  $B$  e  $C$  sejam independentes, uma vez que, numa competição honesta, nenhum competidor interfere no desempenho dos outros. Logo,

$$\begin{aligned} P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{13}{25} \end{aligned}$$

(b) Foi necessário fazer a hipótese de independência, que é razoável, conforme explicado no item anterior.

26. Sejam os eventos  $M$  = “Maria resolve o problema” e  $E$  = “Pedro resolve o problema”. Temos que

$$P(M) = 0,8 \Rightarrow P(M^c) = 0,2$$

$$P(E) = 0,7 \Rightarrow P(E^c) = 0,3$$

(a) O problema pede  $P(E^c \cap M^c)$ . Como  $E, M$  são independentes, sabemos que seus complementares também o são. Logo,

$$P(E^c \cap M^c) = P(E^c) \times P(M^c) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

(b) Seja  $R$  = “problema resolvido”. O problema pede  $P(R) = P(E \cup M)$ . Temos que

$$P(R) = P(E \cup M) = 1 - P[(E \cup M)^c] = 1 - P(E^c \cap M^c) = 1 - 0,06 = 0,94$$

(c) Seja  $E_1$  = “apenas Pedro resolve”. Então  $E_1 = E \cap M^c$  e  $E_1 \subset R \Rightarrow E_1 \cap R = E_1$ . O problema pede  $P(E_1|R)$ . Temos que

$$\begin{aligned} P(E_1|R) &= \frac{P(E_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(E_1)}{P(R)} = \frac{P(E \cap M^c)}{P(R)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,2}{0,94} = 0,1489 \end{aligned}$$

27. O espaço amostral tem 36 elementos, dos quais 18 pertencem ao evento  $A$ , ou seja,  $P(A) = \frac{1}{2}$ . Temos, também que  $P(B) = \frac{1}{2}$ .

Para estudar a independência dos eventos  $A$  e  $B$ , temos que analisar a interseção  $A \cap B$ . Para que um resultado pertença à interseção, o primeiro lançamento tem resultar em um número par e a soma tem que ser um número par. Isso significa que temos que ter face par em ambos os lançamentos. É fácil ver que  $P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$ . Logo, os eventos são independentes.

28. Veja a Figura 6.7, onde temos os eventos  $S$  = “aluno sabe a resposta” e  $A$  = “aluno acerta a questão”. É dado que

$$P(S) = 0,3 \Rightarrow P(S^c) = 0,7$$

Se o aluno sabe a resposta, ele acerta a questão. Se ele não sabe, ele pode “chutar” entre as quatro alternativas. Logo,

$$P(A|S) = 1 \quad P(A|\bar{S}) = 0,25$$

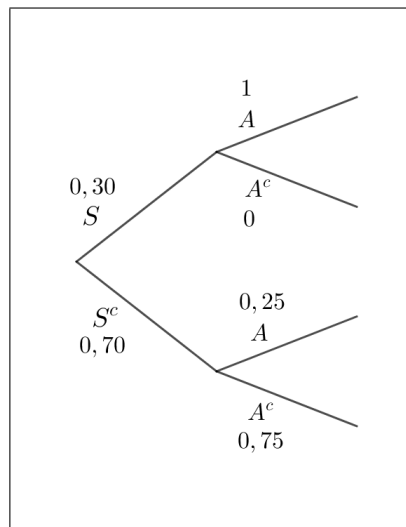


Figura 6.7 – Teste de múltipla escolha

(a) O problema pede  $P(A)$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S}) = P(S) \times P(A|S) + P(\bar{S}) \times P(A|\bar{S}) \\ &= 0,3 \times 1 + 0,7 \times 0,25 = 0,475 \end{aligned}$$

(b) O problema agora pede

$$P(S|A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{P(S) \times P(A|S)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,475} = 0,6316$$

29. Sejam os eventos  $E$  = “ganhar parte elétrica” e  $H$  = “ganhar parte hidráulica”. Temos que

$$P(E) = \frac{1}{2} \quad P(H|E) = \frac{3}{4} \quad P(H|E^c) = \frac{1}{3}$$

Resulta que

$$P(E^c) = \frac{1}{2} \quad P(H^c|E) = \frac{1}{4} \quad P(H^c|E^c) = \frac{2}{3}$$

(a)

$$P(E \cap H) = P(E) P(H|E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

(b)

$$P(E^c \cap H) + P(E \cap H^c) = P(E^c) P(H|E^c) + P(E) P(H^c|E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{24}$$

(c)

$$P(E^c \cap H^c) = P(E^c) P(H^c|E^c) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

# Apêndice A

## Análise combinatória

Neste capítulo iremos trabalhar com espaços amostrais finitos. Veremos, então, diversas técnicas de contagem do número de elementos de eventos desses espaços amostrais. Dado um evento qualquer  $A$ , representaremos por  $n(A)$  o número de elementos de  $A$ .

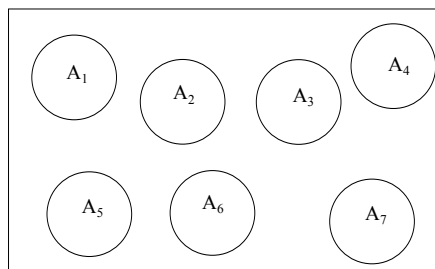
### A.1 Princípio Fundamental da Adição

Sejam  $A$  e  $B$  eventos aleatórios de um espaço amostral  $\Omega$  finito.

Se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então

$$A \cap B = \emptyset \implies n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad (\text{A.1})$$

A definição de eventos mutuamente exclusivos se generaliza para mais de dois eventos. Neste caso, devemos analisar a interseção de dois eventos de cada vez. Mais precisamente, dada uma coleção de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  de um espaço amostral  $\Omega$ , dizemos que eles são mutuamente exclusivos dois a dois se  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ . Veja a **Figura A.1**.



**Figura A.1** – Eventos mutuamente exclusivos dois a dois

Neste caso, a cardinalidade da união é dada pelo *princípio fundamental da adição*.



**! Princípio Fundamental da Adição**

Consideremos uma coleção de eventos mutuamente exclusivos dois a dois, tais que  $n(A_i) = n_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . O princípio fundamental da adição estabelece que

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \implies n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k n(A_i) = n_1 + \dots + n_k \quad (\text{A.2})$$

A seguir apresentamos alguns resultados, que são consequências diretas do princípio fundamental da adição.

Como  $A \cup \bar{A} = \Omega$  e  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , resulta que

$$n(\Omega) = n(A) + n(\bar{A}) \implies n(\bar{A}) = n(\Omega) - n(A) \quad (\text{A.3})$$

Pelo resultado (1.6),  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$  e  $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ; resulta, então, que

$$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) \implies n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (\text{A.4})$$

Analogamente,

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) \quad (\text{A.5})$$

Consideremos o caso geral em que  $A$  e  $B$  são eventos aleatórios quaisquer. Podemos escrever

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$

Como  $A$  e  $B \setminus A$  são disjuntos, resulta que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B \setminus A)$$

Usando o resultado (A.5), resulta que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (\text{A.6})$$

### EXEMPLO A.1 Cardinalidade da união de 3 eventos finitos

Obtenha uma expressão para  $n(A \cup B \cup C)$ , onde  $A, B, C$  são eventos aleatórios com número finito de elementos.

**Solução**

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup B) \cup C] \\
&= n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C] \\
&= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C) \implies \\
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap C \cap B \cap C)
\end{aligned}$$



## A.2 Princípio Fundamental da Multiplicação

Para ilustrar o segundo princípio fundamental da contagem, considere o experimento aleatório que consiste no sorteio aleatório de um homem e uma mulher de um grupo de pessoas formado por três homens ( $h_1, h_2, h_3$ ) e cinco mulheres ( $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ ). Qual é a cardinalidade do espaço amostral deste experimento, ou seja, quantos casais podem ser formados com essas pessoas?

O espaço amostral é

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} h_1 m_1, h_1 m_2, h_1 m_3, h_1 m_4, h_1 m_5, \\ h_2 m_1, h_2 m_2, h_2 m_3, h_2 m_4, h_2 m_5, \\ h_3 m_1, h_3 m_2, h_3 m_3, h_3 m_4, h_3 m_5, \end{array} \right\}$$

Mas se estamos interessados apenas no número de elementos de  $\Omega$ , devemos notar que há cinco casais nos quais o homem é  $h_1$ , cinco nos quais o homem é  $h_2$  e outros cinco nos quais o homem é  $h_3$ , perfazendo um total de  $3 \times 5 = 15$  casais. Esse exemplo ilustra o *princípio fundamental da multiplicação*.

### ! Princípio Fundamental da Multiplicação

Se temos  $k$  decisões  $d_1, d_2, \dots, d_k$  que podem ser tomadas de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  maneiras respectivamente, então o número de maneiras de tomar as decisões  $d_1$  e  $d_2$  e  $\dots$  e  $d_k$  é  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ .

Note que o princípio da multiplicação permite obter o número de elementos do espaço amostral formado pelos casais sem ter que fazer essa enumeração enfadonha! Imagine se fossem 100 homens e 200 mulheres!

### EXEMPLO A.2 Números naturais de três algarismos distintos

Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?

**Solução**

Para o primeiro algarismo (milhar), existem nove possibilidades, já que o zero não pode ocupar a primeira posição. Para a segunda posição, escolhida a primeira, sobram nove algarismos (agora já podemos considerar o zero) e para a terceira, escolhidos os dois primeiros, sobram oito algarismos. Logo, existem  $9 \times 9 \times 8 = 648$  números. (Já pensou o trabalho que seria listar todos eles?)

**EXEMPLO A.3** Portas de um prédio

Um prédio possui oito portas. De quantas maneiras posso entrar e sair desse prédio, se não quero usar na saída a mesma porta que usei na entrada?

**Solução**

Para a entrada, posso escolher qualquer uma das oito portas. Escolhida a porta de entrada, sobram sete portas para a saída. Logo, existem  $8 \times 7 = 56$  maneiras de entrar e sair por portas diferentes.

**EXEMPLO A.4** Números pares de três algarismos distintos

Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**Solução**

Para que o número seja par, ele tem que terminar com 2, 4 ou 6. Seja, então,  $P$  o evento de interesse. Vamos denotar por  $A_2$  o evento “número par que termina com 2” e de maneira análoga, definimos os eventos  $A_4$  e  $A_6$ . Resulta que  $A_2$ ,  $A_4$  e  $A_6$  são mutuamente exclusivos dois a dois e  $P = A_2 \cup A_4 \cup A_6$ . Pelo princípio da adição, resulta que  $n(P) = n(A_2) + n(A_4) + n(A_6)$ .

Para calcular  $n(A_2)$ , note que o último algarismo é 2 e sobram duas posições para serem preenchidas com algarismos distintos escolhidos entre 1, 3, 4, 5, 6. Para a primeira posição, temos cinco possibilidades; escolhida a primeira posição, sobram quatro para a segunda posição. Pelo princípio fundamental da multiplicação existem  $5 \times 4 = 20$  números pares com três algarismos distintos terminando com 2, ou seja,  $n(A_2) = 20$ . Analogamente,  $n(A_4) = 20$  e  $n(A_6) = 20$ , o que implica que  $n(P) = 20 + 20 + 20 = 60$ .

**A.3** Permutações

Consideremos quatro objetos distintos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . De quantas maneiras podemos ordená-los? Vamos listar todas as possibilidades.

$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_4a_3$	$a_1a_3a_2a_4$	$a_1a_3a_4a_2$
$a_1a_4a_2a_3$	$a_1a_4a_3a_2$	$a_2a_1a_3a_4$	$a_2a_1a_4a_3$
$a_2a_3a_1a_4$	$a_2a_3a_4a_1$	$a_2a_4a_1a_3$	$a_2a_4a_3a_1$
$a_3a_1a_2a_4$	$a_3a_1a_4a_2$	$a_3a_2a_1a_4$	$a_3a_2a_4a_1$
$a_3a_4a_1a_2$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_1a_2a_3$	$a_4a_1a_3a_2$
$a_4a_2a_1a_3$	$a_4a_2a_3a_1$	$a_4a_3a_1a_2$	$a_4a_3a_2a_1$

Cada uma dessas ordenações é chamada uma *permutação simples*. Podemos ver que o número de tais permutações é bem grande. Note que, para apenas quatro objetos, temos 24 permutações. O cálculo do número de permutações é uma consequência direta do princípio da multiplicação.

Consideremos, então,  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Para a primeira posição, temos  $n$  possibilidades. Para a segunda, escolhida a primeira, sobram  $n - 1$  objetos. Para a terceira, escolhidas a primeira e a segunda posições, sobram  $n - 2$  objetos. Continuando, para a última posição, escolhidas as  $n - 1$  anteriores, sobra apenas 1 objeto.

Pelo princípio da multiplicação, o número total de permutações, que denotaremos por  $P_n$  é  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ , e esse número, por definição, é o fatorial de  $n$ . Temos, assim, o seguinte resultado.

### **!** Permutações simples

Dados  $n$  objetos distintos, o número de **permutações simples** de tais objetos é dado por

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n! \quad (\text{A.7})$$

#### EXEMPLO A.5 Filas

Quantas filas diferentes podemos formar com cinco crianças?

#### Solução

Essa é exatamente a definição de permutação. Logo, o número de filas é  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ .



#### EXEMPLO A.6 Livros numa estante

Temos cinco livros de Estatística, três livros de Matemática Financeira e quatro livros de Contabilidade. De quantas maneiras podemos organizar esses livros em uma prateleira? Qual seria a sua resposta se os livros do mesmo assunto tivessem que ficar juntos?

**Solução**

Ao todo, há 12 livros; logo, se não é necessário agrupar por assunto, existem  $12! = 479.001.600$  maneiras de organizar os livros.

Se os livros do mesmo assunto têm que ficar juntos, devemos observar que, primeiro, temos que contar as maneiras como podemos organizar os assuntos. Como são três assuntos, há  $3! = 6$  maneiras de organizar os assuntos. Para os livros de Estatística, há  $5! = 120$  maneiras de organizá-los; para os livros de Matemática Financeira,  $3! = 6$  maneiras, e para os livros de Contabilidade,  $4! = 24$  maneiras.

Pelo princípio fundamental da multiplicação, o número total de maneiras de organizar os 12 livros de modo que os livros do mesmo assunto fiquem juntos é  $6 \times 6 \times 120 \times 24 = 103.680$  maneiras. Note que é razoável que esse número seja menor, pois estamos impondo condições restritivas na organização.

**EXEMPLO A.7** Assentos num banco

Cinco moças e cinco rapazes têm que se sentar em cinco bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fique uma moça e um rapaz. De quantas maneiras podemos fazer isso?

**Solução**

Começemos com as meninas. A primeira menina pode escolher qualquer dos 10 lugares. Logo, ela tem 10 possibilidades. Já a segunda menina só tem 8 possibilidades, porque ela não pode sentar junto com a primeira. Analogamente, a terceira menina tem 6 possibilidades, a quarta tem 4 e a quinta tem 2 possibilidades.

Definidas as posições das meninas, temos cinco rapazes para sentar em cinco lugares, o que pode ser feito de  $5!$  maneiras. Logo, o número total de possibilidades, pelo princípio fundamental da multiplicação, é  $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 3.840 \times 120 = 460.800$ .

**EXEMPLO A.8** Anagramas<sup>1</sup> de TEORIA

Considere a palavra TEORIA.

1. Quantos anagramas podemos formar?
2. Quantos anagramas começam com a letra T?
3. Quantos anagramas começam com a letra T e terminam com A?

<sup>1</sup>Anagrama: Palavra ou frase formada pela transposição das letras de outra palavra ou frase. "E dizem que a Iracema do romance de Alencar é o anagrama de América" (João Ribeiro, *Curiosidades verbais*, p. 76).

4. Quantos anagramas têm todas as vogais juntas?

### Solução

Note que o conceito de anagrama é o mesmo de permutação.

- 1 Como há seis letras diferentes, o número de anagramas é  $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ .
- 2 Fixada a letra T na primeira posição, as outras cinco podem ser organizadas de  $5! = 120$  maneiras diferentes.
- 3 Fixadas a primeira e a última letras, as outras quatro podem ser organizadas de  $4! = 24$  maneiras.
- 4 Temos quatro vogais. Esse bloco pode ser organizado de  $4! = 24$  maneiras. Para juntar esse bloco com as duas consoantes, há  $3! = 6$  maneiras diferentes. Logo, o número total é  $24 \times 6 = 144$ .



## A.4 Arranjos

Na definição de permutação, consideramos ordenações de *todos* os objetos. Mas é possível que queiramos ordenar apenas  $k$  dos  $n$  objetos, onde  $k \leq n$ . Nesse caso, temos a definição de *arranjo simples*.

Suponhamos, por exemplo, que quatro pessoas serão sorteadas dentre dez. Quantas filas podemos formar com as quatro pessoas sorteadas?

Como no caso das permutações, para a primeira posição da fila temos disponíveis as 10 pessoas. Para a segunda, temos 9; para a terceira, temos 8, e para a quarta e última posição, temos 7. Logo, o número total de filas com as quatro pessoas sorteadas é  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$ .

Note que, para a quarta posição, já escolhemos as três anteriores; assim, sobram apenas  $(10 - 3) = [10 - (4 - 1)]$ . Uma outra observação interessante é a seguinte:

$$\begin{aligned} 10 \times 9 \times 8 \times 7 &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\ &= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7) \times 6!}{6!} \\ &= \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10 - 4)!} \end{aligned}$$

Vamos ver, agora, o caso geral. Para calcular o número de arranjos de  $k$  dentre  $n$  objetos distintos, devemos notar que, para a primeira posição, existem  $n$  possibilidades. Para a segunda,  $n - 1$  possibilidades. Para a  $k$ -ésima e última posição, já foram escolhidos  $k - 1$

objetos; portanto, sobram  $n - (k - 1)$ , ou seja, para a  $k$ -ésima posição, há  $n - (k - 1) = n - k + 1$  possibilidades.

Logo, o número total de arranjos de  $k$  elementos, tomados dentre  $n$  objetos distintos é  $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$ . Vamos denotar por  $A_n^k$  esse número.

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1)$$

Vamos usar o mesmo artifício para simplificar essa fórmula.

$$\begin{aligned} A_n^k &= n \times (n - 1) \times \cdots \times [n - (k - 1)] \\ &= n \times (n - 1) \times \cdots \times [n - (k - 1)] \times \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \\ &= \frac{n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - k + 1) \times (n - k) \times (n - k - 1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n - k)!} = \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

### ! Arranjos simples

Dados  $n$  objetos distintos, o número de **arranjos simples** de  $k$  objetos dentre  $n$ , denotado por  $A_n^k$ , é

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (\text{A.8})$$

É importante notar que, sendo a definição de arranjo uma generalização de permutação (note que uma permutação é um arranjo em que  $k = n$ ), a ordem dos elementos é relevante, ou seja,  $a_1 a_2 a_3$  é diferente de  $a_3 a_1 a_2$ .

#### EXEMPLO A.9 Campeonato de futebol

Em um campeonato de futebol, concorrem 20 times. Quantas possibilidades existem para os três primeiros lugares?

#### Solução

A resposta é  $A_{20}^3$ , pois a ordem faz diferença nesse caso. Note que

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6.840$$



## EXEMPLO A.10 Comissões

De um grupo de 15 pessoas deve ser extraída uma comissão formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Quantas comissões é possível formar?

**Solução**

A ordem aqui importa, já que os cargos não são equivalentes. Assim, a solução é

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$$



## EXEMPLO A.11 Segredo de cofre

O segredo de um cofre é formado por uma sequência de três dígitos escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suponha que uma pessoa saiba que o segredo é formado por três algarismos distintos. Qual o número máximo de tentativas que ela terá de fazer para abrir o cofre?

**Solução**

Nos segredos de cofre, a ordem importa. Como os algarismos são distintos, a resposta é  $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$



## A.5 Combinações Simples

Vamos considerar agora, a situação análoga a um arranjo, mas onde a ordem não importa, ou seja,  $a_1 a_2 a_3$  é igual a  $a_3 a_1 a_2$ .

A título de ilustração, consideremos a situação na qual temos cinco objetos distintos dos quais vamos selecionar três. Como visto, o número de arranjos é  $\frac{5!}{2!} = 60$ . Vamos listá-los.

Objetos envolvidos									
(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,3,5)	(1,4,5)	(2,3,4)	(2,3,5)	(2,4,5)	(3,4,5)
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_4$	$a_1 a_2 a_5$	$a_1 a_3 a_4$	$a_1 a_3 a_5$	$a_1 a_4 a_5$	$a_2 a_3 a_4$	$a_2 a_3 a_5$	$a_2 a_4 a_5$	$a_3 a_4 a_5$
$a_1 a_3 a_2$	$a_1 a_4 a_2$	$a_1 a_5 a_2$	$a_1 a_4 a_3$	$a_1 a_5 a_3$	$a_1 a_5 a_4$	$a_2 a_4 a_3$	$a_2 a_5 a_3$	$a_2 a_5 a_4$	$a_3 a_5 a_4$
$a_2 a_1 a_3$	$a_2 a_1 a_4$	$a_2 a_1 a_5$	$a_3 a_1 a_4$	$a_3 a_1 a_5$	$a_4 a_1 a_5$	$a_3 a_2 a_4$	$a_3 a_2 a_5$	$a_4 a_2 a_5$	$a_4 a_3 a_5$
$a_2 a_3 a_1$	$a_2 a_4 a_1$	$a_2 a_5 a_1$	$a_3 a_4 a_1$	$a_3 a_5 a_1$	$a_4 a_5 a_1$	$a_3 a_4 a_2$	$a_3 a_5 a_2$	$a_4 a_5 a_2$	$a_4 a_5 a_3$
$a_3 a_1 a_2$	$a_4 a_1 a_2$	$a_5 a_1 a_2$	$a_4 a_1 a_3$	$a_5 a_1 a_3$	$a_5 a_1 a_4$	$a_4 a_2 a_3$	$a_5 a_2 a_3$	$a_5 a_2 a_4$	$a_5 a_3 a_4$
$a_3 a_2 a_1$	$a_4 a_2 a_1$	$a_5 a_2 a_1$	$a_4 a_3 a_1$	$a_5 a_3 a_1$	$a_5 a_4 a_1$	$a_4 a_3 a_2$	$a_5 a_3 a_2$	$a_5 a_4 a_2$	$a_5 a_4 a_3$



Esta listagem está organizada de modo que, em cada coluna, os objetos envolvidos são os mesmos. Note o seguinte: como a ordem não importa, os elementos de cada coluna são iguais, ou seja, só precisamos de um deles. Mas em cada coluna temos as permutações dos três objetos envolvidos. Logo, o número de elementos em cada coluna neste exemplo é  $3! = 6$ . Como só precisamos de um de cada 3!, o número total é

$$\frac{60}{3!} = \frac{5!}{2!3!}.$$

Ilustramos com esse exemplo o conceito e o cálculo do número de combinações simples de  $n$  elementos distintos tomados  $k$  a  $k$ . Dado um conjunto de  $n$  elementos distintos, a *combinação dos  $n$  elementos tomados  $k$  a  $k$*  nos dá o número de subconjuntos com  $k$  elementos (note que, em um conjunto, a ordem dos elementos não importa).

### ! Combinações simples

Dados  $n$  objetos distintos, o número de **combinações simples** de  $k$  elementos tomados dentre os  $n$  é

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad (\text{A.9})$$

O número  $\binom{n}{k}$  é chamado número ou coeficiente binomial, ou ainda, número combinatório.

Note a diferença: no conceito de arranjo, estamos lidando com *sequências* de  $k$  elementos, enquanto no conceito de combinação, estamos lidando com *subconjuntos*. Nas sequências, a ordem dos elementos é relevante, mas não nos subconjuntos.

#### EXEMPLO A.12 Comissão

De um grupo de oito homens e cinco mulheres devem ser escolhidos três homens e três mulheres para formar uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas se João e Maria, que pertencem ao grupo original, não aceitam participar em conjunto da comissão?

#### Solução

O número total de comissões é  $\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} = 560$ . O número de comissões em que Maria e João estão juntos é dado por

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{2!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{7 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 126$$

Logo, o número de comissões em que João e Maria não estão juntos é  $560 - 126 = 434$ .



**EXEMPLO A.13** Cartas de um baralho

Considere o experimento aleatório que consiste na extração aleatória de três cartas vão ser retiradas de um baralho normal de 52 cartas. Calcule o número de elementos de cada um dos seguintes eventos:

1.  $E$  = “todas as três do naipe de espadas”;
2.  $M$  = “todas as três cartas do mesmo naipe”;
3.  $D$  = “todas as três cartas de naipes diferentes”.

**Solução**

1. Existem 13 cartas de espadas. Logo,

$$n(E) = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 286$$

2. O mesmo cálculo feito no item anterior vale para os 4 naipes. Sejam  $E, C, P, O$  os eventos “três cartas de espadas”, “três cartas de copas”, “três cartas de paus” e “três cartas de ouro”, respectivamente. Então,  $M = E \cup C \cup P \cup O$  e como são eventos mutuamente exclusivos, resulta que

$$n(M) = n(E) + n(C) + n(P) + n(O) = 286 \times 4 = 1144$$

3. Para a primeira carta, temos 52 possibilidades – qualquer carta serve. Para a segunda carta, temos que excluir as cartas do naipe da primeira; logo, sobram 39. Para a terceira, temos que excluir as cartas dos dois naipes anteriores; logo, sobram 26. Pelo princípio da multiplicação, resulta que  $52 \times 39 \times 26$ , e

$$n(D) = 52 \times 39 \times 26 = 52.728$$

Note que o evento  $D$  não é o complementar de  $M$ , pois, por exemplo, a sequência  $CCE$  pertence ao complementar de  $M$ , mas não pertence ao evento  $D$ . ♦♦

**EXEMPLO A.14** Mega-sena

No jogo da Mega-Sena da Caixa Econômica Federal, o apostador deve escolher no mínimo seis e no máximo 15 números diferentes entre 1 e 60. Um jogo simples consiste na escolha de 6 números e os preços das apostas se baseiam no número de jogos simples em cada cartão. Qual é o número total de jogos simples distintos? Num cartão com 15 números marcados, quantos são os jogos simples? Se cada jogo simples custa R\$1,50, qual o preço de um cartão com 15 números marcados?

**Solução**

Note que, na Mega-Sena, a ordem não importa; logo, o número total de jogos simples é

$$\begin{aligned} \binom{60}{6} &= \frac{60!}{6!54!} \\ &= \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!} \\ &= 50.063.860 \end{aligned}$$

Isso significa que a sua chance de acertar a sena é  $\frac{1}{50.063.860} = 0,000000019974$ .

Num cartão com 15 números marcados, o número de jogos simples é

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 5005$$

e, assim, o preço desse cartão é  $1,50 \times 5005 = 7507,5$ .



#### EXEMPLO A.15 Time de futebol

Para a seleção brasileira foram convocados 2 goleiros, 6 zagueiros, 7 meios-de-campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios-de-campo, e 2 atacantes?

##### Solução

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = 6.300$$



#### EXEMPLO A.16 Torneios

Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

##### Solução

Cada jogador tem  $n - 1$  oponentes. Logo, existem  $n \times (n - 1)$  maneiras de selecionar dois participantes. Como a ordem dos dois selecionados não importa, o número total de partidas é  $\frac{n \times (n - 1)}{2}$ . Logo,

$$\frac{n \times (n - 1)}{2} = 780 \Rightarrow n^2 - n - 1.560 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6.240}}{2} = \frac{1 \pm 79}{2}$$

As raízes de tal equação são  $n = 40$  e  $n = -39$ . Como  $n$  tem que ser positivo, a solução é  $n = 40$  partidas.



## A.6 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

O triângulo de Pascal é um quadro em formato de um triângulo (que consideraremos retângulo para facilitar a exibição), formado pelos números binomiais dispostos da seguinte forma: na hipotenusa, todos os elementos são iguais a 1, bem como no cateto vertical:

Linha	
0	1
1	1 1
2	1    1
3	1       1
4	1           1
5	1               1
6	1                   1
⋮	⋮

Cada elemento no interior do triângulo é obtido como a soma do elemento imediatamente acima e do primeiro elemento acima à esquerda; o processo recursivo de construção se faz linha a linha, iniciando-se na segunda linha, conforme ilustrado a seguir:

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> 1
3	1       1
4	1           1
5	1               1
6	1                   1
⋮	⋮

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> 1
3	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span> 1
4	1       1
5	1           1
6	1               1
⋮	⋮

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> 1
3	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span> 1
4	1       1
5	1           1
6	1               1
⋮	⋮

Linha		
0		1
1		1 1
2		1 2 1
3		1 3 3 1
4		1 4 6 4 1
5		1 5 10 10 5 1
6		1 6 15 20 15 6 1
⋮		⋮

Linha		
0		1
1		1 1
2		1 2 1
3		1 3 3 1
4		1 4 6 4 1
5		1 5 10 10 5 1
6		1 6 15 20 15 6 1
⋮		⋮

Linha		
0		1
1		1 1
2		1 2 1
3		1 3 3 1
4		1 4 6 4 1
5		1 5 10 10 5 1
6		1 6 15 20 15 6 1
⋮		⋮

Continuando com esse procedimento, obtém-se o triângulo de Pascal a seguir (note que esse triângulo tem infinitas linhas e infinitas colunas...)

Linha	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
⋮	⋮

Os números que aparecem em cada linha do triângulo nada mais são que os números binomiais. Numerando as linhas e colunas do triângulo a partir de zero, o elemento da linha  $n$  e coluna  $k$  é  $\binom{n}{k}$ . Então, em cada linha  $n$ , os elementos vão desde  $\binom{n}{0}$  até  $\binom{n}{n}$ .

	0	1	2	3	4	5	6	...		0	1	2	3	4	5	6	...
0	1									$\binom{0}{0}$							
1	1	1								$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	1	2	1							$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	1	3	3	1						$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	1	4	6	4	1					$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	1	5	10	10	5	1				$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	1	6	15	20	15	6	1			$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
⋮																	

Existem vários resultados sobre os números combinatórios e várias propriedades associadas às linhas e colunas do triângulo de Pascal. A propriedade utilizada na construção do triângulo é a propriedade já vista dos números binomiais, chamada Relação de Stifel.

**! Relação de Stifel**

A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo da última parcela, ou seja

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (\text{A.10})$$

**Demonstração**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{[(k+1)k!][(n-k)(n-k-1)!]} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

■

Considere a  $n$ -ésima linha do triângulo de Pascal e seja  $k < n$ . Então,  $\binom{n}{k}$  é o elemento que está na linha  $n$  avançado de  $k$  colunas em relação ao início da linha; já  $\binom{n}{n-k}$  é o elemento que está na linha  $n$  atrasado de  $k$  colunas em relação ao final da linha. Números combinatórios como  $\binom{n}{k}$  e  $\binom{n}{n-k}$  são chamados *combinações complementares*.

**! Relação das Combinações Complementares**

Em uma mesma linha do triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{A.11})$$

**Demonstração**

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

### ! Teorema das Linhas

A soma dos elementos da  $n$ -ésima linha é igual a  $2^n$ , ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad (\text{A.12})$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$$

### Demonstração

Como visto, o número combinatório  $\binom{n}{k}$  dá o número de subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto de tamanho  $n$ . Assim, na expressão (A.12), cada número combinatório dá o número de subconjuntos de determinado tamanho e a soma deles dá o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho  $n$ . Mas para formar subconjuntos de tal conjunto podemos usar o seguinte artifício: cada elemento pode ser marcado com um  $+$  para indicar que pertence ao subconjunto, ou com um  $-$ , para indicar que não pertence ao subconjunto. O número total de formas de fazer isso é  $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$  e isso prova que o número total de subconjuntos de um conjunto de tamanho  $n$  é  $2^n$  e isso completa a prova.

### ! Teorema das colunas

A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, começando da primeira linha, é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna em relação ao último elemento da soma, ou seja:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

Em termos de somatório:

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

### Demonstração

Vamos aplicar a relação de Stifel aos elementos da coluna  $k + 1$ , a partir da primeira linha desta coluna:

$$\begin{aligned} \binom{k+1}{k+1} &= \binom{k}{k} \\ \binom{k+2}{k+1} &= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1} \\ \binom{k+3}{k+1} &= \binom{k+2}{k} + \binom{k+2}{k+1} \\ \binom{k+4}{k+1} &= \binom{k+3}{k} + \binom{k+3}{k+1} \\ &\vdots \\ \binom{k+n-1}{k+1} &= \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-2}{k+1} \\ \binom{k+n}{k+1} &= \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-1}{k+1} \\ \binom{k+n+1}{k+1} &= \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} \end{aligned}$$

Somando essas igualdades termo a termo, podemos ver que há parcelas iguais em lados opostos, que podem ser simplificadas. Todos os termos do lado esquerdo, com exceção do último, cancelam com termos do lado direito e o que sobra é:

$$\binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \binom{k+3}{k} + \dots + \binom{k+n-2}{k} + \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n}{k}$$

ou seja

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$$

o que completa a prova. ■

### **!** Binômio de Newton

Dados quaisquer números reais  $x$  e  $a$  e um inteiro qualquer  $n$ , então

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \quad (\text{A.13})$$

### Demonstração

Vamos provar este resultado usando o método da indução.



- O resultado é válido para  $n = 1$ . De fato:

$$(x + a)^1 = x + a$$

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k x^{1-k} = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} a = x + a$$

- Suponhamos que o resultado seja válido para  $n$  qualquer e vamos provar que é válido para  $n + 1$ . Mais precisamente, temos as seguintes hipótese de indução e tese:

$$\text{H.I. : } (x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

$$\text{Tese : } (x + a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k x^{n+1-k}$$

### Demonstração:

Usando propriedades de potência e a hipótese de indução, podemos escrever:

$$\begin{aligned} (x + a)^{n+1} &= (x + a)(x + a)^n \\ &= (x + a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} \end{aligned}$$

Vamos separar o primeiro termo ( $k = 0$ ) do primeiro somatório e o último termo ( $k = n$ ) do segundo somatório:

$$\begin{aligned} (x + a)^{n+1} &= \left[ \binom{n}{0} a^0 x^{n-0+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^{n-n} \right] \\ &= \left[ \binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} x^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right] \end{aligned}$$

Note que ambos os somatórios têm  $n$  parcelas cada um. Vamos fazer uma mudança de variável no segundo somatório, de modo que a potência de  $a$  passe a ser  $j$  em vez de  $k + 1$ . Mais precisamente, vamos definir

$$k + 1 = j \Rightarrow \begin{cases} k = j - 1 \\ k = 0 \Rightarrow j = 1 \\ k = n - 1 \Rightarrow j = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= \left[ \binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[ \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^j x^{n-j+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right] \\ &= \left[ \binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k+1} \right] + \left[ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k x^{n-k+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0 \right]\end{aligned}$$

Aqui, apenas trocamos o índice  $j$  por  $k$ . Note que as potências de  $a$  e  $x$  são as mesmas em ambos os somatórios. Logo, podemos colocar em evidência num único somatório:

$$(x+a)^{n+1} = \binom{n}{0} a^0 x^{n+1} + \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k x^{n-k+1} \right\} + \binom{n}{n} a^{n+1} x^0$$

Note, agora, os números combinatórios que aparecem entre colchetes: estamos somando 2 números combinatórios consecutivos da linha  $n$ . Pela relação de Stifel, sabemos que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Sabemos, também, que

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0} \\ \binom{n}{n} &= \binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados, obtemos que

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k x^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} x^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k x^{n-k+1}\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

### A.6.1 Aplicações

1. Note que, fazendo  $x = 1$  e  $a = 1$  na equação (A.13), obtemos que

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

o que nos dá uma outra prova do teorema das linhas.

2. Note que, fazendo  $x = 1$  e  $a = -1$  na equação (A.13), obtemos que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3. Fórmula de Euler:

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r} \quad (\text{A.14})$$

Essa fórmula pode ser considerada verdadeira para quaisquer valores de  $m, n, r$  desde que adotemos a convenção de que  $\binom{n}{r} = 0$  para  $r > n$ .

Para demonstrar esse resultado usando argumentos combinatórios, suponha um conjunto com  $n + m$  elementos, de modo que  $m$  desses elementos estão em uma categoria I e os  $n$  elementos restantes estão em outra categoria II.

Vamos expandir o termo do lado esquerdo:

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{r-2} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

O termo do lado direito da expressão nos dá o número de subconjuntos deste conjunto com  $r$  elementos. O primeiro termo da soma do lado esquerdo nos dá o número de subconjuntos com nenhum elemento da categoria I e  $r$  elementos da categoria II; o segundo termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente um elemento da categoria I e  $r - 1$  elementos da categoria II; o terceiro termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente dois elementos da categoria I e  $r - 2$  elementos da categoria II e, sucessivamente, o último termo nos dá o número de subconjuntos com exatamente  $r$  elementos da categoria I e nenhum elemento da categoria II. Somando esses termos, obtemos o número total de subconjuntos com  $r$  elementos, que é  $\binom{m+n}{r}$ .

4. Fazendo  $m = r = n$  na equação (A.14), obtemos que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Mas pela relação das combinações complementares  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , o que nos dá:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

De fato:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}$$

Como  $k \neq 0$ , podemos dividir ambos os termos por  $k$ , o que resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $k-1 = j$ , podemos escrever (note os índices do somatório!):

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = n \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$$

usando o resultado (A.12).

6. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

De fato: fazendo  $k-1 = j$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \binom{n}{j+1} = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j \frac{n!}{(j+1)j!(n-j-1)!} = \sum_{j=1}^{n-1} j \frac{n!}{j(j-1)!(n-j-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} \end{aligned}$$

Fazendo  $j-1 = i$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j-1)!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n!}{i!(n-i-2)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{i!(n-2-i)!} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = n(n-1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Mais uma vez, usamos o teorema das linhas.

7. Se  $n$  é par, então

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n}$$

De fato: o desenvolvimento do binômio de Newton nos dá que

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} \\ &+ \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x^1 + \binom{n}{n} a^n x^0 \\ &\equiv T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + T_n \end{aligned}$$

em que

$$T_k = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

Analogamente, se  $n$  é par

$$\begin{aligned} (x - a)^n &= \binom{n}{0}(-a)^0 x^n + \binom{n}{1}(-a)^1 x^{n-1} + \binom{n}{2}(-a)^2 x^{n-2} \\ &+ \dots + \binom{n}{n-1}(-a)^{n-1} x^1 + \binom{n}{n}(-a)^n x^0 \\ &\equiv T_0 - T_1 + T_2 + \dots - T_{n-1} + T_n \end{aligned}$$

Então,

$$(x + a)^n + (x - a)^n = 2(T_0 + T_2 + \dots + T_{n-2} + T_n)$$

e

$$(x + a)^n - (x - a)^n = 2(T_1 + T_3 + \dots + T_{n-3} + T_{n-1})$$

Fazendo  $x = a = 1$ , resulta que

$$2^n = 2(T_0 + T_2 + \dots + T_{n-2} + T_n) = 2 \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} \right]$$

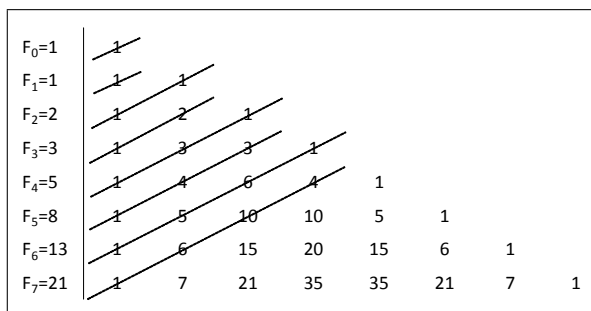
$$2^n = 2(T_1 + T_3 + \dots + T_{n-3} + T_{n-1}) = 2 \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} \right]$$

Logo, se  $n$  é par

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

### 8. Números de Fibonacci e o triângulo de Pascal

O número de Fibonacci  $F_n$  é definido como a soma dos elementos da  $n$ -ésima “diagonal inversa” do triângulo de Pascal. Veja a Figura A.2



**Figura A.2** – figure  
Números de Fibonacci no Triângulo de Pascal

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \quad n \text{ par}$$

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \quad n \text{ ímpar}$$

Cada número na sequência de Fibonacci é a soma dos dois números anteriores, isto é:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

De fato: sem perda de generalidade, vamos supor  $n$  par (logo,  $n + 1$  é ímpar e  $n + 2$  é par.)

$$\begin{aligned} F_n + F_{n+1} &= \left[ \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n - (\frac{n}{2} - 1)}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \\ &\quad \left[ \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots + \binom{n+1 - \frac{n+1-1}{2}}{\frac{n+1-1}{2}} \right] \\ &= \left[ \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \\ &\quad \left[ \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] \\ &= \binom{n+1}{0} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[ \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] + \left[ \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \right] + \dots + \\ &\quad \left[ \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2} - 1} + \binom{n+1 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \right] + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \\ &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots + \binom{n+2 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Note os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} &= \binom{n+2}{0} \\ n \text{ par} \implies n = 2 \times \frac{n}{2} &\implies \binom{n - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} = \binom{n+2 - \frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = \binom{n+2 - (\frac{n}{2} + 1)}{\frac{n}{2} + 1} \end{aligned}$$

Resulta, então, que

$$F_n + F_{n+1} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots + \binom{n+2 - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} + \binom{n+2 - \frac{n+2}{2}}{\frac{n+2}{2}} = F_{n+2}$$